

**Белорусский национальный технический университет**  
**Факультет транспортных коммуникаций**  
**Кафедра «Механизация и автоматизация дорожно-строительного**  
**комплекса»**

Электронный учебно-методический комплекс  
по учебной дисциплине  
**Расчёт металлоконструкций**  
для специальности 1-36 11 01 «Подъемно-транспортные, строительные,  
дорожные машины и оборудование (по направлениям)»

Составитель: А.Л. Дашко, старший преподаватель кафедры «Механизация и автоматизация дорожно-строительного комплекса».

### **ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА (ВВЕДЕНИЕ)**

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по дисциплине «Расчет металлоконструкций» предназначен для студентов специальности 1-36 11 01 «Подъемно-транспортные, строительные, дорожные машины и оборудование (по направлениям)». В ЭУМК рассматриваются теоретические основы расчета конструирования металлических конструкций подъемно-транспортных, строительных и дорожных машин.

При написании электронного учебно-методического комплекса использованы материалы, изложенные в учебниках, учебных пособиях, методических указаниях, технических нормативно-правовых актов, научных статьях, материалах научно-практических конференций. Настоящий электронный учебно-методический комплекс отражает опыт преподавания данной дисциплины, накопленный на кафедре «Механизация и автоматизация дорожно-строительного комплекса» БНТУ.

#### **Цели ЭУМК**

Целью ЭУМК является формирование у студентов знаний, умений и навыков в области расчета конструирования металлических конструкций подъемно-транспортных, строительных и дорожных машин. Этот курс обычно читается после курса «Механика материалов» и предшествует изучению специальных дисциплин по строительным и дорожным машинам.

#### **Особенности структурирования и подачи учебного материала**

ЭУМК включает теоретический раздел (опорный конспект лекций), практический раздел (практические занятия, курсовые проекты (работы)), раздел контроля знаний и вспомогательный раздел, включающий список рекомендуемой литературы. Для выполнения курсового проекта (работы) в практическом разделе приведены темы курсовых проектов (работ). Раздел контроля знаний включает вопросы для подготовки к сдаче экзамена. Во вспомогательный раздел входит перечень основных и вспомогательных литературных источников.

#### **Рекомендации по организации работы с ЭУМК**

Электронный документ открывается в среде Windows на IBM PC - совместимом персональном компьютере стандартной конфигурации.

# СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	7
1 ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ.....	8
1.1 УЧЕБНАЯ РАБОЧАЯ ПРОГРАМА.....	8
1.2 КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ.....	13
Тема 1 КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ.....	13
1.1.1. Общие задачи строительной механики.....	13
1.1.2. Расчетные схемы.....	13
1.1.3. Степень изменяемости системы.....	15
1.1.4. Образование и кинематический анализ систем.....	15
1.1.5. Исследование неизменяемых ферм.....	17
Тема 2 РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ ПРИ ДЕЙСТВИИ НЕПОДВИЖНОЙ НАГРУЗКИ.....	19
1.2.1. Общие методы определения сил в связях плоских систем. Основные предпосылки к расчётам.....	19
1.2. 2. Статический метод: способ вырезания узлов, способ сечений, способ моментной точки и способ проекций.....	19
1.2.3. Основы кинематического метода.....	20
1.2.4. Основы метода замены связей.....	21
Тема 3 РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ ПРИ ДЕЙСТВИИ ПОДВИЖНОЙ И ВРАЩАЮЩЕЙСЯ НАГРУЗКИ.....	22
1.3.1. Теория линий влияния. Основные понятия.....	22
1.3.2. Линии влияния опорных реакций.....	22
1.3. 3. Линии влияния изгибающих моментов и поперечных сил для однопролетных и консольных балок.....	24
1.3.4. Линии влияния для шарнирной балки.....	26
1.3.5. Линии влияния при узловой передаче нагрузки.....	28
1.3.6. Кинематический метод построения линий влияния.....	29
1.3.7. Определение невыгоднейшего загрузения линий влияния.....	30
1.3.8. Построение линий влияния усилий в стержнях простейших ферм.....	32
1.3.9. Теория окружностей влияния. Основные понятия.....	36
1.3.10. Определение усилий и напряжений по окружностям влияния.....	38
Тема 4 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ. МАТРИЧНЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА.....	40
1.4.1. Основные понятия. Обобщенная сила и обобщенное перемещение.....	40
1.4.2. Действительная работа внешних и внутренних сил. Потенциальная энергия деформации.....	40

1.4.3. Возможная работа внешних и внутренних сил .....	43
1.4.4. Теоремы о взаимности работ и взаимности перемещений.....	44
1.4.5. Теорема о взаимности реакций .....	44
1.4.6. Теорема о взаимности реакций и перемещений.....	45
1.4.7. Общая формула для определения перемещений плоской стержневой системы (метод Мора).....	45
1.4.8. Вычисление интегралов Мора.....	47
1.4.9. Определение перемещений от температурных и дислокационных воздействий .....	48
1.5.1. Статистически неопределимые системы.....	50
1.5.2. Общие предпосылки методов расчета статистически неопределимых систем.....	51
1.5.3. Метод сил .....	52
Тема 5 ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ ПРОЕКТИРОВАНИЯ МЕТАЛЛОКОНСТРУКЦИЙ.....	54
1.6.1 Общие требования к металлическим конструкциям.....	54
1.6.2 Расчет на статическую прочность по допускаемым напряжениям .....	56
Тема 6. МАТЕРИАЛЫ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЙ. УСТАЛОСТНАЯ ДОЛГОВЕЧНОСТЬ .....	64
2.1.1. Требования к материалам металлических конструкций и их характеристики .....	64
2.1.2. Рекомендации по выбору стали с учетом условий эксплуатации. ....	64
2.1.3. Сортамент.....	65
2.2.1. Нагрузки, действующие на металлоконструкции машин .....	66
2.2.2. Расчет на статическую прочность по допускаемым напряжениям .....	68
2.2.4. Расчет на надежность. ....	70
2.2.5. Основы расчета конструкций на устойчивость .....	70
2.3.1. Механизм усталостного разрушения.....	73
2.3.2. Факторы, влияющие на усталостную долговечность .....	73
Тема 7. РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ СВАРНЫХ СОЕДИНЕНИЙ. БОЛТОВЫЕ СОЕДИНЕНИЯ .....	79
2.4.1. Сварные соединения. ....	79
2.4.2. Заклепочные и болтовые соединения. ....	83
Тема 8. БАЛКИ. РЕШЕТЧАТЫЕ КОНСТРУКЦИИ (ФЕРМЫ). РАМЫ.....	85
2.5.1. Общая характеристика балок .....	85
2.5.2. Расчет балок из проката .....	85
2.6.1. Решетчатые конструкции дорожно-строительных машин.....	86
2.6.2. Классификация решетчатых конструкций. ....	86
2.6.3. Рекомендации по проектированию решетчатых конструкций. ....	86
Тема 9. ОСОБЕННОСТИ ПРОЕКТИРОВАНИЯ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЙ РАЗЛИЧНЫХ МАШИН .....	88

2.7.1. Особенности расчета металлоконструкций башенных кранов.....	88
2.7.2. Особенности расчета рамных конструкций землеройных машин с навесным оборудованием.....	92
II ПРАКТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ .....	101
2.1 Темы практических занятий .....	101
2.2 Темы курсовых проектов (работ).....	101
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №1 .....	102
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №2 .....	104
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №3 .....	106
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №4 .....	107
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №5 .....	109
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №6 .....	110
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №7 .....	113
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №8 .....	115
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №9 .....	117
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №10 .....	119
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №11 .....	121
III КОНТРОЛЬ ЗНАНИЙ .....	123
3.1 Вопросы для самоконтроля .....	123
IV ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЙ РАЗДЕЛ (ЛИТЕРАТУРА).....	125
4.1 Основная литература.....	125
4.2 Дополнительная литература .....	125

## **ВВЕДЕНИЕ**

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) «Расчет металлоконструкций» предназначен для студентов 3 курса (6 семестр) специальности 1-36 11 01 «Подъемно-транспортные, строительные, дорожные машины и оборудование (по направлениям)». В ЭУМК рассматриваются теоретические основы расчета конструирования металлических конструкций подъемно-транспортных, строительных и дорожных машин.

Объем изучаемой дисциплины для специализации 1-36 11 01 06 в соответствии с учебным планом составляет всего 170 ч., в том числе аудиторных – 68 ч., из них лекций – 34 ч., практические занятия – 34 ч. Форма текущей аттестации – экзамен, курсовой проект (работа).

Электронный учебно-методический комплекс состоит из взаимосвязанных основных методических материалов: конспекта лекций, рабочей программы, пояснений к основным разделам по разработке курсового проекта (работы), вопросов для самоконтроля и подготовке к экзамену.

Целью ЭУМК является формирование у студентов знаний, умений и навыков в области расчета конструирования металлических конструкций подъемно-транспортных, строительных и дорожных машин. Этот курс обычно читается после курса «Механика материалов» и предшествует изучению специальных дисциплин по строительным и дорожным машинам. Направленность и содержание учебной дисциплины определена характером будущей инженерной деятельности специалиста в сфере монтажных, проектно-конструкторских, научно-исследовательских, ремонтно-строительных и других эксплуатационных организациях.

При написании электронного учебно-методического комплекса использованы материалы, изложенные в учебниках, учебных пособиях, методических указаниях, технических нормативно-правовых актов, научных статьях, материалах научно-практических конференций. Настоящий электронный учебно-методический комплекс отражает опыт преподавания данной дисциплины, накопленный на кафедре «Механизация и автоматизация дорожно-строительного комплекса» БНТУ.

# 1 ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

## 1.1 УЧЕБНАЯ РАБОЧАЯ ПРОГРАМА

Целью изучения учебной дисциплины является формирование у студентов знаний, умений и навыков в области расчета конструирования металлических конструкций подъемно-транспортных, строительных и дорожных машин. Этот курс обычно читается после курса «Механика материалов» и предшествует изучению специальных дисциплин по строительным и дорожным машинам.

Основными задачами преподавания учебной дисциплины являются:

- освоение студентами основных положений по определению силовых факторов в элементах;
- освоение студентами методов расчета металлических конструкций на прочность при различных воздействиях;
- изучение студентами конструкций узлов и элементов, методов их расчета и конструирования с учетом условий эксплуатации.

В результате изучения учебной дисциплины «Расчет металлоконструкций» студент должен:

### **знать:**

- значение и место знаний в области строительной механики в своей будущей профессии;
- методы расчета балочных, ферменных и рамных конструкций;
- методику теоретических и экспериментальных исследований металлических конструкций и сооружений;
- сортамент и характеристики основных конструкционных материалов, основные документы, регламентирующие проектирование и расчет металлических конструкций;
- особенности проведения испытаний наземных транспортно-технологических машин и их технологического оборудования.

### **уметь:**

- самостоятельно заниматься самообразованием в области строительной механики;
- принимать решения в применении методов расчета и оценке результатов расчета металлических конструкций и сооружений;
- логически и последовательно анализировать влияние внешних воздействий на элементы конструкции;

- составлять планы проведения экспериментальных исследований и методику проведения испытаний металлических конструкций;
- проводить испытаний наземных транспортно-технологических машин и их технологического оборудования.

**владеть:**

- навыками правильного составления расчетных схем металлических конструкций и сооружений;
- методикой расчета металлических конструкций и сооружений и оформления результатов расчета;
- методикой проведения экспериментальных исследований конструкций и их элементов, оформления отчетов о результатах работы;
- навыками составления расчетных схем, уметь пользоваться специальной технической и справочной литературой в области строительной механики;
- методикой обобщения результатов экспериментальных исследований и расчетов.

Освоение данной учебной дисциплины обеспечивает формирование следующих компетенций:

АК-1. Уметь применять базовые научно-теоретические знания для решения теоретических и практических задач.

АК-2. Владеть системным и сравнительным анализом.

АК-3. Владеть исследовательскими навыками.

АК-4. Уметь работать самостоятельно.

АК-5. Быть способным порождать новые идеи (креативность).

АК-6. Владеть междисциплинарным подходом при решении проблем.

АК-8. Обладать навыками устной и письменной коммуникации.

АК-9. Уметь учиться, повышать свою квалификацию в течение всей жизни.

СЛК-5. Быть способным к критике и самокритике (критическое мышление).

СЛК-6. Уметь работать в команде.

СЛК-7. Самостоятельно приобретать и использовать в практической деятельности новые знания и умения, в том числе в новых областях знаний, непосредственно не связанных со сферой деятельности.

Организационно-управленческая деятельность

ПК-1. Работать с юридической литературой и трудовым законодательством;



ПК-2. Организовывать работу малых коллективов исполнителей по производству и эксплуатации для достижения поставленных целей;

ПК-3. Взаимодействовать со специалистами смежных профилей строительного комплекса;

ПК-4. Анализировать и оценивать собранные данные;

ПК-5. Готовить доклады, материалы к презентациям;

ПК-6. Владеть современными средствами инфокоммуникаций.

Проектная (проектно-конструкторская) и научно (экспериментально)-исследовательская деятельность

ПК-7. Владеть методами определения технико-экономических показателей ПТМ и СДМ;

ПК-8. Владеть методами расчета энергетических, кинематических, динамических и силовых параметров ПТМ и СДМ и их проектирования;

ПК-9. Владеть методами контроля параметров машин (ПТМ и СДМ), применяемых в строительном комплексе;

ПК-10. Владеть методами диагностирования и оценки остаточного ресурса конструкций, механизмов и деталей ПТМ и СДМ;

ПК-11. Владеть методами монтажа, наладки, испытаний ПТМ и СДМ, лифтов и подъемников;

ПК-12. Владеть способами оценки и уменьшения вредного влияния ПТМ и СДМ на окружающую среду;

ПК-13. Оценивать патентоспособность технических решений, проводить патентные исследования;

ПК-14. Обеспечивать при проектировании безопасность конструкций ПТМ и СДМ;

Производственно-технологическая и ремонтно-эксплуатационная деятельность

ПК-15. В составе группы специалистов по проектированию ПТМ и СДМ, лифтов и подъемников или самостоятельно разрабатывать перспективный план развития отдельных машин, выполнять технико-экономическое обоснование структурной единицы машины или машины в целом;

ПК-16. Рассчитывать и проектировать ПТМ и СДМ, лифты и подъемники общего и специального назначения, работающих в условиях динамического нагружения в повторно-кратковременном режиме;

ПК-17. Применять теорию, методы расчета и режимы работы ПТМ и СДМ машин при физическом и математическом моделировании процессов;

ПК-18. Осуществлять оптимизацию параметров несущих конструкций, отдельных структурных единиц ПТМ и СДМ с целью снижения их металлоемкости и энергозатрат на изготовление и ремонт;

ПК-19 Разрабатывать техническое задание на проектируемую структурную единицу машины или машину в целом с учетом результатов научно-исследовательских и опытно-конструкторских работ;

ПК-20. Осуществлять авторский надзор за созданием или реконструкцией структурной единицы машины или машины в целом в пределах соответствующей компетенции;

ПК-21. Рассчитывать и анализировать надежность работы машин, агрегатов и комплекса машин с учетом их условий эксплуатации;

ПК-22. Анализировать технологичность процесса производства и ремонта ПТМ и СДМ;

ПК-23. Проводить испытания при подготовке производства, вводе ПТМ и СДМ, лифтов и подъемников в эксплуатацию, а также проводить диагностику при эксплуатации этих машин;

ПК-24. Намечать основные этапы научных исследований по производственно-технологической и ремонтно-эксплуатационной деятельности;

ПК-25. Организовывать работу по подготовке научных статей, сообщений, рефератов и заявок на выдачу охранных документов на объекты промышленной собственности и лично участвовать в ней;

ПК-26. Подготавливать техническую документацию к тендерам, проводить экспертизу тендерных материалов и консультаций заказчиков проектов по этим материалам;

#### Инновационная деятельность

ПК-27. Осуществлять поиск, систематизацию и анализ информации по перспективам развития СДМ и ПТМ, инновационным технологиям, проектам и решениям;

ПК-28. Определять цели инноваций и способы их достижения;

ПК-29. Работать с научной, технической, патентной литературой по ПТМ и СДМ;

ПК-30. Разрабатывать бизнес-планы создания нового оборудования по ПТМ и СДМ;

ПК-31. Оценивать конкурентоспособность и экономическую эффективность разрабатываемого оборудования по ПТМ и СДМ;

ПК-32. Проводить опытно-технологические исследования для создания и внедрения нового оборудования ПТМ и СДМ, его опытно-промышленную проверку и испытания.

### Распределение часов по видам занятий

Название темы	Количество аудиторных часов				
	Лекции	Практические занятия	Лабораторные занятия	Всего	Форма контроля знаний
1	2	3	4	5	6
Тема 1. Кинематический анализ	2	2		4	
Тема 2. Расчет статически определимых стержневых систем при действии неподвижной нагрузки	2	2		4	
Тема 3. Расчет статически определимых стержневых систем при действии подвижной и вращающейся нагрузки	4	4		8	
Тема 4. Определение перемещений элементов конструкций. Расчет статически неопределимых стержневых систем. Матричные методы расчета	6	6		12	
Тема 5. Общие принципы проектирования металлоконструкций	2	2		4	
Тема 6. Материалы металлических конструкций. Усталостная долговечность	4	4		8	
Тема 7. Расчет и проектирование сварных соединений. Болтовые соединения	5	4		9	
Тема 8. Балки. Решетчатые конструкции (фермы). Рамы	5	6		11	
Тема 9. Особенности проектирования металлических конструкций различных машин	4	4		8	
Курсовой проект (работа)	40	16			Защита курсовой работы
Всего	34	34		68	зачет

## 1.2 КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

### Тема 1 КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

#### 1.1.1. Общие задачи строительной механики

Строительная механика – наука о принципах и методах расчета конструкций на прочность, жесткость, устойчивость при статических и динамических воздействиях.

В отличие от сопротивления материалов в курсе строительной механики изучается не отдельный элемент конструкции, а совокупность (система) элементов: стержней, пластин, оболочек.

Проектируемые конструкции должны удовлетворять не только требованиям точности, но и экономичности. Для этого нужны наиболее точные расчеты. Расчет ведется по внешним воздействиям и сопротивлению воздействию этих нагрузок. Внешние воздействия разделяют на силовые, температурные и дислокационные (задаваемые перемещения из-за неточности изготовления, осадки опор и т.д.). Сопротивление представляет собой основную функцию несущей конструкции; оно определяется физическими характеристиками и геометрическими параметрами элементов и их соединений. Воздействия в отличие от сопротивления имеют случайный характер, поэтому в общем случае расчет конструкций является предметом теории надежности с применением вероятностных методов.

Изучая основы строительной механики, будем рассматривать детерминированные воздействия и характеристики сопротивления. При этом будем рассматривать не сами конструкции и даже не их конкретные расчетные схемы, а некоторые объединяющие однотипные расчетные схемы разных конструкций.

#### 1.1.2. Расчетные схемы

Несущие конструкции строительных и дорожных машин (или просто металлоконструкции) отличаются от строительных конструкций, как по характеру действия, так и по характеристикам сопротивления. В процессе работы конфигурация системы не остается постоянной. Меняются при этом внешние нагрузки, как по величине, так и по направлению. Кроме того, металлоконструкции некоторых машин являются многофункциональными. При различном съемном оборудовании могут испытывать качественно различные воздействия.

Металлоконструкции машин работают в динамическом режиме, испытывая переменные во времени напряжения, что приводит к быстрой усталости материала и уменьшению долговечности конструкции.

Для определения прочностных и деформационных свойств несущей конструкции, как правило, рассматривают ее расчетную схему, в которой идеализируют элементы, их соединения, опоры, нагрузку. Например, балки, стойки и другие стержневые элементы конструкции представляют в виде линий, совпадающих с осями этих элементов, нагрузку считают сосредоточенной или распределенной по длине.

Расчетные схемы конструкций могут быть представлены системами различного типа: шарнирно-стержневые, рамные, пластинчатые и др.

Обычно для предварительных расчетов выбирают упрощенную расчетную схему, а для окончательных - более сложную и точную.

**Пример.** Ферма – сварная конструкция (рис.1.1.1,а), узлы которой являются сварными соединениями. Упрощенная расчетная схема (рис.1.1.1,б) – шарнирно-стержневая система. Более точная схема (рис.1.1.1,в) – рама с жесткими узлами.

