Математика и информатика

УДК 539.3

М. А. ЖУРАВКОВ, С. М. БОСЯКОВ, И. М. МАРТЫНЕНКО

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МАЛОГО ПАРАМЕТРА ДЛЯ РАСЧЕТА ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ СТАТИКИ КУБИЧЕСКИ АНИЗОТРОПНЫХ ТЕЛ

В статье рассмотрено применение общих принципов асимптотического метода к решению граничных задач для кубически анизотропных деформируемых сред и рассмотрена задача, показывающая возможность применения метода малого параметра к практическим расчетам НДС для кубически анизотропного материала алмаз. Из рисунков видно, что качественное поле перемещений и количественные значения перемещений, полученные с применением пакетов ANSYS и FlexPDE (основанное на выведенных соотношениях (6), (8)), практически не отличаются друг от друга. Максимальная разность конечно-элементного расчета в пакете ANSYS по сравнению с результатами расчетов, основанных на методах математической физики и пакета FlexPDE, составляет менее 10 %, что является приемлемым для задач, носящих прикладной характер. Отметим также, что задачи, связанные с рассмотрением кубически анизотропных твердых деформируемых тел, недостаточно полно изучены к настоящему времени. В связи с этим проведенное исследование вносит определенный вклад в изучение такого рода твердых деформируемых тел.

Ключевые слова: анизотропия; малый параметр; вектор перемещения; кубически анизотропный материал алмаз; численный расчет; программные пакеты FlexPDE и ANSYS.

Thus, in the article the application of the general principles of the asymptotic method to the solution of boundary value problems for anisotropic cubic deformable environments and consider the problem of showing that the method of small parameter, for practical calculations of the stress strain state of anisotropic material for the cubic diamond. The drawings shows that the displacement field qualitative and quantitative values of displacements obtained by using ANSYS package and the package FlexPDE (based on the derived relations (6) and (8)) do not differ from each other. The maximum difference between the finite element package ANSYS calculation in comparison with the results of calculations based on the methods of mathematical physics and package FlexPDE, is less than 10 %, which is acceptable to the problems with the applied nature. Note also that the problems associated with the study of cubic anisotropic solid deformable bodies are not fully explored to date. In this regard, our study contributes to the study of these solid deformable bodies.

Key words: anisotropy; a small parameter; the displacement vector; diamond cubic anisotropic material; the numerical calculation; software packages FlexPDE and ANSYS.

Проблемы, связанные с упругим равновесием твердых деформируемых тел, постоянно находятся в поле зрения механиков и математиков, занимающихся исследованием поведения реальных объектов в сложных условиях их деформирования, уточнением пределов применимости существующих теорий напряженно-деформированного состояния (НДС), внедрением новых композитных материалов и т. д. [1]. Возникающие при этом новые задачи, как правило, не имеют точного решения. Это объясняется тем, что разрешающие системы уравнений имеют, как правило, нелинейный характер, а их приведение к линейному виду осуществляется с помощью привлечения недостаточно обоснованных гипотез [2]. При этом появляются погрешности и сама область применения этих гипотез наперед неизвестна. Универсальный метод исследования процессов, протекающих в природе, состоит в применении дифференциальных уравнений и последующем их интегрировании, что не всегда удается. Естественно, что интегрирование этих уравнений требует использования различных вариантов приближенных методов, одним из которых (и весьма эффективным) является асимптотический (в частности, метод малого параметра). Оказалось, что асимптотические методы особенно эффективны при интегрировании дифференциальных уравнений с медленно меняющимися коэффициентами [2].

Различные варианты метода малого параметра широко применяются в механике, физике и других науках, использующих общую теорию дифференциальных уравнений. Большинство методов этой теории (например, метод Пуанкаре, метод усреднения, метод пограничного слоя) берут свое начало от решения

Репозиторий БНТУ

конкретных задач теории колебаний, гидродинамики, аэродинамики и т. д. [3]. Следует отметить, что целый ряд вариантов метода малого параметра до сих пор не имеют строгого математического обоснования, а эффективность их применения связана с глубокими и неформальными математическими выкладками [4]. Метод малого параметра служит для выяснения качественных особенностей рассматриваемых задач, получения асимптотики искомого решения и анализа особых точек, построения «тестовых» решений, разработки вычислительных методов, поэтому не утрачивает своего значения, несмотря на обширное внедрение компьютеров в научные исследования. В настоящей работе показано применение метода малого параметра при расчете плоской задачи статики кубически анизотропного тела.

