УДК 517.968

О собственных числах и собственных функциях одного интегродифференциального уравнения

Мелешко И.Н.
Белорусский национальный технический университет

Многие важнейшие практические задачи гидродинамики, теории упругости, теории фильтрации и теплопроводности приводятся к задаче Коши для линейных и нелинейных сингулярных интегродифференциальных уравнений первого порядка с интегралами, понимаемыми в смысле главного значения по Коши.

Установлена связь третьей краевой задачи теории теплопроводности для круга и полуплоскости с сингулярными итегродифференциальными уравнениями вида:

$$u'(\varphi)-\lambda q(\varphi)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(\tau)ctg\frac{\tau-\varphi}{2}d\tau=f(\varphi), \qquad (1)$$

$$u'(x)-\lambda q(x)\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{u(t)}{t-x}dt=f(x), \qquad (2)$$

$$u'(x)-\lambda q(x)\frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{u(t)}{t-x}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=f(x). \qquad (3)$$

Здесь u - неизвестная функция, q, f - заданные функции, λ - числовой параметр.

При исследовании таких уравнений важную роль играют так называемые «спектральные соотношения» для сингулярных интегралов в уравнениях (1) - (3). Так , например,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin m\tau ctg\frac{\tau-\varphi}{2}d\tau=\cos m\varphi,\ \ m=1,2\ ...$$

С помощью этого соотношения устанавливаем, что собственным значениям $\lambda=m$ $(m=1,\ 2,\ ...,)$ уравнение (1) при $q(\varphi)=1$ отвечают собственные функции $\sin m\varphi$. Аналогично исследуются интегродифференциальные уравнения (2),(3).