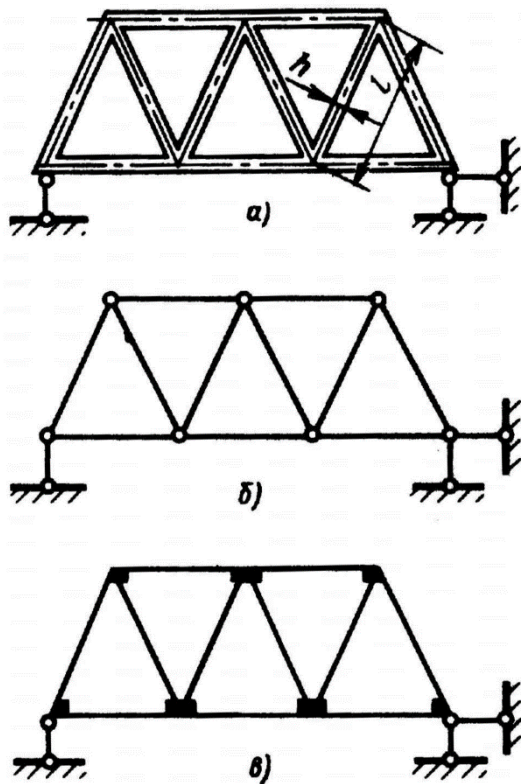


Рис.1.1.1

Если в первом случае расчет может быть выполнен "вручную", то во втором – только при помощи ЭВМ.

Несущие конструкции дорожных машин в основном состоят из стержневых и пластинчатых элементов.

По кинематическим параметрам системы делятся на неизменяемые (изменение формы обуславливается лишь деформацией материала) и изменяемые (изменение формы, в том числе и мгновенное, возможно без деформации материала).

Прежде чем рассчитывать систему на внешние воздействия, необходимо исследовать ее структуру на изменяемость, т.е. выполнить кинематический анализ.

Расчетную схему любой конструкции представляют в виде системы элементов, соединенных между собой. Соединяемые элементы при этом считают абсолютно жесткими телами и называют дисками (в плоских системах) или блоками (в пространственных системах).

Соединяющие элементы называют связями.

Простая связь соединяет два тела, а сложная (кратная) – несколько тел (ее кратность на единицу меньше числа соединяемых тел).

Связь, препятствующую взаимному линейному (поступательному) перемещению тел, называют линейной, а связь, препятствующую взаимному угловому (вращательному) перемещению тел, называют угловой.

Связь, препятствующую взаимному перемещению двух тел в одном направлении, называют элементарной. Связи могут быть односторонними (канат) и двухсторонними (стержень).

Связи, соединяющие тело с землей называют внешними (опорными), а связи внутри системы – внутренними.

Для плоских систем основными жесткими связями являются: стержень (рис. 1.1.2,а) с шарнирами на концах – линейная связь; шарнир (рис. 1.1.2,б) – связь, эквивалентная двум линейным связям; заделка (рис. 1.1.2,в) – связь, эквивалентная трем элементарным связям (препятствует одному угловому и двум линейным перемещениям). На рис. 1.1.2,е-з показаны соответствующие перечисленным связям реакции.

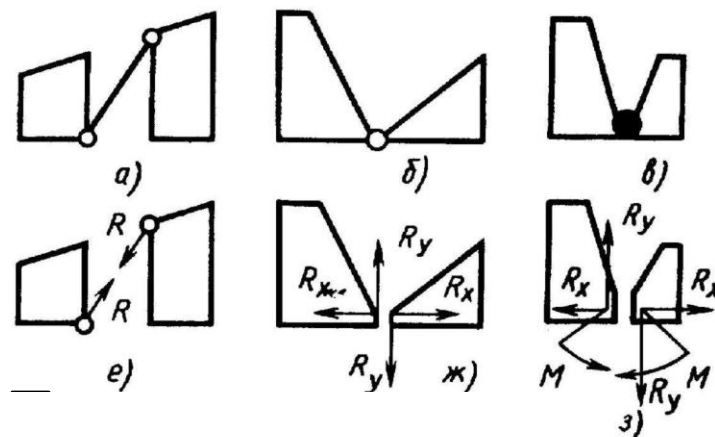


Рис.1.1.2

Определение реакций в связях от внешних нагрузок на систему представляет основную задачу расчета.

### 1.1.3. Степень изменяемости системы

Свойство системы изменять свою форму при отсутствии деформаций в элементах называется ее изменяемостью. При определении степени изменяемости все элементы системы (тела и связи) считают абсолютно жесткими. Каждый диск в плоскости обладает тремя степенями свободы относительно земли или любого другого диска, принимаемого за землю. Этими степенями свободы являются два линейных и одно угловое перемещение (в пространстве шесть степеней свободы).

Каждая элементарная связь отнимает одну степень свободы. Поэтому общее число степеней свободы называют степенью изменяемости системы  $I$  и определяют как разность между степенью свободы всех тел и числом элементарных связей с учетом их кратности. Для плоской системы, прикрепленной к земле

$$I = 3D - C \quad (1.1.1)$$

а для пространственной –

$$I = 6B - C, \quad (1.1.2)$$

где  $D$  - число дисков;  $B$  - число блоков;  $C$  - общее число элементарных связей.

В шарнирно-стержневых системах за соединяемые элементы удобнее принимать узлы, а за соединяющие – стержни. В этом случае для плоской системы, прикрепленной к земле,

$$I = 2U - S, \quad (1.1.3)$$

а для пространственной –

$$I = 3U - S, \quad (1.1.4)$$

где  $U$  - число узлов;  $S$  - число стержней.

Если рассматриваемая система является свободной, т.е. отделенной от земли или в системе земли считается диском, то формулы (1.1.1) – (1.1.4) принимают следующий вид:

$$I = 3D - C - 3; \quad (1.1.5)$$

$$I = 6B - C - 6; \quad (1.1.6)$$

$$I = 2U - S - 3; \quad (1.1.7)$$

$$I = 3U - S - 6; \quad (1.1.8)$$

Например, для свободной плоской системы (рис.1.1.3) по формуле (1.1.7) получаем:

$$I = 2 \cdot 5 - 7 - 3 = 0, \text{ где } U = 5, S = 7.$$

Используя формулу (1.1.5), с учетом кратности шарниров (кратность обозначена цифрами в кружочках) находим:  $I = 3 \cdot 7 - 18 - 3 = 0$ , где  $C = 9 \cdot 2 = 18$ , т.к. каждый шарнир накладывает две элементарных связи.

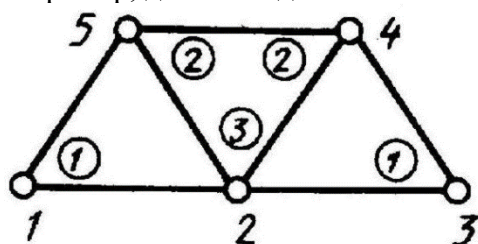


Рис.1.1.3

Если степень изменяемости системы  $I = 0$ , то связей достаточно для того, чтобы при их правильной расстановке хватило для неизменяемости системы.

Если  $I < 0$ , то связей в избытке, если же  $I > 0$ , то связей не хватает и система изменяема.

Признак  $I \leq 0$  является необходимым, но не достаточным для того, чтобы систему считать неизменяемой. Необходимо, кроме того, чтобы эти связи были расставлены в соответствии с определенными правилами образования систем.

Если  $I = 0$  и связи расставлены правильно, то система статически определима (усилия во всех связях могут быть определены из уравнений статики); если же  $I < 0$ , то система статически неопределима, при этом степень статической неопределимости равна числу избыточных (лишних) связей  $n = -I$ .

Формулами (1.1.1) – (1.1.8) удобнее пользоваться, если предварительно представить отдельные части системы в виде укрупненных дисков или блоков.

### 1.1.4. Образование и кинематический анализ систем

Рассмотрим правила образования плоских неизменяемых систем ( $I = 0$ ).

Любой узел, прикрепленный к диску при помощи диады (двух линейных связей, не лежащих на одной прямой), будет неподвижен относительно этого диска (рис.1.1.4,а).

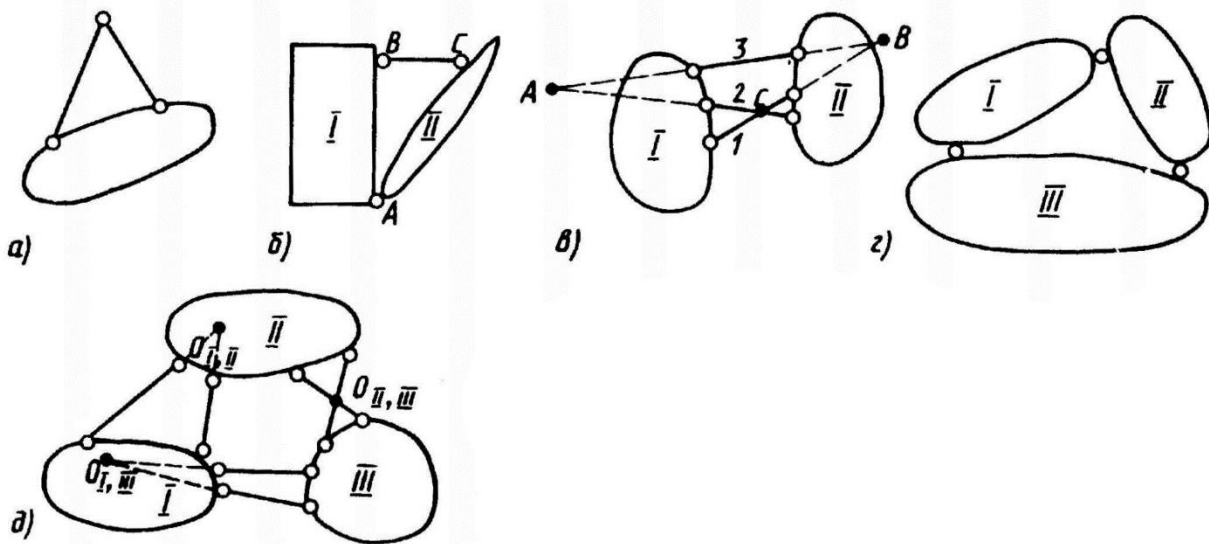


Рис.1.1.4

На основании этого можно заключить, что последовательное присоединение к неизменяемой системе любого числа узлов при помощи диад образует в целом неизменяемую систему. Так можно представить образование фермы, рассмотренной ранее.

Второй путь образования плоской системы основывается на присоединении к диску I другого диска II при помощи трех элементарных связей: шарнира A и стержня BC (рис.1.1.4,б), не проходящего через этот шарнир; либо тремя стержнями – 1, 2, 3, не пересекающимися в одной точке (рис.1.1.4,в).

Два любых стержня, не объединенных общим шарниром, создают в точке пересечения соответствующих прямых мгновенный центр вращения одного диска относительно другого. Этот мгновенный центр вращения выполняет функцию "мгновенного шарнира".

Рассмотрим системы (плоские системы), образованных из трех дисков. Каждый диск соединен с другим при помощи шарнира (рис.1.1.4,г) или двух линейных связей ("мгновенного шарнира") (рис.1.1.4,д).

Если указанные требования о расположении связей между соединяемыми дисками не выполняются, то диски имеют бесконечно малые взаимные перемещения; такие системы называются мгновенно изменяемыми (рис.1.1.5,а, б, в, г, д).

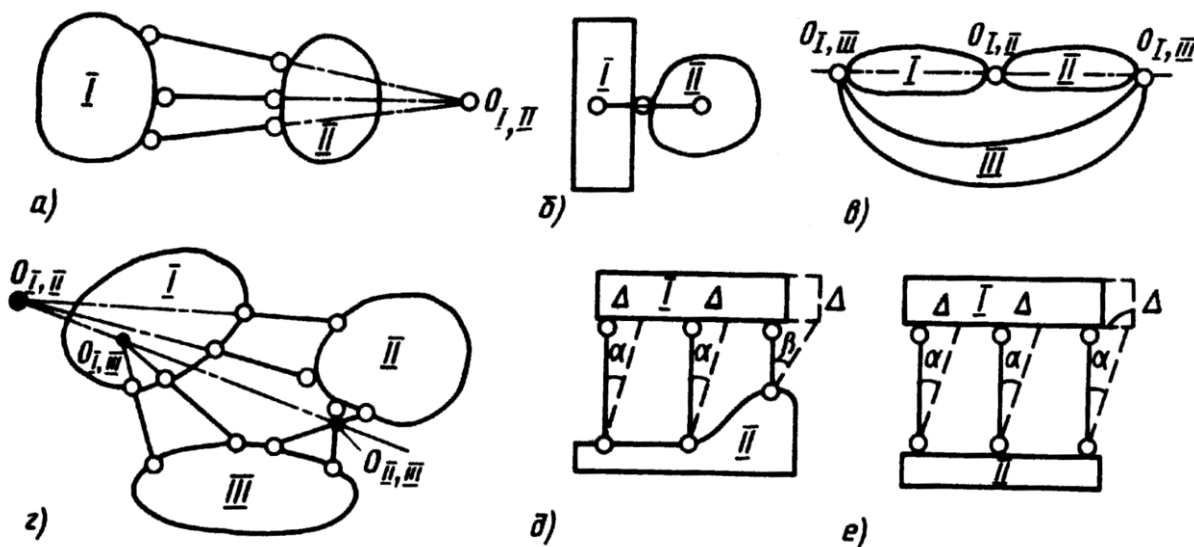


Рис.1.1.5

Следует отличать от "мгновенно изменяемых" систем просто изменяемые системы.

### 1.1.5. Исследование неизменяемых ферм

Ранее было указано, что фермы, имеющие минимально необходимое для обеспечения неизменяемости число стержней могут быть мгновенно изменяемыми. Таким образом, наличие необходимого числа стержней еще не обеспечивает геометрической неизменяемости системы.

Мгновенная изменяемость может быть обнаружена по некоторым признакам. Например, в элементах мгновенно изменяемых систем при действии внешних сил могут возникать бесконечно большие усилия или усилия неопределенной величины.

Можно доказать и обратное положение: если при любой заданной нагрузке усилие в каждом элементе системы имеет вполне определенное значение, а при нулевой нагрузке усилия во всех элементах равны нулю, то система геометрически неизменяема, но только при том условии, что такое решение единственное.

Основанный на последнем признаке способ исследования мгновенной изменяемости системы называется способом нулевой нагрузки.

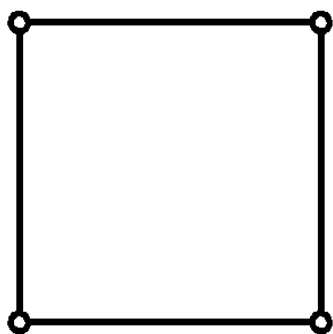


Рис.1.1.8

Применяя способ нулевой нагрузки, необходимо предварительно убедиться в том, что система во всех частях имеет необходимое для неизменяемости число стержней ( $I \leq 0$ ). В противном случае применение этого способа может привести к ошибочным выводам.

Если последовательно рассмотреть равновесие узлов четырехугольника (рис.1.1.8), то усилия в стержнях окажутся нулевыми при отсутствии внешней нагрузки. Тем не менее, система является геометрически изменяемой.

Рассмотрим диск, связанный с землей тремя стержнями (рис.1.1.9,а). Такая система, как известно, геометрически неизменяема.

Докажем, что при действии на диск нулевой нагрузки усилия во всех стержнях равны нулю. Отбросим стержни и заменим их действие реакциями  $R_A, R_B$  и  $R_C$  (рис.1.1.9,б). Составим уравнение моментов всех сил относительно точки  $O_1$  пересечения реакций  $R_A$  и  $R_B$ :  $R_C \cdot r_C = 0$ . Но т.к.  $r_C \neq 0$ , то  $R_C = 0$ .

Аналогично, составив уравнения моментов относительно точек  $O_2$  и  $O_3$ , получаем  $R_B = 0$  и  $R_A = 0$ .

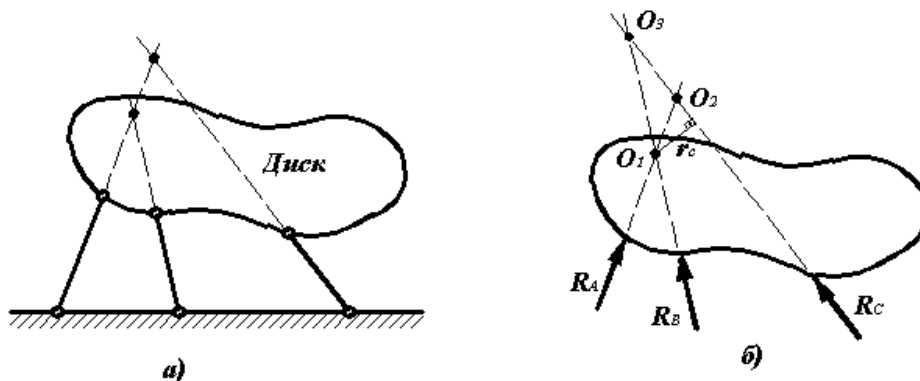
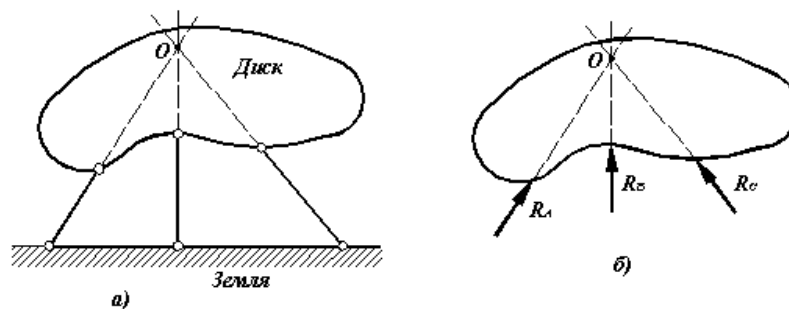


Рис.1.1.9

Рассмотрим теперь другую систему, состоящую из диска, соединенного с землей тремя стержнями, оси которых пересекаются в одной точке  $O$  (рис.1.1.10,а). Отбросим опорные стержни и заменим их действие реакциями  $R_A, R_B$  и  $R_C$  (рис.1.1.10,б).





**Рис.1.1.10**

Составим уравнение моментов относительно точки O:

$$\sum M_0 = R_A r_A + R_B r_B + R_C r_C = 0$$

В этом случае  $r_A = r_B = r_C = 0$ . Остальные два уравнения равновесия (например  $\sum X = 0$ ,  $\sum Y = 0$ ) также дают неопределенные значения реакций. Таким образом, усилия в мгновенно изменяемых системах могут иметь неопределенные значения.

К тому же результату можно прийти, задавшись произвольным значением одной из реакций и разложив ее на две составляющие по направлениям двух других стержней. При этом будут получены две реакции, уравнивающие первую и зависящие от ее величины.

## Тема 2 РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ ПРИ ДЕЙСТВИИ НЕПОДВИЖНОЙ НАГРУЗКИ

### 1.2.1. Общие методы определения сил в связях плоских систем. Основные предпосылки к расчётам.

В статически определимых системах внутренние усилия возникают только от действия внешних сил. Температурные и дислокационные воздействия внутренних сил не вызывают.

При определении внутренних сил  $S$  и перемещений точек  $\Delta$  предполагают, что система обладает упругими свойствами. Справедлива гипотеза малых деформаций, линейная зависимость внутренних сил от деформаций. Такие системы называют линейно деформируемыми.