Метод малого параметра. Рассмотрим один из вариантов решения задачи механики сплошных сред на основе метода малого параметра, когда искомые функции зависят только от двух переменных.

В плоском случае закон Гука для кубической анизотропии имеет вид [5]

$$\sigma_{\alpha\alpha} = A_{11}\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} + A_{12}\frac{\partial u_\beta}{\partial x_\beta},\ \sigma_{\alpha\beta} = A_{44}\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha}\right). \quad (1)$$

При отсутствии объемных (массовых) сил уравнения равновесия записываются так:

$$\frac{\partial\sigma_{\alpha\alpha}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial\sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = 0,\ \frac{\partial\sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial\sigma_{\beta\beta}}{\partial x_\beta} = 0. \quad (2)$$

Из (1), (2) следует

$$\begin{gathered} A_{11}\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x_\alpha^2} + A_{44}\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x_\beta^2} + (A_{12} + A_{44})\frac{\partial^2 u_\beta}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = 0, \\ A_{11}\frac{\partial^2 u_\beta}{\partial x_\beta^2} + A_{44}\frac{\partial^2 u_\beta}{\partial x_\alpha^2} + (A_{12} + A_{44})\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = 0. \end{gathered} \quad (3)$$

Здесь u_α – компоненты вектора перемещений, A_{ij} – материальные константы.

В случае анизотропного тела отношение A_{44}/A_{11} мало и поэтому $\varepsilon = (A_{44}/A_{11}) < 1$, так как A_{44} – константа, характеризующая сдвиговую деформацию, а A_{11} – константа, характеризующая продольную деформацию [6], и уравнения (3) примут вид

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x_\alpha^2} + \varepsilon\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x_\beta^2} + q\frac{\partial^2 u_\beta}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = 0, \\ \frac{\partial^2 u_\beta}{\partial x_\beta^2} + \varepsilon\frac{\partial^2 u_\beta}{\partial x_\alpha^2} + q\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = 0, \end{gathered} \quad (4)$$

$q = (A_{12} + A_{44})/A_{11} = e\varepsilon$, $e = \dfrac{(A_{12} + A_{44})}{A_{44}}$.

Введем следующее преобразование координат и искомых функций:

$$x = \varepsilon^{-1/2}x_1,\ y = y_1,\ u_\alpha = U^{(1)},\ u_\beta = \varepsilon^{3/2}V^{(1)}. \quad (5)$$

Тогда, внося (5) в (4), получаем

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2 U^{(1)}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U^{(1)}}{\partial y_1^2} + e\varepsilon^2\frac{\partial^2 V^{(1)}}{\partial x_1 \partial y_1} = 0, \\ \frac{\partial^2 V^{(1)}}{\partial y_1^2} + \varepsilon^2\frac{\partial^2 V^{(1)}}{\partial x_1^2} + e\frac{\partial^2 U^{(1)}}{\partial x_1 \partial y_1} = 0. \end{gathered} \quad (6)$$

Аналогично (5) введем следующее преобразование координат и искомых функций:

$$x = \varepsilon^{1/2}x_2,\ y = y_2,\ u_\alpha = \varepsilon U^{(2)},\ u_\beta = \varepsilon^{1/2}V^{(2)}. \quad (7)$$

Подставим (7) в (4):

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2 U^{(2)}}{\partial x_2^2} + \varepsilon^2\frac{\partial^2 U^{(2)}}{\partial y_2^2} + e\varepsilon\frac{\partial^2 V^{(2)}}{\partial x_2 \partial y_2} = 0, \\ \frac{\partial^2 V^{(2)}}{\partial y_2^2} + \frac{\partial^2 V^{(2)}}{\partial x_2^2} + e\varepsilon\frac{\partial^2 U^{(2)}}{\partial x_2 \partial y_2} = 0. \end{gathered} \quad (8)$$

Системы (6) и (8) подобны.