В этих системах определение внутренних сил и перемещений подчиняется принципу независимости воздействий (принцип суперпозиции). Внутренняя сила  $S$  в  $i$ -ой связи от суммы  $n$  воздействий равна сумме внутренних сил в этой же связи, возникающих от каждого воздействия:

$$S_i \Sigma = S_{i1} + S_{i2} + \dots + S_{ij} + \dots + S_{in}. \quad (1.2.1)$$

Аналогично для перемещений:

$$\Delta_k \Sigma = \Delta_{k1} + \Delta_{k2} + \dots + \Delta_{kj} + \dots + \Delta_{kn}. \quad (1.2.2)$$

Статически определимые неизменяемые системы обладают следующими свойствами:

1) при отсутствии нагрузки все внутренние силы равны нулю (в противном случае система мгновенно изменяема);

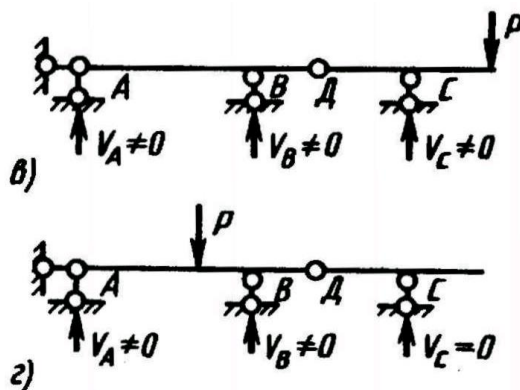
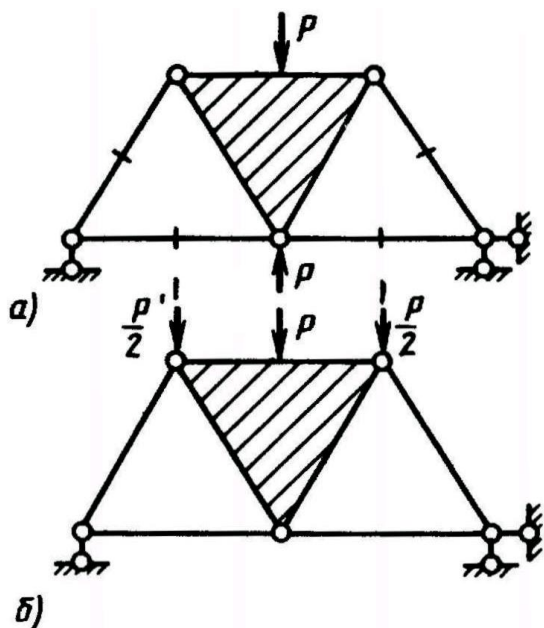


Рис.1.2.1

2) под действием нагрузки усилия в любой связи имеет только одно значение (в противном случае система мгновенно изменяема);

3) если к блоку (диску) приложена уравновешенная система сил, то усилия во внешних связях этого блока (диска) равны нулю (рис.1.2.1,а);

4) усилия во внешних связях блока (диска) не изменятся, если силы заменить их равнодействующими или наоборот, т.е. произвести эквивалентное преобразование нагрузки (рис.1.2.1,б);

5) нагрузка, действующая на дополнительные части системы, передается на главные части, а от последних на дополнительные не передается (рис.1.2.1,в,г), где балка  $AD$  является главной, а балка  $DC$  – дополнительная часть системы ( $V_A, V_B, V_C$  – вертикальные опорные реакции).

### 1.2.2. Статический метод: способ вырезания узлов, способ сечений, способ моментной точки и способ проекций.

Этот способ основан на способе сечений. Любая часть системы, находящейся в равновесии, также находится в равновесии. К отсеченной части можно применять уравнения статики, содержащие как внешние силы, так и искомые внутренние усилия.

Применительно к шарнирно-стержневым конструкциям (фермам) с узловой нагрузкой способ сечений разделяют на способ вырезания узлов и способ моментной точки. Обычно силы в разрезанных стержнях предварительно принимают растягивающими, направляя их от узла. Отрицательный знак в решении говорит о том, что стержень сжат.

Способ вырезания узлов заключается в том, что мысленно вырезают узел, к которому приложены внешние силы (если они есть) и прикладывают продольные силы  $N_i$  в разрезанных стержнях. Для каждого узла составляют два уравнения статики ( $\sum X=0, \sum Y=0$ ). Для всей фермы  $2U$  уравнений, где  $U$ -число узлов.

На основе способа вырезания узлов можно установить следующие признаки нулевых стержней:

- 1) в ненагруженном двухстержневом узле плоской фермы оба стержня являются нулевыми, если они не лежат на одной прямой (рис.1.2.2,а);

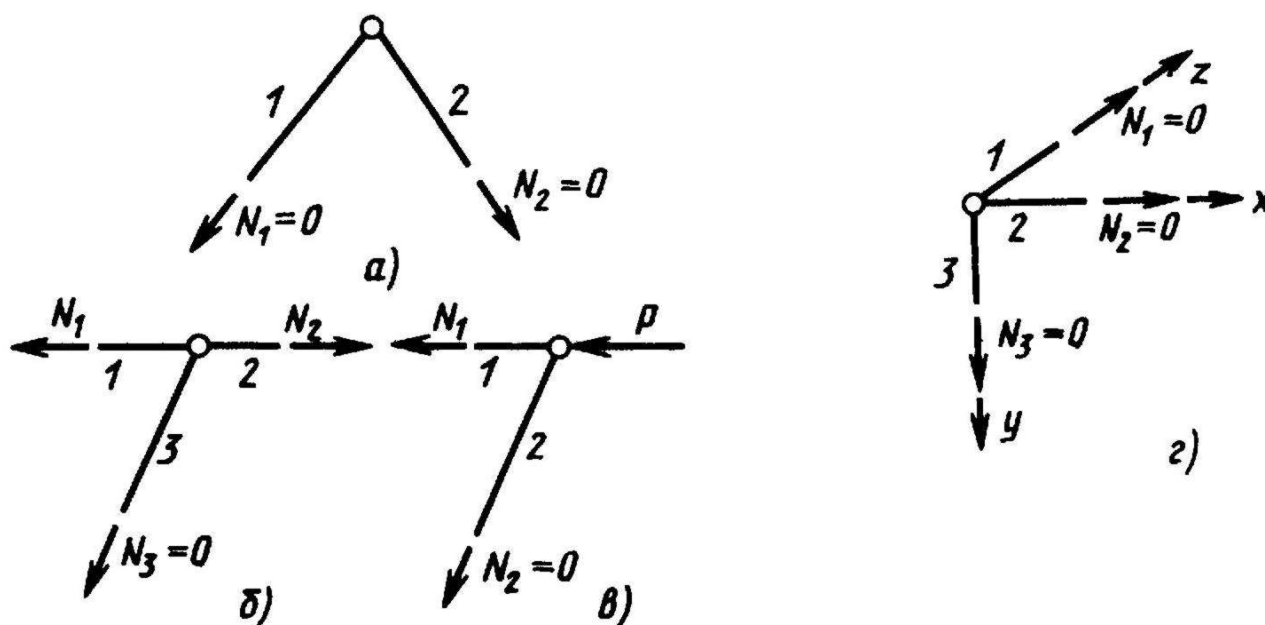


Рис.1.2.2

- 2) если в ненагруженном трехстержневом узле плоской фермы оси двух стержней лежат на одной прямой, то третий стержень является нулевым (рис.1.2.2,б);
- 3) то же, если вместо второго стержня приложена сила  $P$  (рис.1.2.2,в);
- 4) в ненагруженном трехстержневом узле пространственной фермы все стержни нулевые (рис.1.2.2,г).

Способ моментной точки. Систему расчленяют на две части, каждую из которых рассматривают как отдельный диск. Разрез проводят через  $i$ -ый стержень, усилие в котором необходимо определить. Затем для одной из частей фермы составляют уравнение моментов ( $\sum M_{ki}=0$ ), содержащее нагрузку и лишь одну неизвестную силу  $N_i$ . В этом уравнении  $ki$  – моментная точка для  $i$ -го стержня, лежащая на пересечении других разрезанных стержней.

При удалении моментной точки в бесконечность (при параллельности других разрезанных стержней) уравнение моментов «переходит» в уравнение проекций  $\sum Y=0$ , где ось «у» перпендикулярна параллельным разрезанным стержням. В этом случае способ называют *способом проекций*.

### 1.2.3. Основы кинематического метода.

Кинематический метод основан на применении принципа возможных перемещений, который заключается в следующем. Если система находится в равновесии, то сумма работ всех приложенных к ней сил возможных бесконечно малых перемещениях равна нулю. (Возможное перемещение – любое бесконечно малое перемещение, допускаемое связями, наложенными на систему).

Для определения усилия (реакции)  $S$  в  $i$ -й связи ее разрезают (устраняют), а вместо нее прикладывают соответствующие равные и противоположно направленные усилия  $S_i$ . Полученной системе задают возможные перемещения и составляют уравнения работ всех сил, включая усилие  $S$ :

$$\sum_{k=1}^n P_k \Delta_k + S \Delta_s = 0, \quad (1.2.3)$$

где  $P_k$  – внешние силы, действующие на систему;

$\Delta_k$  и  $\Delta_s$  - перемещения точек приложения сил  $P_k$  и  $S$  по направлениям их действия;

$S$  – усилие в устраненной связи.

Наиболее целесообразен кинематический метод для расчета плоских сложных статически определимых систем, когда требуется определить усилие в одной связи. Неизменяемая система при отсутствии лишних связей в случае удаления одной связи превращается в механизм ( $I=0$ ). Все возможные перемещения  $\Delta$  точек механизма необходимо связать между собой одним параметром, который при использовании уравнения (1.2.3) сократится.

При определении перемещений  $\Delta$  в виду их малости точки диска считают перемещающимися не по дуге окружности с центром в мгновенном центре вращения, а по касательной к дуге.

#### 1.2.4. Основы метода замены связей.

По этому методу расчет заданной сложной схемы заменяется расчетом другой, преобразованной (заменяющей) схемы. Последняя должна быть также как и заданная геометрически неизменяемой и статически определимой, но более простой. Ее получают из заданной системы путем замены связей.

Действие устраненных из заданной системы связей заменяется действием неизвестных сил  $X_i$ . Но при этом накладывается условие: суммарное усилие (реакция) в каждой  $j$ -ой введенной связи от действия на систему всех сил (нагрузки  $P$  и неизвестных сил  $X_i$ ) должно быть равно нулю.

При замене только одной связи, это условие имеет вид:

$R_{iP}$  – реакция во введенной связи от действия нагрузки.

$$r_{i1} X_1 + R_{iP} = 0, \quad (1.2.4)$$

где  $r_{i1}$  – реакция во введенной связи от действия  $\bar{X}_1 = 1$ ;

Из уравнения (1.2.4) находят  $X_1$ , а затем внутренние силы  $S_i$  в  $i$ -ой связи в соответствии с принципом независимости действия сил:

$$S_i = \bar{S}_{i1} X_1 + S_{iP}, \quad (1.2.5)$$

где  $\bar{S}_{i1}$  - усилие в  $i$ -ой связи от действия сил  $\bar{X}_1 = 1$  (черточка сверху говорит о том, что сила безразмерная);  $S_{iP}$  - усилие в  $i$ -ой связи от действия нагрузки.

В этом случае расчет преобразованной системы выполняется дважды: отдельно на нагрузку и на силу  $\bar{X}_1 = 1$ . Однако при расчете вручную это гораздо проще, чем выполнять расчет сложной системы (не преобразованной) путем решения системы алгебраических уравнений высокого порядка.

## Тема 3 РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ ПРИ ДЕЙСТВИИ ПОДВИЖНОЙ И ВРАЩАЮЩЕЙСЯ НАГРУЗКИ

### 1.3.1. Теория линий влияния. Основные понятия.

*Подвижной нагрузкой называется группа параллельных сил, неизменных по направлению и взаимному расположению, которая совершает поступательное движение по системе (например, каретка по стреле башенного крана).*

Усилие в любой  $i$ -й связи ( $S_i$ ) системы зависит от положения нагрузки. Невыгоднейшим для ( $i$ -й связи) называется такое положение нагрузки, при котором  $S_i$  принимает экстремальное значение.

Простейшей подвижной нагрузкой является безразмерная единичная сила  $P=1$ . График изменения усилия  $S_i$  (или перемещения  $\Delta_k$ ) от действия единичной силы  $P$  постоянного направления в зависимости от ее положения (координаты  $z$ ) называется линией влияния (л.в.) усилия – л.в.  $S_i$  (или перемещения – л.в.  $\Delta_k$ ).

Линию влияния  $S_i(z)$  строят на базисе, соответствующем грузовой линии – прямой, перпендикулярной направлению действия силы  $P=1$ . Ордината линии влияния  $S_i$  в какой-либо точке  $j$  выражает значение  $S_i$  при положении силы  $P$  на грузовой линии в точке  $j$ . Размерность ординат  $[y]$  линии влияния  $S$  определяется формулой  $[S]/[P]$ , где  $[S]$  – размерность исследуемой величины;  $[P]$  – размерность силы.

Зная линии влияния  $S_i$ , можно, используя принцип независимости действия сил, определить значение  $S_i$  от действия любой системы сил.

Линии влияния строят на основе общих методов определения усилий в связях, которые были изложены ранее.

Линию влияния необходимо отличать от эпюры. Это по существу противоположные друг другу понятия. Ординаты эпюры характеризуют распределение изучаемого фактора (например, изгибающего момента) по различным сечениям балки при неподвижной нагрузке; ординаты же линии влияния, наоборот, характеризуют изменение фактора (например, того же изгибающего момента), возникающего в одном определенном сечении при силе  $P=1$ , перемещающейся по длине балки.

### 1.3.2. Линии влияния опорных реакций.

Пусть по балке на двух опорах перемещается груз  $P=1$  (рис. 1.3.1). Обозначим расстояние от правой опоры до груза через  $z$ . Это расстояние при перемещении груза будет меняться от нуля, когда груз стоит над правой опорой, до  $l$ , когда груз стоит над левой опорой.

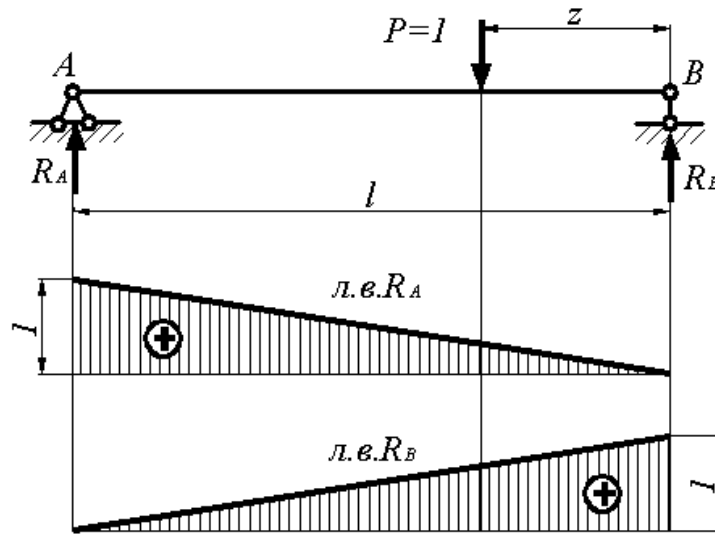


Рис.1.3.1

Определим реакцию  $R_A$  в зависимости от  $z$ . Для этого составим уравнение равновесия:  $\sum M_B = 0; R_A l - Pz = 0$ .

Откуда  $R_A = Pz/l$ . Но, т.к.  $P=1$ , то  $R_A = z/l$ . Этим уравнением устанавливается закон изменения величины реакции  $R_A$  в зависимости от положения груза  $P=1$ . Графически этот закон представлен линией влияния опорной реакции  $R_A$ . Величина  $z$  входит в уравнение в первой степени – зависимость прямолинейная: при  $z=0$   $R_A=0$ ; при  $z=l$   $R_A=1$ . Аналогично строится линия влияния второй опорной реакции  $R_B$ .

Рассмотрим балку на двух опорах с консолями (рис.1.3.2). Очевидно, что уравнения реакций будут такими же, как и в предыдущем случае. Продолжая линии влияния на консоли, получим л.в.  $R_A$  и л.в.  $R_B$ . Отрицательные ординаты означают, что когда груз  $P=1$  находится над ними, реакции  $R_A$  и  $R_B$  отрицательны, т.е. направлены вниз.

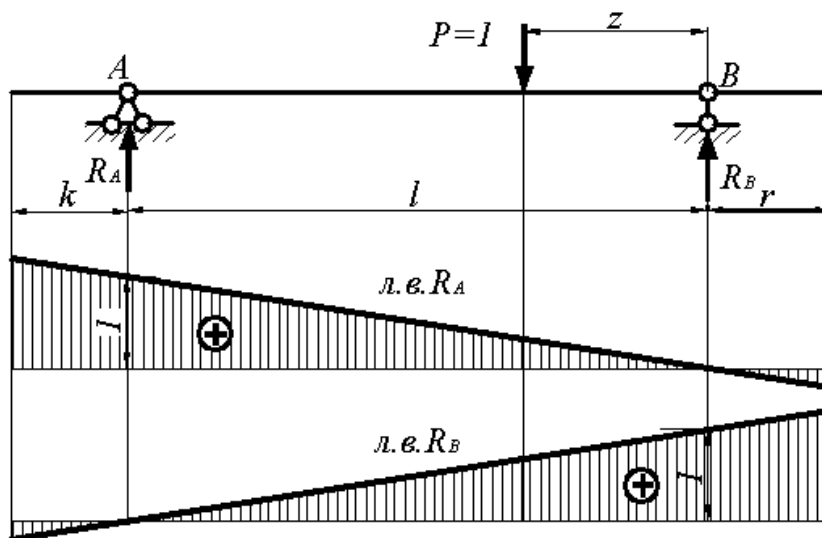


Рис.1.3.2

Построим линии влияния опорных реакций заземленной балки (рис.1.3.1). Для построения линии влияния  $R_A$  составим уравнение суммы проекций сил на вертикальную ось:  $\sum Y = 0; -1 + R_A = 0$ .

Откуда  $R_A = 1$ . Следовательно, при любом положении груза  $P=1$   $R_A = 1$ .

Теперь построим линию влияния Опорного момента  $M_A$  в заделке.

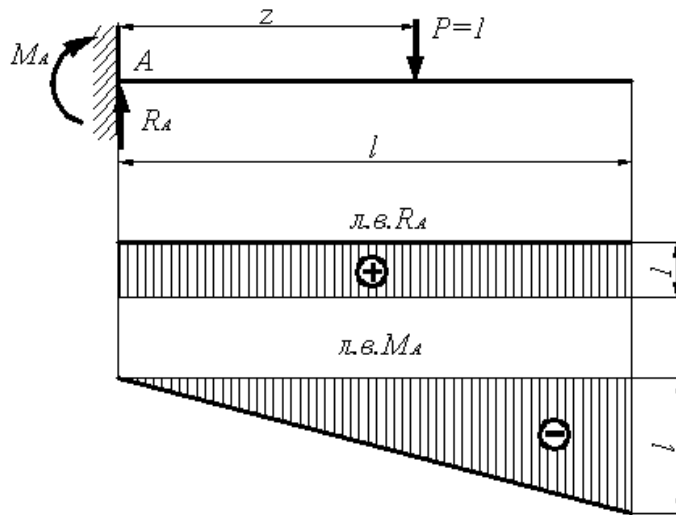


Рис.1.3.3

Из уравнения равновесия  $\sum M_A(F_k) = 0$ ;  $M_A + Pz = 0$  получаем при  $P=1$   $M_A = -z$ . При  $z=0$   $M_A = 0$ ; при  $z=l$   $M_A = -l$ .

Ординаты линии влияния изгибающего момента имеют размерность длины.

### 1.3.3. Линии влияния изгибающих моментов и поперечных сил для однопролетных и консольных балок.

Построим линии влияния изгибающего момента и поперечной силы, возникающих в сечении I простой двухопорной балки (рис.1.3.4).

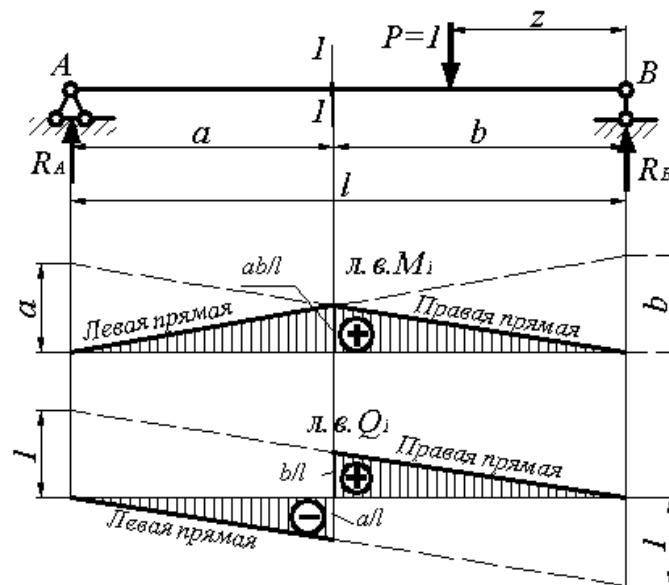


Рис.1.3.4

Изгибающий момент в сечении I равен алгебраической сумме моментов внешних левых сил относительно центра тяжести данного сечения (или сумме моментов внешних правых сил, взятых с обратным знаком). Пока груз находится правее сечения I, т.е. пока  $z \leq b$ , левее сечения I имеется только реакция  $R_A$  и момент в сечении равен  $M_I = R_A a$ . Следовательно, линия влияния  $M_I$  может быть получена из линии влияния  $R_A$  путем умножения ординат последней на  $a$ . Подставив значение  $R_A = z/l$ , получим  $M_I = za/l$ . Для построения графика вычислим два значения  $M_I$ : при  $z=0$   $M_I = 0$ ; при  $z=b$   $M_I = ab/l$ . По этим данным строим правую прямую л.в.  $M_I$ . Ее

ординаты дают значения изгибающего момента в сечении I, когда груз  $P = 1$  расположен справа от этого сечения, т.е. при  $z \leq b$ .

Когда груз расположен левее сечения I, т.е. при  $z \geq b$ , для определения  $M_I$  удобнее рассматривать правую часть балки. Тогда  $M_I = R_B b$ , где  $R_B = (l - z)/l$ , т.е.  $M_I = (l - z)b/l$ . Вычисляем два значения  $M_I$ : при  $z = b$   $M_I = (l - b)b/l = ab/l$ ; при  $z = l$   $M_I = (l - l)b/l = 0$ . По этим данным строится левая прямая л.в.  $M_I$ . Ее ординаты дают значения изгибающего момента в сечении I, когда груз  $P = 1$  расположен слева от этого сечения.

Правая и левая прямые пересекаются под сечением I. Если продолжить прямые, ограничивающие л.в.  $M_I$  до вертикалей, проведенных через опоры A и B, то эти прямые отсекут на левой опоре ординату  $a$ , а на правой -  $b$ . Это можно показать подстановкой в выражение для правой части л.в.  $M_I$   $z = l$ , а для левой  $z = 0$ .

Поэтому практически линию влияния  $M_I$  можно построить следующим образом: на левой опорной вертикали откладывают вверх ординату, равную в принятом масштабе расстоянию от сечения I до левой опоры и проводят прямую через вершину этой ординаты и нулевую точку на правой опоре; на правой опорной вертикали откладывают в масштабе расстояние от сечения I до правой опоры и проводят прямую через вершину этой ординаты и нулевую точку на левой опоре. Проведенные таким образом прямые пересекаются под сечением I.

Ордината л.в.  $M_I$  дает числовую величину изгибающего момента в сечении I, когда груз  $P = 1$  расположен над этой ординатой.

*Для получения закона изменения изгибающего момента в каком-либо другом сечении, необходимо построить свою линию влияния.*

Построим теперь линию влияния поперечной силы  $Q_I$ , возникающей в сечении I. Поперечная сила  $Q_I$  равна алгебраической сумме проекций внешних левых сил (или сумме правых сил с обратным знаком) на нормаль к оси балки.

Рассмотрим два положения груза  $P = 1$ . Первое – груз расположен правее сечения I ( $z \leq b$ ). Рассматриваем равновесие левой части и находим  $Q_I = R_A = z/l$ . Строим по двум точкам: при  $z = 0$   $Q_I = 0$ ; при  $z = b$   $Q_I = b/l$ . По этим точкам строим правую прямую линии влияния  $Q_I$ . Второе положение груза – груз расположен левее сечения I, т.е.  $z \geq b$ . Из условия равновесия правой части балки получаем:  $Q_I = -R_B = -(l - z)/l$ . Вычисляем: при  $z = b$   $Q_I = -(l - b)/l = -a/b$ ; при  $z = l$   $Q_I = -(l - l)/l = 0$ . По этим двум точкам строим левую прямую линии влияния  $Q_I$ . Если продолжить прямые, ограничивающие линии влияния  $Q_I$  до опор, то получим под левой опорой ординату  $+1$ , а под правой опорой  $-1$ . Таким образом, линии влияния  $Q_I$  представляют собой две параллельные прямые, имеющие в сечении I скачок на  $1$  ( $b/l + a/l = l/l = 1$ ).

Чтобы получить числовое значение поперечной силы в сечении I при заданном положении груза  $P = 1$ , надо измерить ординату линии влияния  $Q_I$  под грузом.

Построим линии влияния изгибающего момента и поперечной силы в сечении I заземленной балки, изображенной на рис. 1.3.5.

Строим линию влияния  $M_I$ . Если груз находится левее сечения I, то  $M_I = 0$ . Если груз находится правее сечения I, то  $M_I = -1 \cdot z$ . При  $z = 0$   $M_I = 0$ ; при  $z = b$   $M_I = -b$ . По этим данным строим линию влияния  $M_I$ .

Строим линию влияния  $Q_I$ . Если груз находится левее сечения I, то  $Q_I = 0$ , так как справа нет никаких сил, уравновешивающих  $P = 1$ . Если груз находится правее сечения I, то  $M_I = -1 \cdot z$ . При  $z = 0$   $M_I = 0$ ; при  $z = b$   $M_I = -b$ . По этим данным строим линию влияния  $Q_I$ .



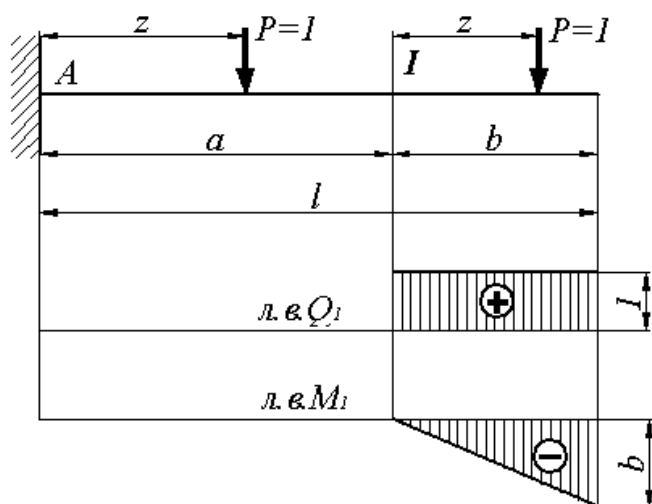


Рис. 1.3.5

### 1.3.4. Линии влияния для шарнирной балки

Груз, расположенный на вспомогательной балке, влияет на усилия, возникающие в основной балке. Груз, расположенный на основной балке, не передает своего действия на вспомогательную балку. Рассмотрим систему (рис.1.3.7), состоящую из основной балки  $dcde$  и вспомогательных балок  $ab$  и  $ef$ .

Когда груз перемещается по вспомогательной балке  $ef$ , линии влияния опорных реакций  $R_E$  и  $R_F$  имеют такой же вид, как и для простой балки. При расположении груза на основной балке опорные реакции  $R_E$  и  $R_F$  равны нулю.

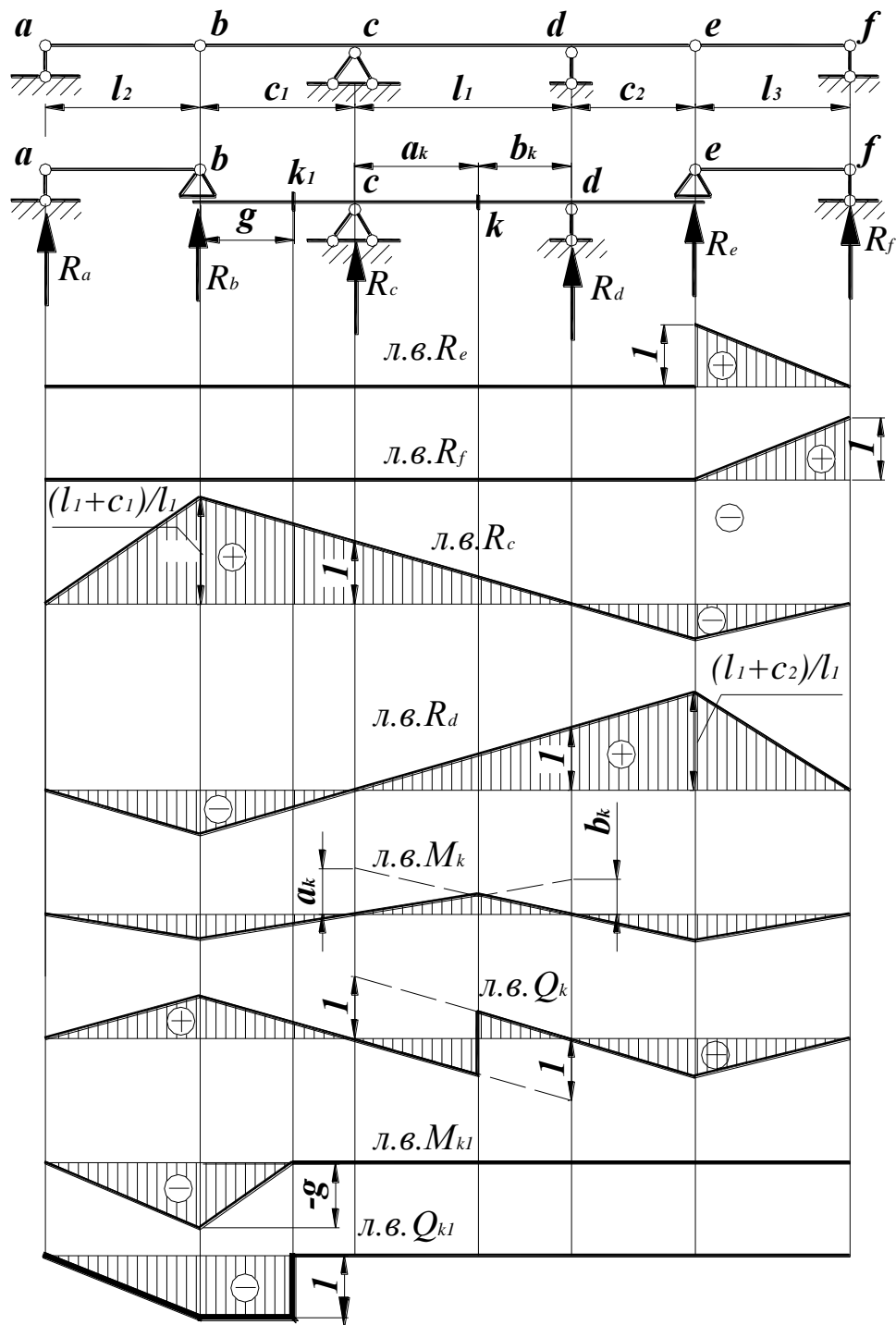


Рис.1.3.7

Линии влияния опорных реакций  $R_C$  и  $R_D$  при перемещении груза по основной балке такие же, как и для двухконсольной балки. Когда же груз расположен на вспомогательных балках  $ab$  и  $ef$ , то опорные реакции  $R_C$  и  $R_D$  изменяются в зависимости от реакций  $R_E$  и  $R_B$  в шарнирах  $e$  и  $b$  соответственно. При этом  $R_C = (l_1 + c_1)/l_1$ ,  $R_D = (l_1 + c_2)/l_1$ . При расположении груза на подвесной балке  $ef$  воздействие на главную балку выразится опорным давлением  $R_E = (1 \cdot z)/l_3$ , а давление в шарнире  $b$  -  $R_B = (1 \cdot z)/l_2$ .

Линия влияния изгибающего момента в сечении  $k$  определяется так же, как и для двухконсольной балки. При расположении груза  $P=1$  правее сечения  $k$   $M_k = R_C a_k$ , левее -  $M_k = R_D b_k$ . При движении груза по вспомогательным балкам  $ab$  и  $ef$  его воздействие будет передаваться на основную балку через давление в шарнирах  $R_E$  и  $R_B$ .

Построим линию влияния поперечной силы  $Q_k$  в сечении  $k$ . При движении груза  $P = 1$  правее сечения  $k$   $Q_k = R_C$ , левее –  $Q_k = -R_D$ .

Построим линии влияния  $M_{k_1}$  и  $Q_{k_1}$ . При движении груза  $P = 1$  по основной балке, когда груз расположен правее сечения  $k_1$ ,  $M_{k_1} = 0$ . При расположении груза левее сечения  $k_1$  на расстоянии  $d$   $M_{k_1} = -1 \cdot d$ . При движении груза по подвесной балке  $ab$   $M_{k_1}$  зависит от изменения давления в шарнире  $b$ . Так как  $R_B = z/l_2$ , то  $M_{k_1} = -zd/l_2$ ; при  $z = 0$   $M_{k_1} = 0$ , при  $z = l_2$   $M_{k_1} = -d$ .

При движении груза справа от сечения  $k_1$   $Q_{k_1} = 0$ , а при движении груза левее сечения  $k_1$  по консоли основной балки  $Q_{k_1} = -1$ . При движении груза по подвесной балке  $ab$  л.в.  $Q_{k_1}$  подчиняется линейному закону, изменяясь от значения  $Q_{k_1} = -1$  на конце консоли до нуля над опорой  $a$ .

### 1.3.5. Линии влияния при узловой передаче нагрузки.

В конструкциях часто встречаются случаи, когда подвижная нагрузка передается на главную балку только в определенных местах (узлах) посредством других балок.

На рис. 1.3.8,а показана двухопорная балка  $AB$ , воспринимающая нагрузку, приложенную к вспомогательным однопролетным балкам 1-2, 2-3, 3-4, ... через поперечные балочки.

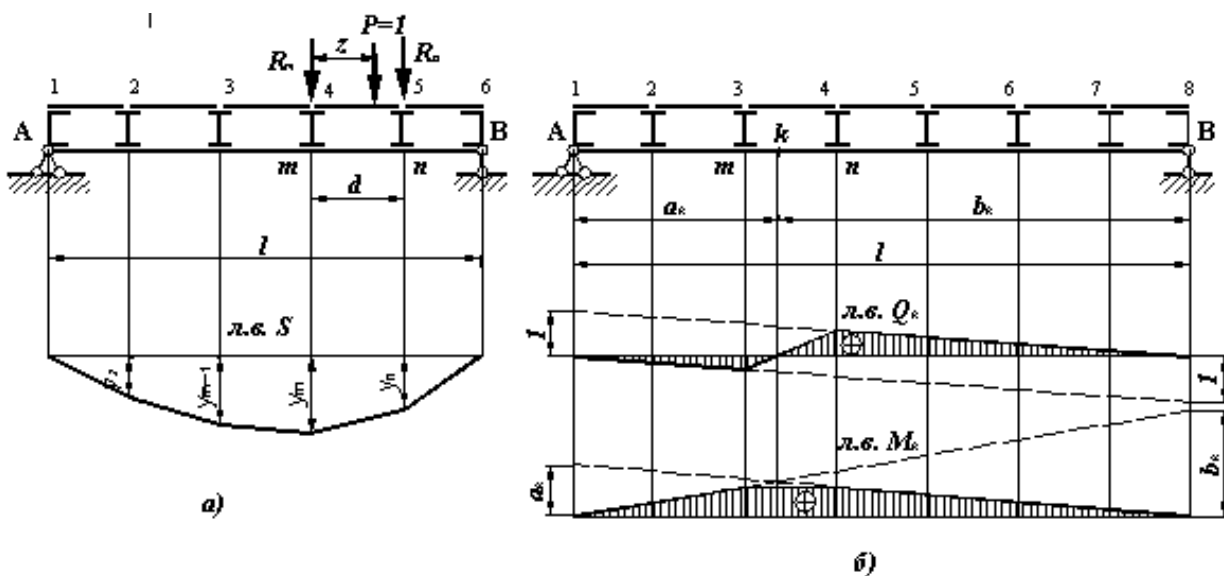


Рис.1.3.8

На величину опорных реакций  $R_A$  и  $R_B$  главной балки узловая передача нагрузки влияния не оказывает. Линии влияния поперечных сил и изгибающих моментов в сечениях, совпадающих с узлами, будут такими же, как и при непосредственной передаче нагрузки на главную балку. Когда же груз расположен в пределах, например, панели  $m-n$ , то его воздействие на главную балку передается в узлах  $m$  и  $n$ , в виде опорных давлений  $R_m = 1 \cdot (d-z)/d$  и  $R_n = 1 \cdot z/d$  от вспомогательной балки ( $d$  - длина панели).

Величина  $S$  (изгибающий момент, поперечная сила), вызываемая единичным грузом  $P = 1$  от действия на главную балку в узлах сил  $R_m$  и  $R_n$  равна

$$S = R_m y_m + R_n y_n = \frac{d-z}{d} y_m + \frac{z}{d} y_n, \quad (1.3.1)$$

где  $y_m, y_n$  - ординаты л.в. под узлами.

Полученное выражение для  $S$  представляет собой уравнение прямой, соединяющей концы ординат  $y_m$  и  $y_n$ : при  $z = 0$   $S = y_m$ ; при  $z = d$   $S = y_n$ .

Следовательно, л.в.  $S$  для главной балки при движении груза между узлами есть прямая, соединяющая вершины узловых ординат  $y_m$  и  $y_n$ . Эта прямая называется *передаточной прямой*.

### 1.3.6. Кинематический метод построения линий влияния.

Этот метод основан на принципе возможных перемещений, согласно которому для системы твердых тел, находящихся в равновесии, сумма работ всех сил, действующих на систему, на всяком бесконечно малом возможном перемещении равна нулю.

Кинематический метод определения реакций связей основан на использовании законов равновесия изменяемых систем. Так как в этом случае геометрически неизменяемая система путем устранения из нее необходимой связи, реакция которой определяется, превращается в систему с одной степенью свободы (т.е. механизм). Реакция связи прикладывается к этой изменяемой системе, как внешняя сила.

Если нужно построить линию влияния опорной реакции балки, то необходимо отбросить данный опорный стержень и заменить его действие соответствующей силой. При построении л.в. поперечной силы в сечение балки вводится ползун, а для замены нарушенных связей к концам сечений прикладываются две равные, но противоположно направленные сосредоточенные силы. Для построения л.в. изгибающего момента в каком-либо сечении балки необходимо в это сечение ввести шарнир, а жесткое соединение компенсировать двумя равными, но противоположно направленными моментами.

Для построения л.в. опорной реакции опоры  $A$  двухопорной балки (рис.1.3.9) действие отброшенной связи заменено силой  $R_A$ . Задаемся возможным перемещением в направлении  $R_A$  (противоположном  $P = 1$ ). Перемещения можно принять в виде малых вертикальных отрезков прямых, перпендикулярных к оси балки.

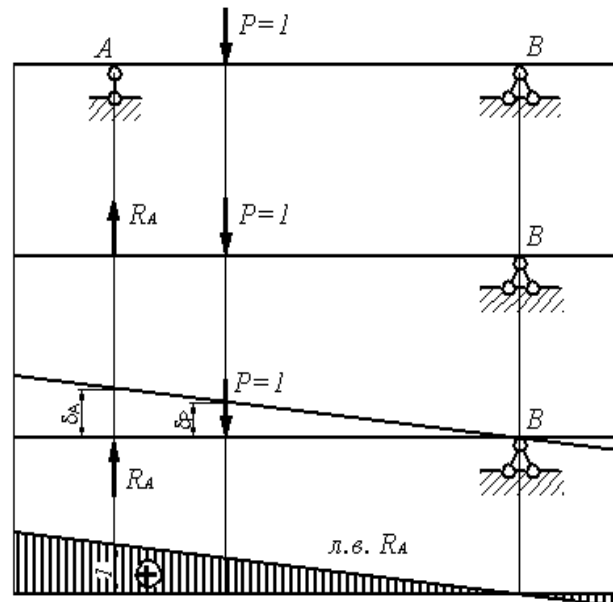


Рис.1.3.9

На основании принципа возможных перемещений сумма работ

$$-P\delta_P + R_A\delta_A = 0.$$

Откуда  $R_A = P\delta_P/\delta_A$  и при  $P = 1$   $R_A = \delta_P/\delta_A$ .

При движении единичного груза  $P = 1$  по балке перемещение  $\delta_P$  будет соответственно меняться. Следовательно, искомая реакция  $R_A$  будет изменяться пропорционально  $\delta_P$ , т.е. ординаты возможных малых перемещений в некотором масштабе будут ординатами л.в.  $R_A$ . При размещении груза  $P = 1$  над опорой  $A$   $\delta_P = \delta_A$ , и ордината л.в.  $R_A = 1$ .

Для построения линии влияния изгибающего момента необходимо разрезать балку (рис.1.3.10) в исследуемом сечении  $k$ , ввести в нее в этом сечении шарнир и приложить дополнительно два равных, но противоположно направленных момента  $M_k$ .