Репозиторий БНТУ

Таким образом, исходная задача свелась к решению систем (6), (8). Искомое смещение точек кубически анизотропной среды определяется суперпозицией двух решений, которые, как следует из (6) и (8), выражаются через $U^{(\alpha)}$, $V^{(\alpha)}$, $\alpha = 1,2$.

Расчет вектора перемещения. Рассмотрим применение изложенной теории к расчету вектора перемещения для кубически анизотропного материала алмаз, упругие свойства которого описываются основными константами упругости $A_{11} = 107,9$, $A_{12} = 12,4$, $A_{44} = 57,8$. Рассматривается задача в перемещениях. Векторы перемещения U и V, которые подлежат определению, на левой границе области равны нулю, внутри области удовлетворяют уравнениям (6) и (8) и непрерывно-дифференцируемы внутри области вплоть до границы. Вдоль правой границы области задается перемещение $u = 15 \cdot 10^{-12}$. Необходимо вычислить, как распределяются векторы перемещения внутри и на границах области. Численный расчет производится в пакетах FlexPDE (рис. 1, 2) и ANSYS (рис. 3, 4).

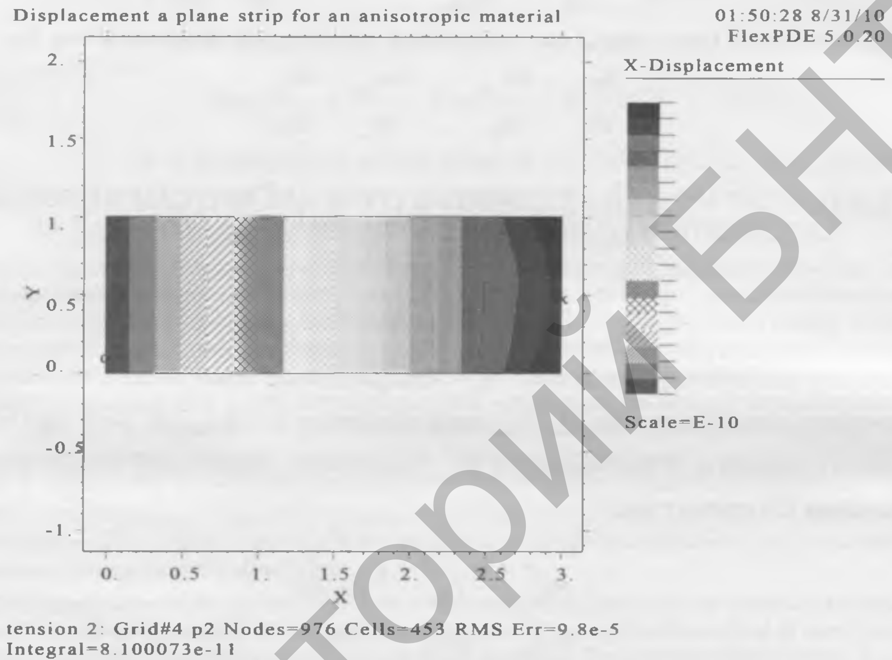

Рис. 1. Перемещение по оси *OX*, рассчитанное в пакете FlexPDE

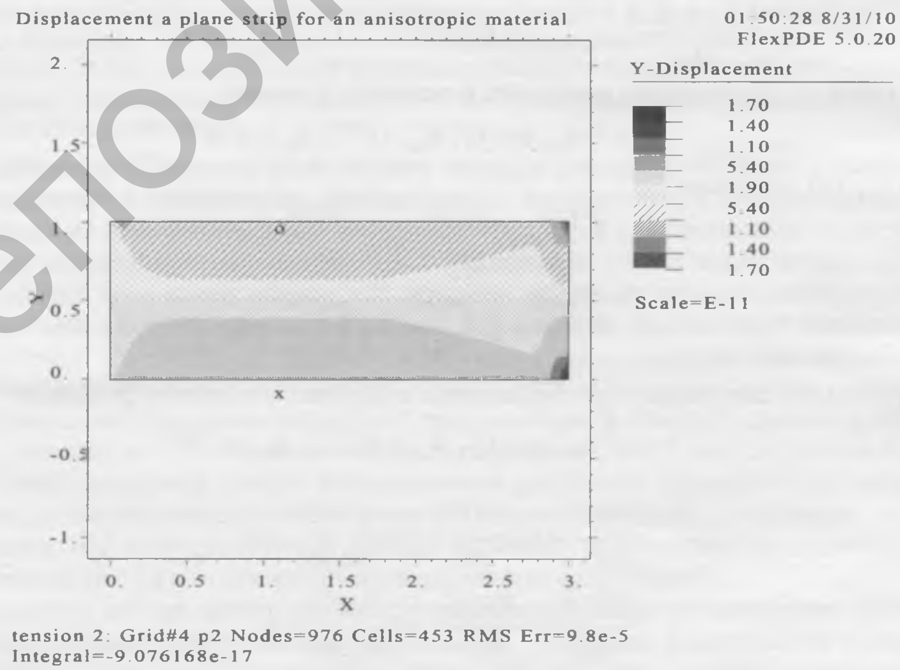