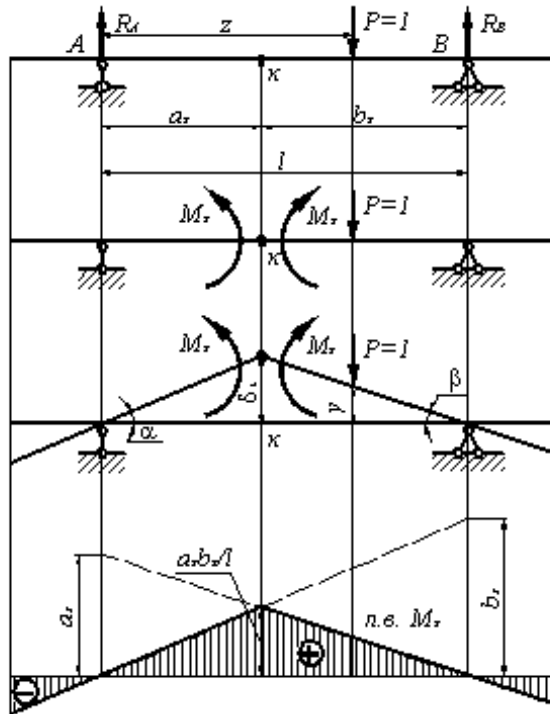


Рис.1.3.10

Малые возможные перемещения в системе определяются поворотом левой части балки вокруг опорной точки  $a$  против часовой стрелки на угол  $\alpha = \delta_k / a_k$ , а правой части – вокруг опорной точки  $b$  на угол  $\beta = \delta_k / b_k$  по часовой стрелке.

Возможное перемещение единичной силы  $P = 1$  определяется величиной  $y$ .

Согласно принципу возможных перемещений сумма работ на возможных перемещениях системы равна нулю:

$$M_k \frac{\delta_k}{a_k} + M_k \frac{\delta_k}{b_k} - Py = 0,$$

откуда при  $P = 1$   $M_k = \frac{1 \cdot y a_k b_k}{\delta_k l}$ .

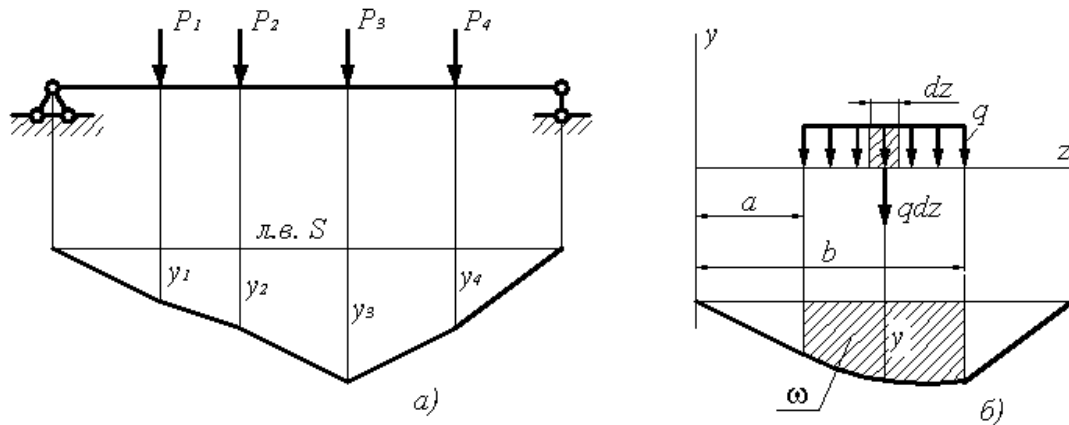
Ординаты возможных перемещений  $y$  имеют размерность длины. При расположении груза  $P = 1$  над сечением  $k$   $y = \delta_k$  и ордината л.в.  $M_k$  над сечением  $k$  будет равна  $a_k b_k / l$ .

### 1.3.7. Определение невыгоднейшего нагружения линий влияния.

Пусть необходимо определить значение  $S$  от действия сосредоточенных грузов  $P_1, \dots, P_n$ , если известна линия влияния  $S$  (рис.1.3.11,а). При действии груза  $P_1$  величина  $S_1 = P_1 y_1$ , при действии груза  $P_2$  –  $S_2 = P_2 y_2$  и т.д. Суммарное значение  $S$  при действии всех грузов

$$S = P_1 y_1 + P_2 y_2 + \dots + P_n y_n = \sum_{i=1}^n P_i y_i. \tag{1.3.2}$$

Определим теперь значение  $S$  от действия равномерно распределенной нагрузки  $q$  ( $H/m$ ) (рис.1.3.11,б).



**Рис.1.3.11**

Бесконечно малую часть нагрузки на длине  $dz$  можно принять как сосредоточенную, равную  $q dz$ . Пусть кривая, изображенная на рис.1.3.11,б, представляет собой л.в.  $S$ . Суммарное значение от действия равномерно распределенной нагрузки

$$S = \int_a^b qy dz = q \int_a^b y dz = q\omega, \quad (1.3.3)$$

где  $\omega = \int_a^b y dz$  - площадь, ограниченная л.в. загруженного участка.

Для прямолинейного участка линии влияния (рис.1.3.12) вычисление  $S = \sum_{i=1}^n P_i y_i$  можно заменить умножением равнодействующей  $R$  данной системы сил на ординату  $y_0$  л.в., соответствующую  $R$ . Момент равнодействующей системы сил относительно точки  $O$  равен сумме моментов составляющих сил относительно той же точки

$$Rz_0 = \sum_{i=1}^n P_i z_i = P_1 z_1 + P_2 z_2 + P_3 z_3 + P_4 z_4,$$

где  $z_0 = y_0 \operatorname{ctg} \alpha$ ,  $z_1 = y_1 \operatorname{ctg} \alpha$ , и т.д.

Откуда  $Ry_0 \operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{ctg} \alpha \sum_{i=1}^n P_i y_i$  или  $Ry_0 = \sum_{i=1}^n P_i y_i$ .

При определении невыгоднейшего нагружения л.в., то есть когда искомая величина  $S$  имеет наибольшее значение, рассмотрим наиболее распространенный случай – случай треугольной л.в.

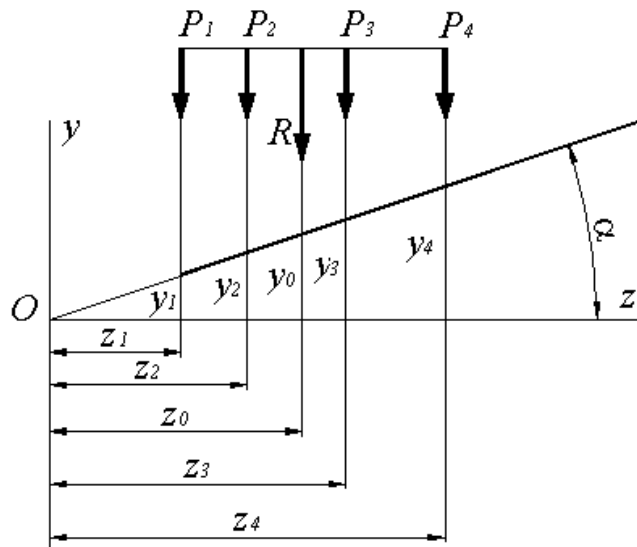


Рис.1.3.12

Пусть имеется система связанных сосредоточенных грузов  $P_1, \dots, P_7$ , действующих на балку, и соответствующая л.в.  $S$  (рис.1.3.13).

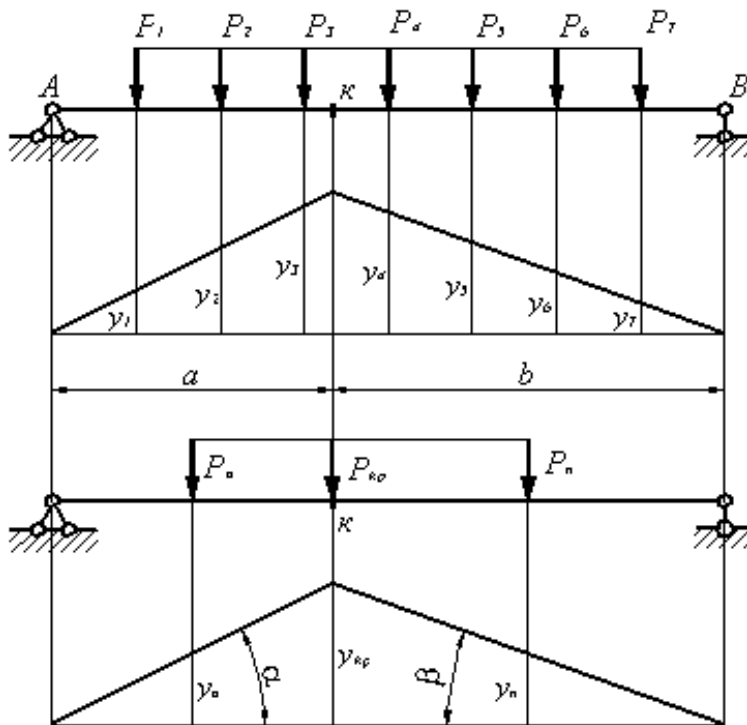


Рис.1.3.13

### 1.3.8. Построение линий влияния усилий в стержнях простейших ферм.

Передача нагрузки на ферму производится в узлах-шарнирах, т.е. имеет место узловой способ передачи нагрузки.

Рассмотрим два способа построения л.в. плоской фермы (рис.1.3.14): способ моментной точки; способ проекций.

**Способ моментной точки.** Построим л.в.  $N_{7-9}$ . Для этого проведём разрез I-I. Когда груз  $P=1$  находится правее узла 8 (движение происходит по верхнему поясу), удобнее рассматривать равновесие левой отсечённой части фермы, т.к. на неё действует меньшее число сил, чем на правую.

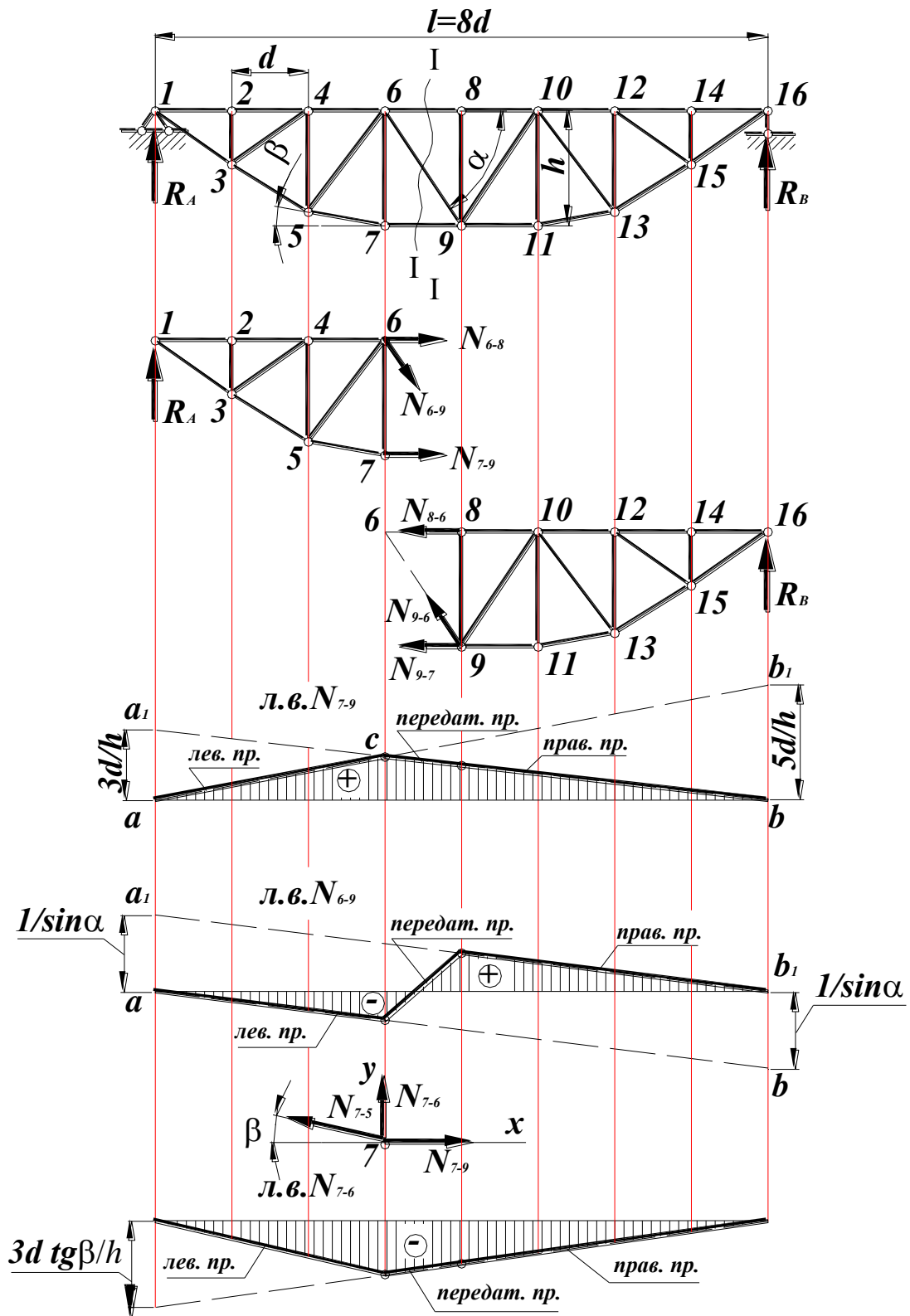


Рис.1.3.14

Применим способ моментной точки. Составим уравнение:

$$\sum M_6 = 0;$$

$$R_A \cdot 3d - N_{7-9} \cdot h = 0.$$

$$\text{Откуда } N_{7-9} = \frac{3 \cdot R_A \cdot d}{h}.$$

При положении груза  $P=1$  на правой части фермы, усилие  $N_{7-9}$  равно левой опорной реакции  $R_A$ , умноженной на постоянный коэффициент  $3d/h$ . Одновременно отметим, что  $3R_A d$  численно



равно изгибающему моменту  $M_6^0$  в простой балке с абсциссой, равной абсциссе моментной точки б.

Л.в. усилия  $N_{7-9}$  (когда груз  $P=I$  расположен правее узла 8) представляет собой л.в. опорной реакции  $R_A$  с ординатами, умноженными на  $3d/h$ . Поэтому для её построения отложим на оси отсчёта вверх на левой опорной вертикали ординату, равную  $3d/h$ , и соединим прямой её вершину с нулевой точкой на правой опорной вертикали. В результате получим прямую  $a_1b$ .

На построенную таким образом прямую, называемую правой прямой, сносим правые узлы 8, 10, 12, 14 и 16. Заштриховываем л.в. на участке 8...16.

При грузе  $P=I$ , расположенном левее узла 6, усилие в стержне 7-9 может быть найдено из уравнения для правой части фермы:

$$\begin{aligned}\sum M_6 &= 0; \\ -R_B \cdot 5d + N_{7-9} \cdot h &= 0. \\ \text{Откуда } N_{7-9} &= \frac{5 \cdot R_B \cdot d}{h}.\end{aligned}$$

Т.е. усилие в стержне 7-9 равно реакции  $R_B$ , увеличенной в  $5d/h$  раз. Произведение  $5R_B d$  численно равно изгибающему моменту  $M_6^0$  простой балки в сечении с абсциссой, равной абсциссе моментной точки б.

Л.в.  $N_{7-9}$  для груза  $P=I$ , расположенного левее узла 6, строится следующим образом: от оси отсчёта вверх на правой опорной вертикали откладывается ордината, равная  $5d/h$ , после чего её вершина соединяется с нулевой точкой на левой опорной вертикали (прямая  $b_1a$ ). Построенная таким образом прямая носит название левой прямой, на эту прямую сносятся левые узлы фермы 1, 2, 4 и 6. Заштриховываем л.в. на участке между узлами 1 и 6.

Т.к. усилие  $N_{7-9}$  определяется формулой  $N_{7-9} = M_6^0/h$ , то его л.в. может быть получена из л.в. изгибающего момента простой балки (для сечения, проходящего через моментную точку) умножением всех её ординат на коэффициент  $1/h$ . Поэтому прямые  $b_1a$  и  $a_1b$  (левая и правая), соединяющие вершины опорных ординат с нулевыми точками на противоположных опорах, пересекаются друг с другом под моментной точкой (в точке С).

Передаточная прямая, соответствующая движению груза  $P=I$  между узлами 6 и 8 рассечённой панели, в данном случае совпадает с продолжением правой прямой л.в.

Последовательность операций при построении л.в. усилий в стержнях фермы на двух опорах способом моментной точки:

- 1) при построении правой прямой следует отложить от оси отсчёта на левой опорной вертикали (вверх или вниз, в зависимости от знака) ординату  $a/h$ , где  $a$  – расстояние от моментной точки до левой опорной вертикали,  $h$  – плечо определяемого усилия относительно моментной точки;
- 2) вершину опорной ординаты соединить с нулевой точкой на правой опорной вертикали;
- 3) на построенную таким образом правую прямую снести правые узлы фермы;
- 4) найти на правой прямой точку пересечения её с левой прямой, для чего моментную точку снести на правую прямую;
- 5) точку пересечения правой и левой прямых соединить с нулевой точкой на левой опорной вертикали;
- 6) на построенную таким образом левую прямую снести левые узлы фермы;
- 7) вершины узловых ординат рассечённой панели соединить передаточной прямой.

**Способ проекций.** Построим л.в. усилия в раскосе фермы 6-9. Когда груз  $P=I$  расположен между узлами 8 и 16 (движение происходит по верхнему поясу), рассматриваем равновесие левой отсечённой части фермы. Составим уравнение проекций всех сил на вертикальную ось:

$$\sum Y = 0;$$

$$R_A - N_{6-9} \cdot \sin \alpha = 0.$$

$$\text{Откуда } N_{6-9} = \frac{R_A}{\sin \alpha}.$$

При грузе, расположенном между узлами 1 и 6, рассматриваем условие равновесия правой части фермы.

$$\sum Y = 0;$$

$$R_B + N_{6-9} \cdot \sin \alpha = 0.$$

$$\text{Откуда } N_{6-9} = -\frac{R_B}{\sin \alpha}.$$

Формулы для усилия  $N_{6-9}$  показывает, что пока груз расположен на правой части фермы, л.в.  $N_{6-9}$  может быть получена умножением ординат л.в.  $R_A$  на  $1/\sin \alpha$ ; когда же груз находится в пределах левой части фермы, то  $N_{6-9}$  равна опорной реакции  $R_B$ , умноженной на  $-\frac{1}{\sin \alpha}$ .

Для построения правой прямой откладываем от оси отсчёта на левой опорной вертикали ординату  $1/\sin \alpha$  и соединяем её вершину с нулевой точкой правой опорной вертикали (прямая  $a_1b$ ). На построенную прямую сносим узлы 8, 10, ..., 16.

Для построения левой прямой от оси отсчёта на левой опорной вертикали откладываем вниз ординату  $1/\sin \alpha$  и соединяем её вершину с нулевой точкой правой опорной вертикали. На построенную левую прямую (прямая  $ab_1$ ) сносим левые узлы 1, 2, 4 и 6.

Передаточная прямая соединяет вершины узловых ординат расчётной панели.

Заметим, что и в этом случае правая прямая пересекается с левой под моментной точкой (которая находится в бесконечности, т.к. прямые параллельны между собой).

Л.в.  $N_{6-9}$  имеет участки с положительными и отрицательными значениями ординат. Следовательно, при движении груза по ферме стержень может быть сжат или растянут.

Построим теперь л.в. усилия  $N_{6-7}$  в стойке. В этом случае способ моментной точки не применим, т.к. приходится рассекать ферму сечением, в которое попадают четыре стержня.

В этом случае лучше воспользоваться способом вырезания узлов. Вырезав узел 7, составим для него уравнение равновесия:

$$\sum Y = 0;$$

$$N_{7-6} + N_{7-5} \cdot \sin \beta = 0.$$

$$\text{Откуда } N_{7-6} = -N_{7-5} \cdot \sin \beta.$$

Так как груз  $P=I$  к узлу 7 непосредственно не прикладывается (он движется по верху фермы), то полученная зависимость между усилиями  $N_{7-6}$  и  $N_{7-5}$  сохраняется при любом положении груза в пределах пролёта фермы. Поэтому л.в.  $N_{7-6}$  может быть получена из л.в.  $N_{7-5}$  умножением всех её ординат  $(-\sin \beta)$ . Но усилие  $N_{7-5}$  пока неизвестно. Для его определения спроецируем силы, действующие на узел 7, на горизонтальную ось:

$$\sum X = 0;$$

$$N_{7-9} - N_{7-5} \cdot \cos \beta = 0.$$

$$\text{Откуда } N_{7-5} = \frac{N_{7-9}}{\cos \beta}.$$

$$\text{Поэтому } N_{7-6} = -N_{7-5} \cdot \sin \beta = -N_{7-9} \cdot \operatorname{tg} \beta.$$

Т.о., л.в.  $N_{7-6}$  может быть получена из построенной ранее способом моментной точки л.в.  $N_{7-9}$ , умножением всех её ординат на  $(-\operatorname{tg}\beta)$ .

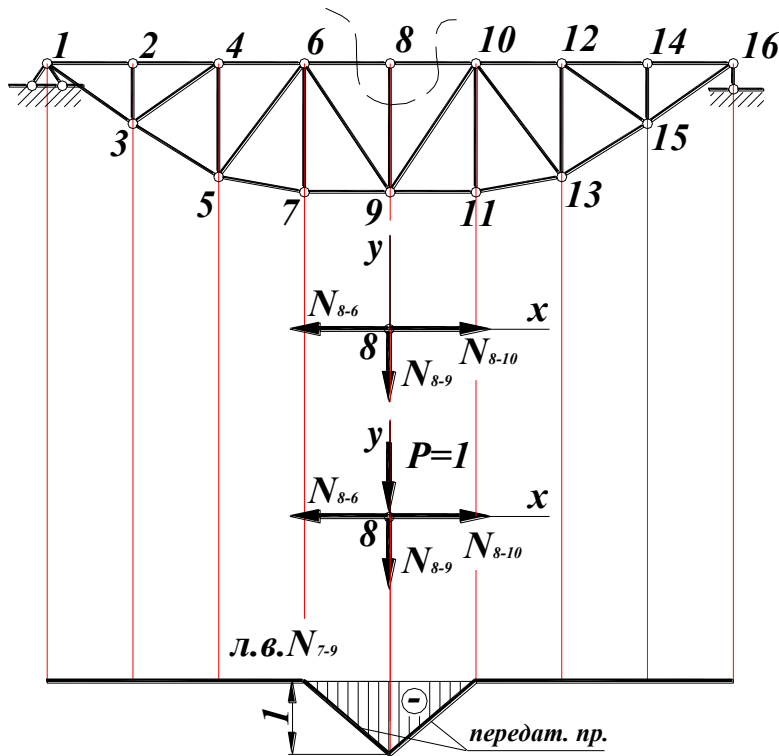


Рис.1.3.15

Построим л.в. для стойки 8-9. Здесь так же как и в предыдущем случае, нельзя провести разрез, пересекающий только три стержня. Поэтому воспользуемся способом вырезания узлов (рис.1.3.15). Вырежем узел 8 и рассмотрим его равновесие:

1) при нагрузке в любом узле, кроме 8,

$$\sum Y = 0, \quad -N_{8-9} = 0;$$

2) при нагрузке в узле 8

$$\sum Y = 0, \quad -P - N_{8-9} = 0, \quad N_{8-9} = -P = -1.$$

Следовательно, когда груз  $P=1$  приложен в узлах 1, 2, 4, 6, 10, 12, 14 и 16  $N_{8-9} = 0$ ; когда же груз  $P=1$  приложен в узле 8  $N_{8-9} = -1$ .

Найдя ординаты в узловых точках и соединив вершины их прямыми, получим л.в.  $N_{8-9}$ . Она имеет вид треугольника с наибольшей ординатой, равной единице. Все значения отрицательны (на участке между узлами 6-8-10). Это говорит о том, что стержень работает на сжатие.

### 1.3.9. Теория окружностей влияния. Основные понятия

Приложенную к конструкции силу  $P$ , изменяющую своё направление при сохранении точки приложения называют *вращающейся*. Например, при расчёте стрелы крана саму поворачивающуюся можно принять условно неподвижной, тогда силы тяжести будут вращаться.

Очевидно, что усилие  $S$  (или какой-то другой фактор: напряжение  $\sigma$ , перемещение  $\Delta$ ) будет функцией угла  $\alpha$  наклона силы  $P$  к некоторой фиксированной оси. График функции  $S(\alpha)$  представляет собой две одинаковые касающиеся друг друга окружности, которые называются *окружностями влияния (о.в.)*.

Пусть в какой-либо точке конструкции приложена безразмерная сила  $P=1$  под углом  $\alpha$  к некоторому начальному направлению (рис. 1.3.16,а). Для определения её влияния на усилие  $S(\alpha)$  разложим силу  $P$  на две взаимно перпендикулярные составляющие, направленные по осям  $Ox$  и  $Oy$ . Они будут равны соответственно  $\sin\alpha$  и  $\cos\alpha$ .

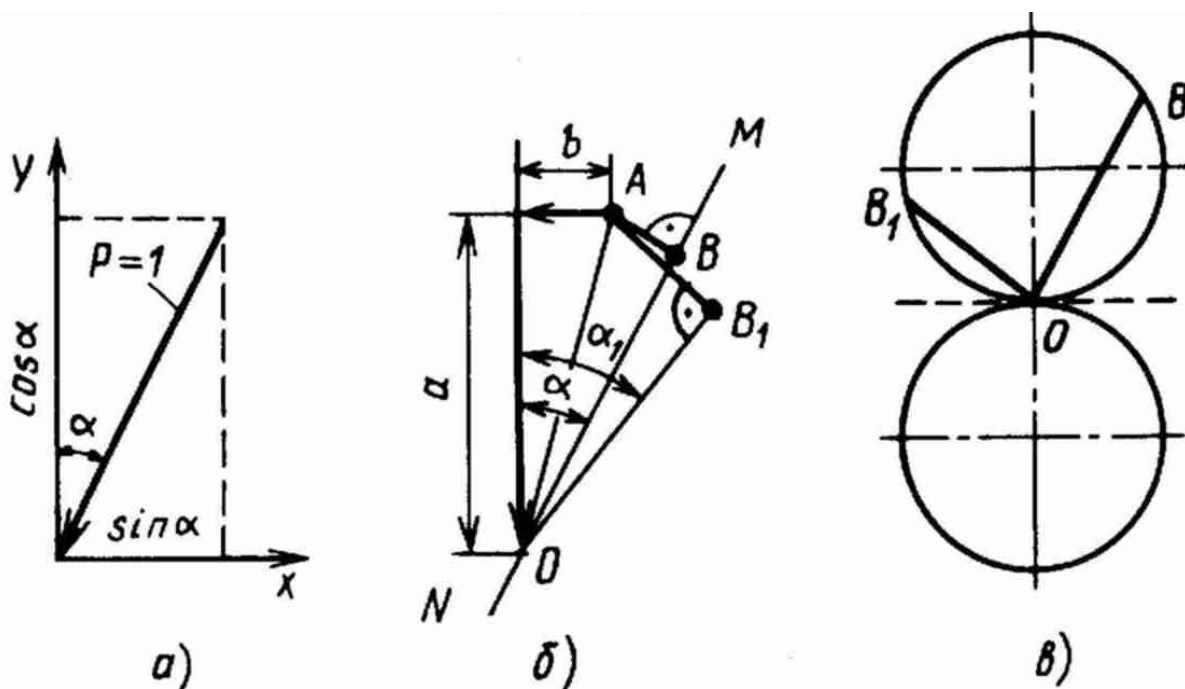


Рис.1.3.16

Обозначим влияние единичной силы, направленной по оси  $Oy$ , на усилие  $S(\alpha)$  через  $a$ , а единичной силы, направленной по оси  $Ox$ , через  $b$ . Если сила  $P=1$  наклонена к оси  $Oy$  под углом  $\alpha$ , то

$$S(\alpha) = a \cdot \cos\alpha + b \cdot \sin\alpha. \quad (1.3.4)$$

Для графического изображения этой функции сложим геометрически векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  (рис. 1.3.16,б), представляющие собой некоторые константы (не зависящие от угла  $\alpha$ ). Затем замыкающую линию  $OA$  спроектируем на ось  $MN$ , параллельную линии действия силы  $P$  и образующего с вектором  $\vec{a}$  угол  $\alpha$ . Т.к. проекция замыкающего вектора на какое-либо направление равна сумме проекций составляющих векторов, то

$$OB = a \cdot \cos\alpha + b \cdot \sin\alpha = S.$$

Следовательно, графически влияние силы  $P$  выражается вектором  $OB$ .

При изменении направления силы  $P$  проекция замыкающей будет  $OB_1$  (рис. 1.3.16,б). Прямые углы  $OBA$  и  $OB_1A$  опираются на неподвижный отрезок  $OA$ . Следовательно, геометрическим местом точек  $B$  при изменении угла  $\alpha$  будет окружность диаметром  $OA$ . Теоретически угол  $\alpha$  может изменяться от  $0$  до  $360^\circ$ . Поэтому таких окружностей будет две. Эти окружности представляют собой радиальную диаграмму (или окружность влияния) величин  $S$  для вращающейся силы  $P=1$ . Хорда  $OB$ , проведенная любому направлению  $P$ , выражает собой величину  $S$ . При этом одна из окружностей соответствует положительным значениям  $S$ , другая – отрицательным.

Для построения о.в. необходимо знать влияния силы  $P=1$  для двух любых её направлений. Проводя из произвольной точки  $O$  по этим направлениям радиусы-векторы  $OB$  и  $OB_1$ , выражающие в масштабе соответствующие влияния, по трём точкам  $O, B$  и  $B_1$  строят сначала одну окружность, а затем вторую, касательную к первой в точке  $O$  (рис. 1.3.16,в).

Из радиальной диаграммы видно, что всегда существует такое направление вращающейся силы  $P=1$ , при котором  $S=0$  (т.е. сила направлена по касательной к о.в.). Два направления силы  $P$ , из которых одно соответствует наибольшему влиянию, а другое – нулевому, всегда взаимно перпендикулярны. Кроме того, сумма квадратов влияний, вызываемых двумя взаимно

перпендикулярными единичными силами, не зависит от направления этих сил и равна квадрату максимального влияния одной вращающейся силы  $P=1$ . Откуда получаем

$$S_{\max} = \sqrt{S_{\alpha}^2 + S_{(\frac{\pi}{2}-\alpha)}^2}. \quad (1.3.5)$$

### 1.3.10. Определение усилий и напряжений по окружностям влияния.

На рис. 1.3.17,а условно изображена расчётная схема телескопической крановой стрелы, которая поднимается и поворачивается соответственно вокруг точки С при помощи гидроцилиндра (ЕД). На свободном конце стрелы через блок переброшен канат, на который действует сила Р. В точке О стрелы кроме силы Р действует ещё одна сила  $P_1=P$ , направленная вдоль стрелы (диаметром блока в этом случае пренебрегаем). Исследуем, как изменяется наибольшее напряжение в сечении I-I при теоретическом изменении угла наклона стрелы от 0 до 180°; для этого достаточно построить одну о.в.

Раскладываем силу Р по направлениям Ох и Оу и используя формуле для определения крайних напряжений (в наиболее удалённых точках сечения)

$$\sigma = \frac{N}{A} \pm \frac{M}{W}, \quad (1.3.6)$$

где N – продольная сила; M – изгибающий момент; A – площадь; W – момент сопротивления поперечного сечения.

Для нижней краевой точки сечения

$$\sigma_n = -\left( \frac{P_1}{A} + \frac{P}{A} \cdot \cos \alpha + \frac{P \cdot l_1}{W} \cdot \sin \alpha \right). \quad (1.3.7)$$

Первое слагаемое  $\sigma_{P_1} = \frac{P_1}{A}$  при построении о.в. можно не учитывать и при получении

окончательного результата прибавить:  $\sigma = \sigma_{P_1} + \sigma_p$ .

Таким образом, по окружности влияния исследуется величина

$$\sigma_p = \frac{P}{A} \cdot \cos \alpha + \frac{P \cdot l_1}{W} \cdot \sin \alpha. \quad (1.3.8)$$

Запишем это выражение в форме (1.3.4)

$$S = \sigma_p = a \cdot \cos \alpha + b \cdot \sin \alpha, \quad (1.3.9)$$

где  $a = \frac{P}{A}$ ,  $b = \frac{P \cdot l_1}{W}$ .

Пологая условно  $P=1$ ,  $a=3$  и  $b=4$ , построим о.в. (рис. 1.3.17,б). Отрезок  $OB = a$  отложим по оси Оу, а отрезок  $OB_1 = b$  – по оси Ох. Через точки О, В и  $B_1$  проводим окружность. Отрезок ОА выражает равнодействующую векторов  $OB$  и  $OB_1$  и является диаметром о.в. В соответствии с формулой (1.3.5)  $S_{\max} = OA = \sqrt{a^2 + b^2} = 5$ . Максимум краевого напряжения будет при  $\alpha_0 = \arctg(4/3)$ . Напряжение в нижней краевой точке будет равно нулю при  $\beta_0 = (\alpha_0 + 90^\circ)$ , т.е. когда стрела опустится ниже горизонта и оба слагаемых в выражении (1.3.6) будут равны по значению, но противоположны по знаку.

На рис. 1.3.17,в схематично показана решётчатая стрела. Построим о.в. усилия  $N_{5-7}$ . Поскольку стержни решётки стрелы являются нулевыми, при действии силы Р в направлении I  $N_{5-7}=0$ , а при действии в направлении II  $N_{5-7}=I$ . Поэтому, проведя через точку О прямую, параллельную линии I, получим линию минимума, касательную к о.в. (рис. 1.3.17,г).

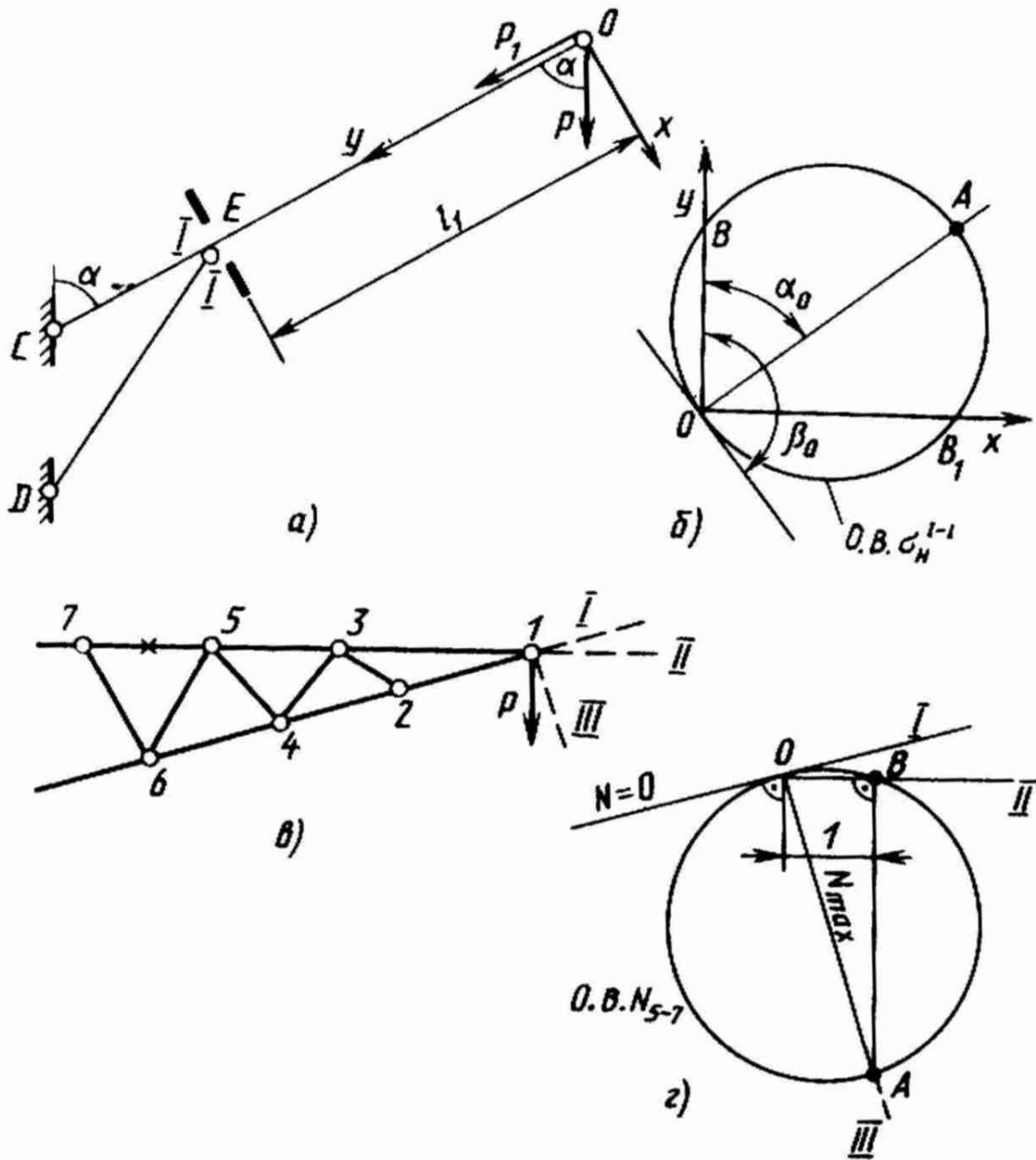


Рис.1.3.17

Восстановив в точке  $O$  перпендикуляр к этой касательной, получим линию максимума. Отложим от точки  $O$  по направлению линии II отрезок  $OB=1$  и, восстановив в точке  $B$  перпендикуляр, получим точку  $A$ ,  $OA$  – диаметр о.в. На диаметре  $OA$  строим окружность. Из графика следует, что при действии силы  $P$  в направлении III  $N_{5-7} = N_{max}$ . Действительно, в этом случае плечо силы  $P$  относительно моментной точки 6 стержня 5-7 будет максимальным.

## Тема 4 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ. МАТРИЧНЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА

### 1.4.1. Основные понятия. Обобщенная сила и обобщенное перемещение

Под внешним воздействием система деформируется, ее точки получают перемещения  $\Delta_{km}$ . Первый индекс показывает точку и направление перемещения, а второй – причину его вызывающую.

Перемещения от действия силы единичной величины, приходящейся на единицу длины, называют единичным и обозначают буквой  $\delta$ . Эти перемещения также как и перемещения от внешней полной нагрузки могут быть собственными и побочными:

$$\delta_{kk} = \frac{\Delta_{kk}}{P_k}; \delta_{km} = \frac{\Delta_{km}}{P_m}. \quad (1.4.1)$$

Для линейно-деформируемых систем в соответствии с принципом независимости действия сил.

$$\Delta_k = \Delta_{k\Sigma P} = \delta_{k1}P_1 + \delta_{k2}P_2 + \dots + \delta_{kk}P_k + \dots + \delta_{kn}P_n. \quad (1.4.2)$$

В процессе упругой деформации системы внешние и внутренние силы совершают работу, а сама система накапливает кинетическую энергию. Введем понятие *обобщенной силы*. Под которой будем понимать любую сумму сил (сосредоточенные силы, моменты, распределенные нагрузки и их сочетания), которые выражаются через какой-либо силовой фактор. Каждой обобщенной силе  $P_k$  соответствует свое обобщенное перемещение  $\Delta_{kk}$ . Так как умножение обобщенной силы на обобщенное перемещение дает работу, то обобщенное перемещение представляет собой множитель при обобщенной силе в выражении работы.

### 1.4.2. Действительная работа внешних и внутренних сил. Потенциальная энергия деформации

Если внешняя сила  $P_k$  вырастает от нуля до конечного значения медленно и силами энергии можно пренебречь, то действие такой силы называют статическим. Работа силы  $P_k$  на собственном перемещении  $\Delta_{kk}$  называется действительной работой  $W$  внешней силы. Эта работа положительна ( $W > 0$ ).

Получим выражение работы  $W$  при статическом действии силы  $P = P_k$  на перемещении  $\Delta = \Delta_{kk}$  (рис.1.1.4.1,а). Обозначим переменное значение этой силы через  $X$ , а переменное значение соответствующего ей перемещения через  $\lambda$  (рис.1.1.4.1,б).