Рис. 2. Перемещение по оси *OY*, рассчитанное в пакете FlexPDE

Репозиторий БНТУ

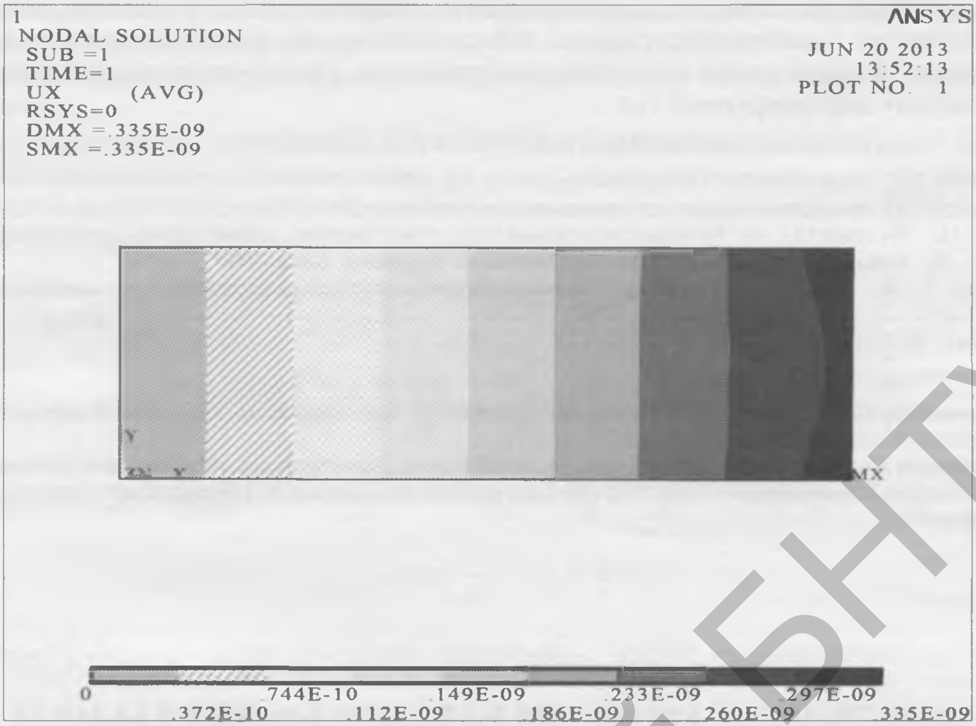

Рис. 3. Перемещение по оси *OX*, рассчитанное в пакете ANSYS

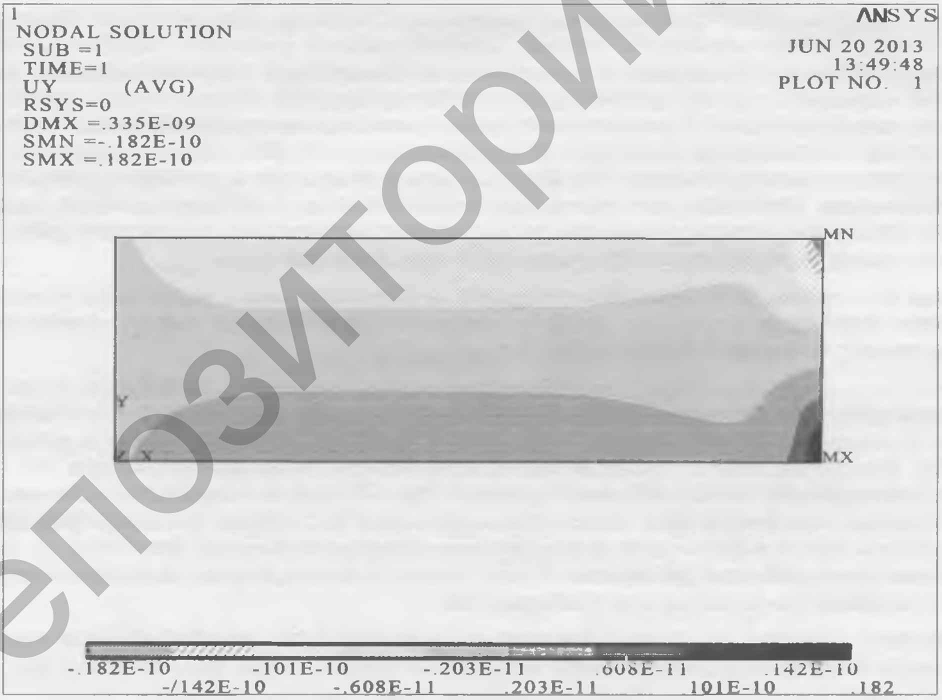

Рис. 4. Перемещение по оси *ОУ*, рассчитанное в пакете ANSYS

* * *

Таким образом, в статье рассмотрено применение общих принципов асимптотического метода к решению граничных задач для кубически анизотропных деформируемых сред и рассмотрена задача, показывающая возможность применения метода малого параметра к практическим расчетам НДС для кубически анизотропного материала алмаз. Из рис. 1–4 видно, что качественное поле перемещений и количественные значения перемещений, полученные с применением пакетов ANSYS и FlexPDE (основанное на выведенных соотношениях (6), (8)), практически не отличаются друг от друга. Максимальная разность конечно-элементного расчета в пакете ANSYS по сравнению с результатами расчетов, основанных на методах математической физики и пакета FlexPDE, составляет менее 10 %, что является

Репозиторий БНТУ

приемлемым для задач, носящих прикладной характер. Отметим также, что задачи, связанные с рассмотрением кубически анизотропных твердых деформируемых тел, недостаточно полно изучены к настоящему времени. В связи с этим проведенное исследование вносит определенный вклад в изучение такого рода твердых деформируемых тел.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Ландау Л. Д., Лифшиц И. М. Теория упругости. М., 1987.
2. Моисеев Н. Н. Асимптотические методы нелинейной механики. М., 1981.
3. Гузь А. Н., Немиш Ю. Н. Методы возмущений в пространственных задачах теории упругости. Киев, 1982.
4. Каюк Я. Ф. Некоторые вопросы методов разложения по параметру. Киев, 1980.
5. Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х. Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. М., 1975.
6. Новацкий В. Теория упругости. М., 1971.

Поступила в редакцию 09.06.13.

Михаил Анатольевич Журавков – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической и прикладной механики, первый проректор.

Сергей Михайлович Босяков – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической и прикладной механики.

Игнат Михайлович Мартыненко – ассистент кафедры высшей математики № 1 Белорусского национального технического университета.

Репозиторий БНТУ