При бесконечно малом приращении перемещения  $d\lambda$  совершается элементарная работа  $dW = X d\lambda$ . Так как перемещение пропорционально силе, то в соответствии с выражением (1.4.2)  $\lambda = \delta X$ , где  $\delta$  - перемещение, вызванное силой  $X=1$ . Отсюда  $d\lambda = \delta dX$  и  $dW = \delta X dX$ . Следовательно, полная работа:

$$W = \delta \int_0^P X dX = \frac{\delta P^2}{2}.$$

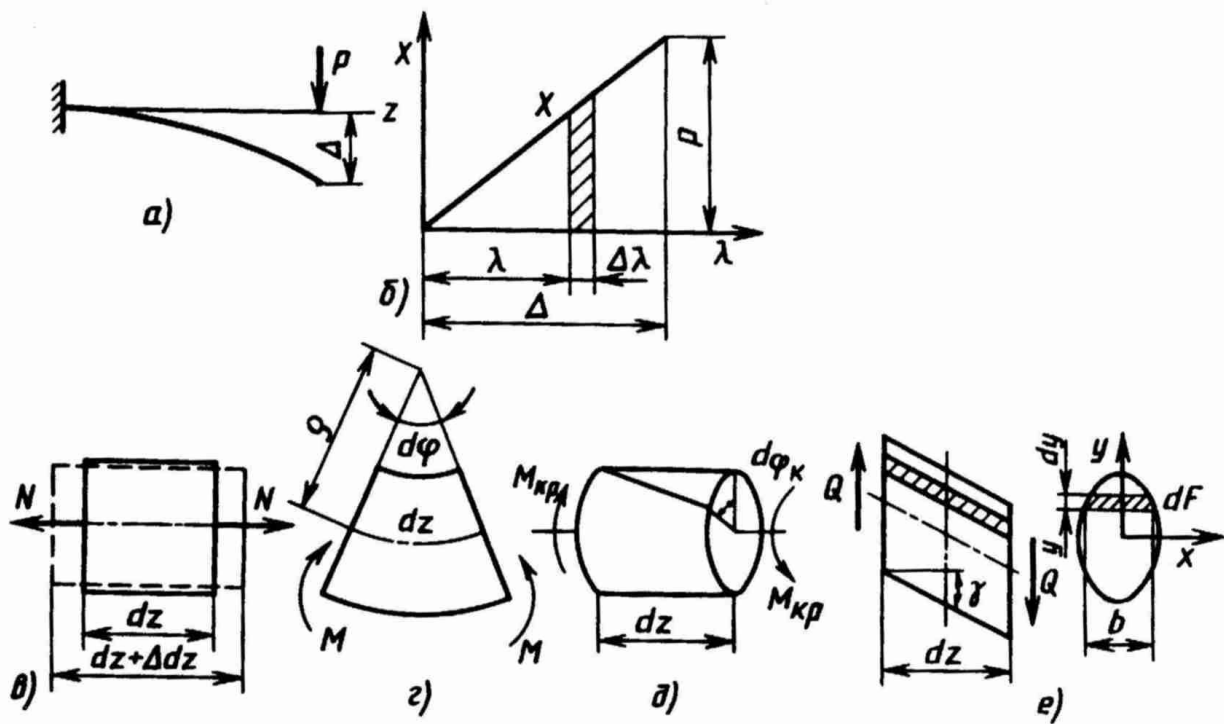


Рис.1.4.1

Так как конечное перемещение равно  $\Delta$ ,  $\delta P = \Delta$  то. Откуда:

$$W = 0,5 P_k \Delta_{kk}. \quad (1.4.3)$$

Таким образом, действительная работа внешней силы равна половине произведения конечного значения этой силы на конечное значение соответствующего перемещения (теорема Клайперона).

Действию каждой обобщенной силы  $P_k$  соответствует свое  $k$ -е состояние системы.

Если на систему действует  $n$  обобщенных сил, то каждая сила  $P_k$  будет совершать работу на суммарном перемещении  $\Delta_{k\Sigma P}$ , и суммарная работа внешних сил:

$$W = 0,5 \sum_{k=1}^n P_k \Delta_{k\Sigma P}. \quad (1.4.4)$$

В то время, как обобщенные внешние силы  $P$  совершают работу  $W$  на обобщенных перемещениях, обобщенные внутренние силы  $S$  совершают работу  $V$  на сопряженных с ним обобщенных деформациях.

В соответствии с принципом возможных перемещений  $W + V = 0$ . Поэтому действительная работа внутренних сил отрицательна ( $V < 0$ ).

Рассмотрим деформированные состояния элемента  $dz$  стержня при действии порознь приложенных к нему внутренних сил  $N$ ,  $M$ ,  $M_{kp}$  и  $Q$ , которые являются составляющими обобщенной силы  $S$ . По отношению к элементу  $dz$ . Эти силы являются внешними (рис.1.4.1,в-е).

Деформации элемента (рис.1.4.1,в-д) определяются формулами сопротивления материалов:

$$\varepsilon = \frac{\Delta dz}{dz} = \frac{N}{EA}; \quad \frac{1}{\rho} = \frac{d\varphi}{dz} = \frac{M}{EJ}; \quad \theta = \frac{d\varphi_k}{dz} = \frac{M_{kp}}{GJ_p}, \quad (1.4.5)$$

где  $\varepsilon$ ,  $\frac{1}{\rho}$ ,  $\theta$  - относительные деформации растяжения, изгиба и кручения;

$\Delta dz, d\varphi, d\varphi_k$  - соответствующие абсолютные деформации;

$E, G$  - модуль упругости материала первого и второго рода;

$A$  - площадь поперечного сечения элемента;

$J, J_p$  - осевой и полярный моменты инерции сечения;

Выражения действительных работ внутренних сил  $N, M$  и  $M_{kp}$  на абсолютных деформациях элемента:



$$dV_N = -\frac{N^2 dz}{2EA}; \quad dV_M = -\frac{M^2 dz}{2EJ}; \quad dV_{M_z} = -\frac{M_z^2 dz}{2GJ_p}.$$

Выражение для поперечной силы  $Q$  имеет особенности. На рис.1.4.1,е показан суммарный линейный сдвиг полосок элемента, параллельных оси  $x$ . На каждой полоске площадью  $dA=bdy$  действует касательное напряжение  $\tau = \frac{QS}{bJ_x}$  (здесь  $S = S_{omc}$  - статический момент отсеченной площади). Линейное перемещение полоски, соответствующее ее сдвигу, по **закону Гука** равно  $\gamma dz = \frac{\tau dz}{G}$  ( $\gamma$  - угол сдвига). Поэтому полная работа сил сдвига для элемента  $dz$ :

$$dV_Q = -\int_A \tau dA \frac{\tau dz}{2G} = -\frac{dz}{2G} \int_A \tau^2 dA = -\frac{Q^2 dz}{2GJ_x^2} \int_A \frac{S^2}{b^2} dA.$$

Если обозначить  $k = \frac{A}{I_x^2} \int \frac{S^2}{b^2} dA$ , то получим:

$$dV_Q = -k \frac{Q^2 dz}{2GA}.$$

Влияние коэффициента  $k$  зависит лишь от формы поперечного сечения. Для прямоугольного  $k=1,2$ ; для прокатных профилей  $k = \frac{A}{A_{cm}}$ , (где  $A$  – площадь поперечного сечения всего профиля;  $A_{cm}$  - площадь поперечного сечения стенки).

Действительная работа внутренних сил всей системы получится в результате суммирования элементарных работ в пределах длины  $l$  каждого стержня и последующего суммирования полученных значений по все стержням системы:

$$V = -\sum_l \int \frac{N^2 dz}{2EA} - \sum_l \int \frac{M_x^2 dz}{2EJ_x} - \sum_l \int \frac{M_y^2 dz}{2EJ_y} - \sum_l \int \frac{k_x Q_x^2 dz}{2GA} - \sum_l \int \frac{k_y Q_y^2 dz}{2GA} - \sum_l \int \frac{M_z^2 dz}{2GJ_p}. \quad (1.4.6)$$

**Потенциальная энергия  $U$**  упругой деформации, возвращающая систему в исходное (первоначальное) состояние после снятия нагрузки равна по модулю, но противоположна по знаку действительной работе внутренних сил. То есть,  $U = -V = W$ .

Для плоской стержневой системы:

$$U = \sum_l \int \frac{N^2 dz}{2EA} + \sum_l \int \frac{M^2 dz}{2EJ} + \sum_l \int \frac{kQ^2 dz}{2GA}. \quad (1.4.7)$$

Потенциальная энергия представляет собой, также как и работы внешних и внутренних сил, квадратичную функцию усилий. Поэтому при ее вычислении принцип суперпозиции не может быть использован, т.е.  $U_{(p_1+p_2)} \neq U_{p_1} + U_{p_2}$ .

Если сила  $P$  и перемещение  $\Delta$  получают приращения  $dP$  и  $d\Delta$  (рис.1.4.2), то приращение энергии упругой деформации с точностью до величин высшего порядка малости  $dU = P d\Delta$ . Из этого равенства следует **теорема Лагранжа**: в положении равновесия производная от потенциальной энергии деформации по перемещению равна соответствующей силе:

$$\frac{dU}{d\Delta} = P. \quad (1.4.8)$$

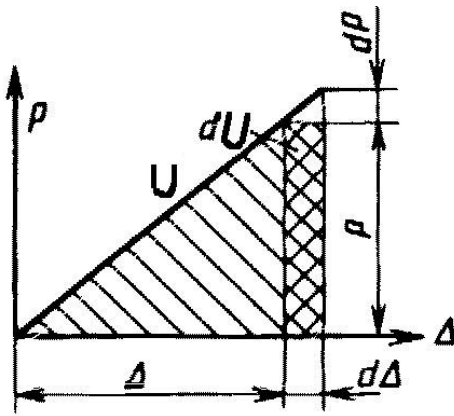


Рис.1.4.2

$$\frac{dU}{dP} = \Delta. \quad (1.4.9)$$

### 1.4.3. Возможная работа внешних и внутренних сил

Возможной работой  $W_{km}$  внешней силы  $P_k$  называют работу этой силы на перемещении  $\Delta_{km}$ , вызванном  $m$  – м воздействием; иными словами – это работа силы  $k$  – го состояния системы на перемещениях его  $m$  – го состояния:

$$W_{km} = P_k \Delta_{km}. \quad (1.4.10)$$

Консольную балку  $AB$  (рис.1.4.3,а) последовательно нагрузим обобщенными силами  $P_k$  и  $P_m$ . От действия силы  $P_k$  балка изогнется и займет положение  $AB_1$ . Сила  $P_k$  при этом совершит действительную работу на собственном перемещении  $\Delta_{kk}$ :  $W_k = 0,5 P_k \Delta_{kk}$ . Затем приложим силу  $P_m$ . От ее действия балка  $AB$  займет положение  $AB_2$ . При этом сила  $P_m$  совершит действительную работу  $W_m = 0,5 P_m \Delta_{mm}$ , а сила  $P_k$ , не изменяя своего значения, при нарастании прогиба, совершит *возможную работу* на побочном перемещении:  $W_{km} = P_k \Delta_{km}$ .

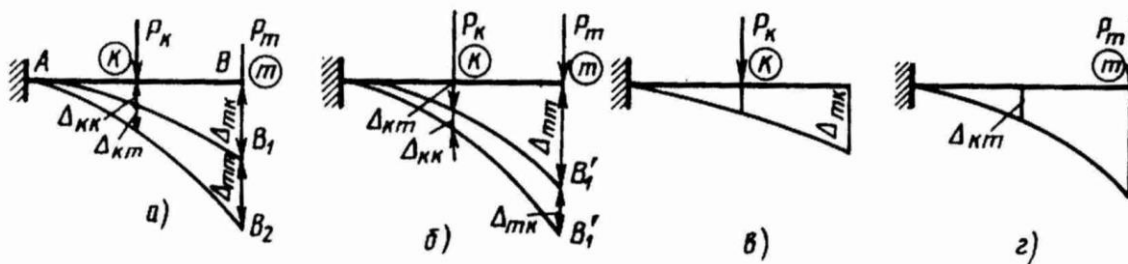


Рис. 1.4.3

Возможная работа отличается от действительной тем, что, во-первых, в ее выражении отсутствует коэффициент 0,5, а во-вторых, она может иметь любой знак и быть равной нулю.

Возможная работа внутренних сил  $k$  – го состояния на деформациях  $m$  – го состояния для плоских систем:

$$V_{km} = - \left[ \sum_i \int N_k (\Delta dz)_m + \sum_i \int M_k \left( \frac{dz}{\rho} \right)_m + \sum_i \int Q_k (\gamma dz)_m \right]. \quad (1.4.11)$$

Если возможные деформации вызваны действием нагрузки, то возможная работа

$$V_{kP} = - \left[ \sum_i \int \frac{N_k N_P dz}{EA} + \sum_i \int \frac{M_k M_P dz}{EJ} + \sum_i \int \frac{k Q_k Q_P dz}{GA} \right], \quad (1.4.12)$$

где  $N_k, M_k, Q_k$  – внутренние факторы, соответствующие  $k$  – му состоянию системы;  $N_P, M_P, Q_P$  – внутренние факторы, соответствующие грузовому состоянию системы (индекс  $k$  заменяется индексом  $P$ ).

Если возможные деформации вызваны действием температуры ( $m = t$ ), то при условии ее линейного перепада по высоте  $h$  сечения и расположении центра тяжести посередине его высоты

$$(\Delta dz)_t = 0,5\alpha(t_1 + t_2)dz; \left(\frac{dz}{\rho}\right)_t = \frac{\alpha(t_1 - t_2)}{h} dz; (\gamma dz)_t = 0, \quad (1.4.13)$$

где  $t_1$  и  $t_2$  – температуры в краевых волокнах сечения;  $\alpha$  – коэффициент линейного расширения.

Подставляя выражения (1.4.13) в формулу (1.4.11), получаем

$$V_{kr} = - \left[ \sum_i \int N_k \frac{\alpha(t_1 + t_2)}{2} dz + \sum_i \int M_k \frac{\alpha(t_1 - t_2)}{h} dz \right]. \quad (1.4.14)$$

В соответствии с принципом возможных перемещений

$$V_{km} = -W_{km}. \quad (1.4.15)$$

#### 1.4.4. Теоремы о взаимности работ и взаимности перемещений

Рассмотрим два случая последовательного нагружения балки обобщенными силами: 1) сначала силой  $P_k$ , а затем силой  $P_m$  (рис.1.4.3,а); 2) сначала силой  $P_m$ , а затем силой  $P_k$  (рис.1.4.3,б). Из равенства выражений суммарной работы в первом и во втором случаях нагружения:

$W_I = 0,5P_k \Delta_{kk} + 0,5P_m \Delta_{mm} + P_k \Delta_{km}$ ;  $W_{II} = 0,5P_m \Delta_{mm} + 0,5P_k \Delta_{kk} + P_m \Delta_{mk}$ , получим

$$P_k \Delta_{km} = P_m \Delta_{mk} \text{ или } W_{km} = W_{mk} \quad (1.4.16)$$

Полученная аналитическая зависимость выражает собой **теорему о взаимности работ**: в линейно деформируемом теле возможная работа внешних или внутренних сил первого состояния на перемещениях точек их приложения, вызванных действием сил второго состояния, равна возможной работе внешних или внутренних сил второго состояния на перемещениях, вызванных действием сил первого состояния (рис.1.4.3,в,г). Эта теорема носит имя **теоремы Бетти-Рэля**.

Теорема о взаимности перемещений может быть представлена как частный случай теоремы о взаимности работ. Пусть на балку в первом состоянии действует единичная сила  $P_1=1$ , а во втором состоянии -  $P_2=1$ . На основании теоремы о взаимности работ, приравнявая возможные работы  $P_1 \delta_1 = P_2 \delta_2$ , получим  $\delta_{12} = \delta_{21}$ .

Это аналитическое выражение для **теоремы о взаимности перемещений**: перемещение точки приложения первой единичной силы по ее направлению, вызванное действием второй единичной силы, равно перемещению по направлению второй единичной силы, вызванному действием первой единичной силы.

Эту теорему называют также **теоремой Максвелла**.

В общем случае, для двух произвольных состояний  $k$  и  $m$  получим выражение:

$$\delta_{km} = \delta_{mk}. \quad (1.4.17)$$

#### 1.4.5. Теорема о взаимности реакций

Рассмотрим два состояния  $k$  и  $m$  статически неопределимой системы (рис.1.4.4,а,б). Каждое состояние определяется перемещением (дислокацией  $d$ ) одной из связей. От этих перемещений в связях возникнут реакции  $R_{km}$  (первый индекс соответствует связи, реакция которой определяется, а второй – состоянию системы). В соответствии с выражением (1.4.16):

$$R_{km} d_k = R_{mk} d_m. \quad (1.4.18)$$

Разделив обе части полученного выражения на произведение  $d_k d_m$ , получим  $\frac{R_{km}}{d_m} = \frac{R_{mk}}{d_k}$  или

$$r_{km} = r_{mk}, \quad (1.4.19)$$

где  $r_{km}, r_{mk}$  - единичные реакции.

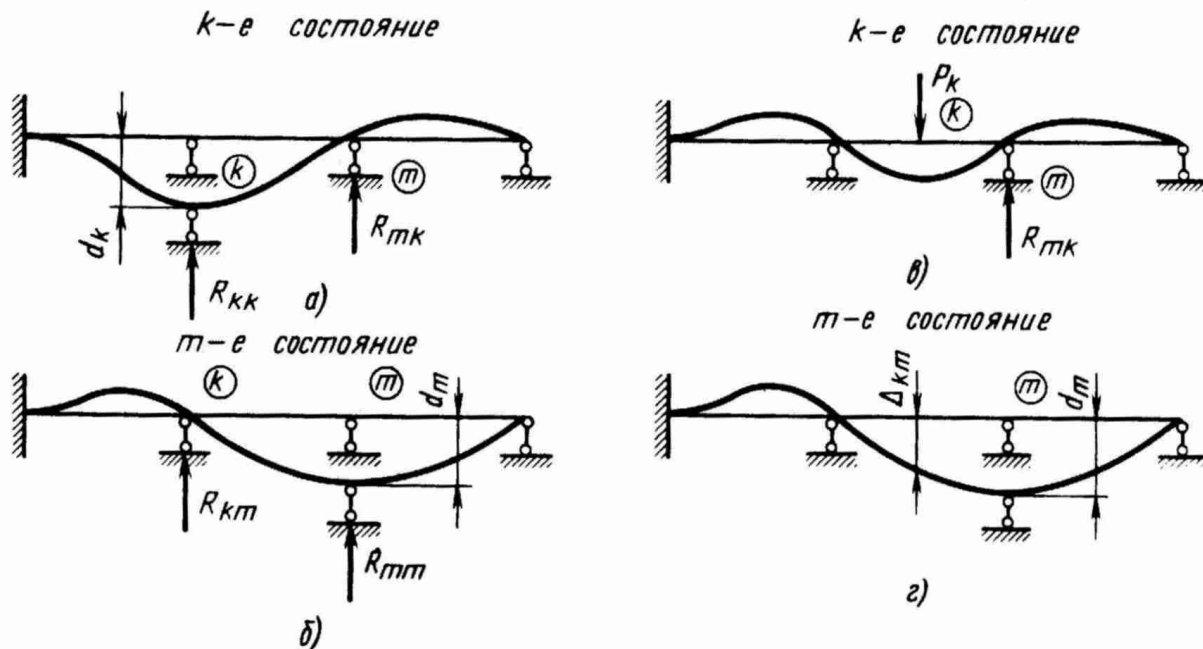


Рис.1.4.4

Отсюда следует **теорема о взаимности реакций**: реакция в  $k$ -ой связи от единичного перемещения  $m$ -ой связи равна реакции в  $m$ -ой связи от единичного перемещения  $k$ -ой связи.

#### 1.4.6. Теорема о взаимности реакций и перемещений

Если  $k$ -е состояние статически неопределимой системы вызвано действием силы  $P_k$ , а  $m$ -е состояние - перемещением (дислокацией)  $d_m$  (рис.1.4.4,в,г), то силы  $k$ -го состояния системы совершат на перемещениях  $m$ -го состояния возможную работу  $R_{mk}d_m + P_k\Delta_{km}$ .

Работа  $m$ -го состояния на перемещениях  $k$ -го состояния будет равна нулю поскольку в  $k$ -м состоянии отсутствуют перемещения опорных связей. Следовательно,

$$R_{mk}d_m = -P_k\Delta_{km}. \quad (1.4.20)$$

Разделив обе части (1.4.20) на  $R_{mk}d_m = -P_k\Delta_{km}$ , получим:

$$\frac{R_{mk}}{P_k} = -\frac{\Delta_{km}}{d_m}$$

или

$$r_{mk} = -\delta_{km}. \quad (1.4.21)$$

В этом заключается **теорема о взаимности реакций и перемещений**: реакция в  $m$ -й связи от единичной силы  $P_k$  по направлению ее действия, вызванному единичным перемещением  $d_m=1$  связи и взятому с противоположным знаком.

#### 1.4.7. Общая формула для определения перемещений плоской стержневой системы (метод Мора)

Принцип возможных перемещений позволяет получить общую формулу определения перемещений в различных сооружениях (балках, рамах, фермах и т.д.).

Определим, например, перемещение какой-либо точки  $k$  рамной системы, вызванное приложением к ней нагрузки. Рассмотрим систему в двух состояниях. В первом (действительном) состоянии система загружается заданной нагрузкой (рис.1.4.5,а), а во втором (вспомогательном) – к системе в точке  $k$  приложена лишь одна внешняя единичная сила  $\bar{P}_k=1$ , по направлению которой и определяется искомое перемещение  $\Delta_{kp}$  (рис.1.4.5,б)

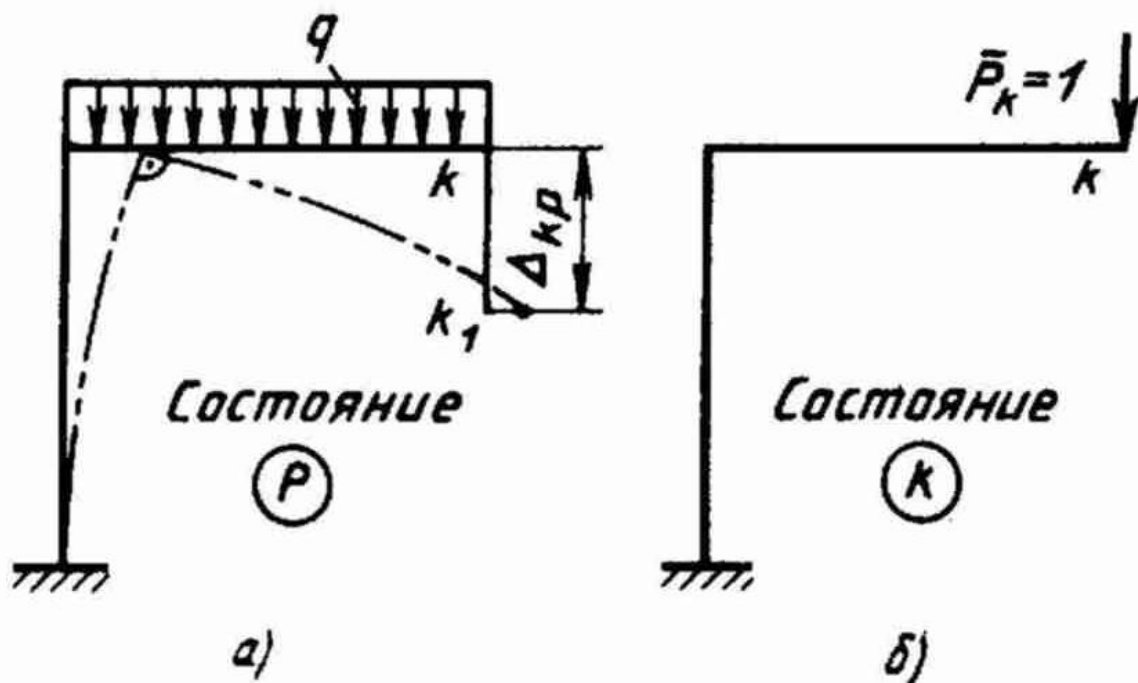


Рис.1.4.5

Выразим возможную работу внешней силы  $\bar{P}_k = 1$  на перемещении  $\Delta_{kp}$  (вызванном действием нагрузки  $P$ ) через возможную работу внутренних сил, пользуясь формулой (1.4.12). Учитывая, что  $W_{kp} = 1 \cdot \Delta_{kp}$ , получаем **формулу Мора** (или **интеграл Мора**) для определения перемещений в плоских системах, состоящих из прямолинейных стержней:

$$\Delta_{kp} = \sum \int_l \frac{\bar{N}_k N_p dz}{EA} + \sum \int_l \frac{\bar{M}_k M_p dz}{EJ} + \sum \int_l \frac{k \bar{Q}_k Q_p dz}{GA}, \quad 1.4.22$$

где  $\bar{N}_k$ ,  $\bar{Q}_k$  и  $\bar{M}_k$  - внутренние силы в системе от действия силы  $\bar{P}_k = 1$ ;  $N_p$ ,  $Q_p$  и  $M_p$  - внутренние силы от действия нагрузки.

Формула Мора для пространственных систем, состоящих из прямолинейных стержней, имеет вид:

$$\begin{aligned} \Delta_{kp} = & \sum \int_l \frac{\bar{N}_k N_p dz}{EA} + \sum \int_l \frac{\bar{M}_{xk} M_{xp} dz}{EJ_x} + \sum \int_l \frac{\bar{M}_{yk} M_{yp} dz}{EJ_y} + \sum \int_l \frac{k_x \bar{Q}_{xk} Q_{xp} dz}{GA} + \\ & + \sum \int_l \frac{k_y \bar{Q}_{yk} Q_{yp} dz}{GA} + \sum \int_l \frac{\bar{M}_{zk} M_{zp} dz}{GJ_p}. \end{aligned} \quad 1.4.23$$

При использовании формулы Мора обычно не учитывают те слагаемые, влиянием которых можно пренебречь. При расчете балок и рам пренебрегают деформациями растяжения (сжатия) и сдвига. Для плоских рам и балок формула Мора имеет вид:

$$\Delta_{kp} = \sum \int_l \frac{\bar{M}_k M_p dz}{EJ}. \quad 1.4.24$$

Однако, деформациями сдвига не рекомендуется пренебрегать в системах с короткими стержнями ( $l < 5h$ , где  $h$  – высота поперечного сечения).

Для плоских и пространственных шарнирных ферм формула Мора принимает вид:

$$\Delta_{kp} = \sum \int_l \frac{\bar{N}_k N_p dz}{EA}. \quad 1.4.25$$

Поскольку по длине стержня силы  $\bar{N}_k$  и  $N_p$  а также жесткости  $EA$  остаются постоянными, а  $\int_l dz = l$ , расчет шарнирных ферм ведут по формуле

$$\Delta_{kp} = \sum_{i=1}^m \frac{\bar{N}_{ik} N_{ip} l_i}{E_i A_i}, \quad (1.4.26)$$

где  $m$  - число стержней фермы.

### 1.4.8. Вычисление интегралов Мора

Каждое слагаемое в формулах (1.4.22) – (1.4.25) представляет собой интеграл типа:

$$\int_l \frac{f_1(z) f_2(z)}{f_3(z)} dz. \quad (1.4.27)$$

Когда  $f_3(z) = \text{const}$ , а одна из функций  $f_1(z)$  или  $f_2(z)$  линейна (что соответствует единичному состоянию системы), вычисление интеграла (1.4.27) можно выполнять по способу “перемножения эпюр”, называемому **правилом Верещагина**:

$$\int_l f_1(z) f_2(z) dz = \omega y_c, \quad (1.4.28)$$

где  $\omega$  - площадь эпюры произвольной функции  $f_1(z)$ ;  $y_c$  - ордината линейной эпюры  $f_2(z)$ , расположенная под центром тяжести  $S$  эпюры  $f_1(z)$  (рис.1.4.6,а,б).

Пологая, что функциями  $f_1(z)$  и  $f_2(z)$  являются изгибающие моменты  $M_1(z)$  и  $M_2(z)$ , приведем некоторые формулы, удобные для вычислений. Если обе эпюры  $M(z)$  линейны на участке интегрирования, т.е. представляют собой трапеции (рис.1.4.6,в,г), то согласно (1.4.25) получим:

$$\int_l \bar{M}_1(z) M_2(z) dz = \frac{l_i}{6} [2\bar{M}_A M_A + 2\bar{M}_B M_B + \bar{M}_A M_B + M_A \bar{M}_B], \quad (1.4.29)$$

где  $\bar{M}_A$  и  $\bar{M}_B$  - значения моментов на концах участка  $l_i$ , определяемые по единичной эпюре  $\bar{M}_1(z)$ , а  $M_A$  и  $M_B$  - то же, но по грузовой эпюре  $M_2(z)$ .

Если функция  $f_2(z) = M_2(z)$  представляет собой квадратичную или кубическую параболу, а  $f_1(z) = \bar{M}_1(z)$  - линейна, то интеграл Мора следует вычислять по **формуле Симпсона**:

$$\int_l \bar{M}_1(z) M_2(z) dz = \frac{l_i}{6} [\bar{M}_A M_A + 4\bar{M}_C M_C + \bar{M}_B M_B], \quad (1.4.30)$$

где  $\bar{M}_C$  и  $M_C$  - моменты посередине участка  $l_i$ , определяемые по единичной и грузовой эпюрам моментов соответственно (рис.1.4.6,д,е).

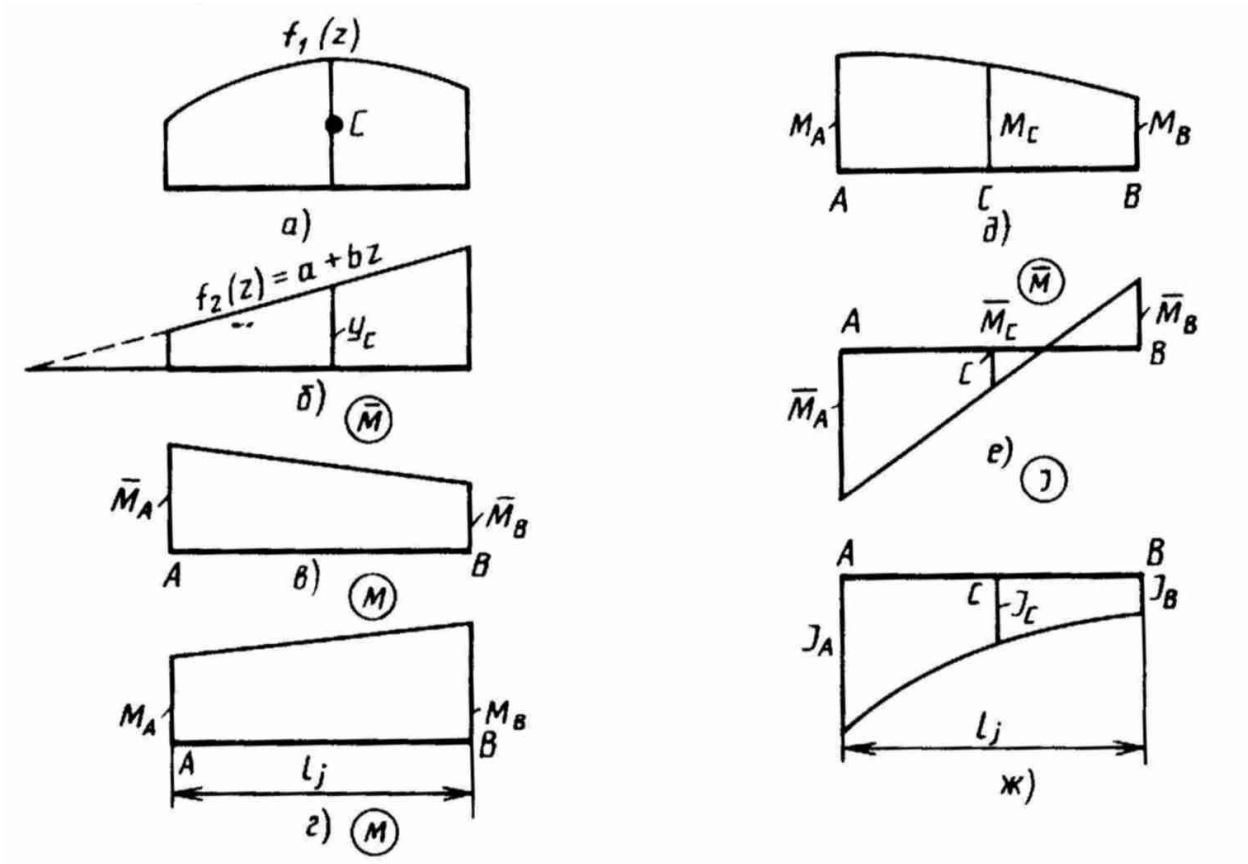


Рис.1.4.6

Формулу Симпсона удобно использовать при приближенном вычислении интеграла Мора, когда  $f_3(z) = EJ(z) \neq const$  (рис.1.4.6,д-ж). Если  $f_3(z) = EJ(z)$ , то

$$\int_{l_j} \frac{\bar{M}(z)M(z) dz}{EJ(z)} = \frac{l_j}{6} \left[ \frac{\bar{M}_A M_A}{EJ_A} + 4 \frac{\bar{M}_C M_C}{EJ_C} + \frac{\bar{M}_B M_B}{EJ_B} \right]. \quad 1.4.31$$

### 1.4.9. Определение перемещений от температурных и дислокационных воздействий

Формула Мора выражает возможную работу внутренних сил  $K$ -го единичного состояния на деформациях  $m$ -го действительного состояния системы. Если действительное состояние определяется температурным воздействием, то формула Мора примет вид:

$$\Delta_{kt} = \sum \frac{\alpha(t_1 + t_2)}{2} \int_l \bar{N}_k dz + \sum \frac{\alpha(t_1 - t_2)}{h} \int_l \bar{M}_k dz. \quad (1.4.31)$$

Здесь суммирование ведется по всем участкам системы, на которых произошло изменение температуры.

Для прямолинейных или ломаных стержней интегралы можно вычислить как площади единичных эпюр. Тогда формула перемещений (1.4.31) примет вид:

$$\Delta_{kt} = \sum \frac{\alpha(t_1 + t_2)}{2} \omega_{\bar{N}_k} + \sum \frac{\alpha(t_1 - t_2)}{h} \omega_{\bar{M}_k}, \quad (1.4.32)$$

где  $\omega_{\bar{N}_k}$  и  $\omega_{\bar{M}_k}$  - площади единичных эпюр  $\bar{N}_k$  и  $\bar{M}_k$ .

Каждое слагаемое в выражении (1.4.32) берется со знаком “плюс”, если соответствующие деформации от температуры и от силы  $P = 1$  одного знака.

**Пример.** На рис.1.4.7,а изображена рама, у которой волокна стержней внутри нагреты на  $t_1 = +10^\circ C$ , а снаружи охлаждены на  $t_2 = -20^\circ C$ . Определить горизонтальные перемещения точки В.

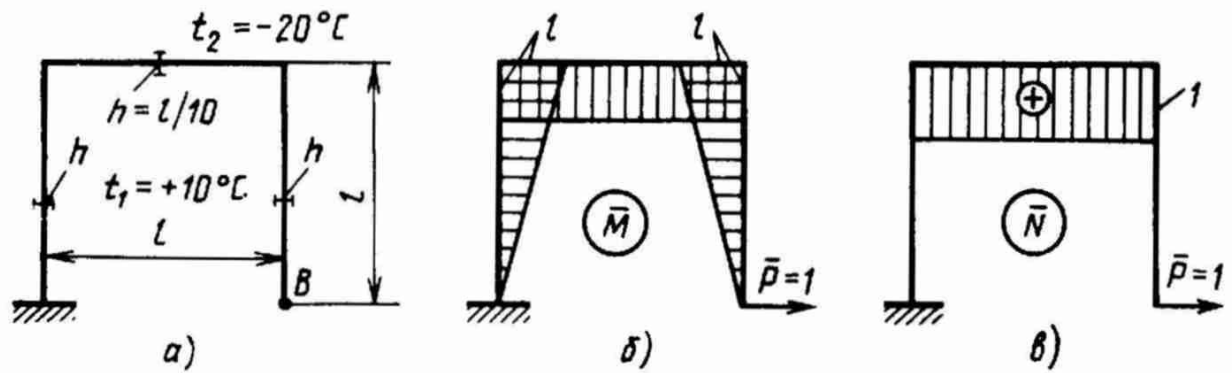


Рис.1.4.7

Приложив силу  $\bar{P}_1=1$  в точке В по искомому направлению и построив эпюры  $\bar{M}$  и  $\bar{N}$  (рис.1.4.7,б,в), найдем в соответствии с формулой (1.4.32):

$$\Delta_{kt} = \alpha \left[ -5l + 30 \frac{10}{l} \left( 2 \circ \frac{1}{2} l^2 + l^2 \right) \right] = 595 \alpha l.$$

Формулу для определения перемещений точек системы от дислокаций получим на основе теоремы о взаимности реакций и перемещений (1.4.20):

$$M_{mk} d_m = -P_k \Delta_{km}.$$

Разделив обе части этого уравнения на  $P_k$  и заменив индекс m на d, получим:

$$\Delta_{kd} = -r_{dk} d. \quad (1.4.33)$$

Если заданна не одна дислокация, а несколько, то

$$\Delta_{kd} = -\sum_{i=1}^n r_{di} d_i. \quad (1.4.34)$$

Таким образом, для определения перемещений  $\Delta_{kd}$  от дислокаций  $d_i$  надо в точке К приложить соответствующую единичную силу и от ее действия реакции  $r_i$  во всех i-х связях. При перемножении этих реакций с дислокациями берется положительный знак, если реакции и перемещения имеют одно направление.

**Пример.** Определить вертикальное перемещение  $\Delta_{kd}$  точки К рамы (рис.1.4.8,а), основание которой одновременно переместилось вертикально на  $d_A$  и повернулось на угол  $\varphi_A$ .

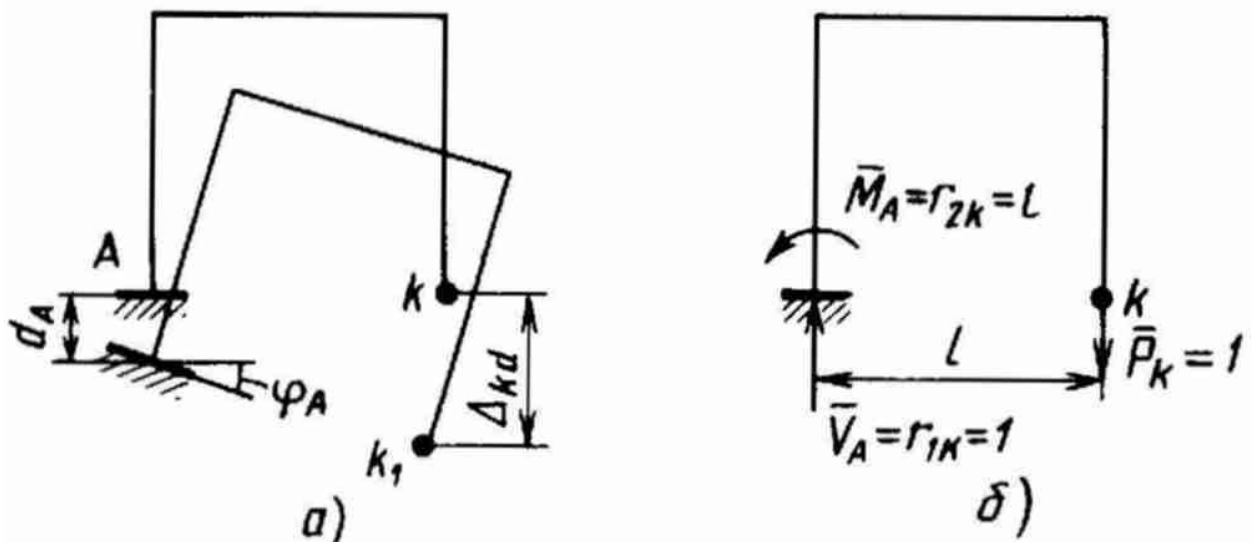


Рис.1.4.8

Для этого определим в заделке А (в связи, которая получила перемещение) реакции от силы  $\bar{P}_1=1$ , приложенной по направлению искомого перемещения (рис.1.4.8,б). В соответствии с формулой (1.4.34) получим:



$$\Delta_{kd} = -(-1d_A - l\varphi_A) = d_A + l\varphi_A.$$

### 1.5.1. Статистически неопределимые системы

Статистически неопределимой называется система, расчет которой на основе одних уравнений статистики невозможен. Кинематическим признаком статистической неопределимости является наличие в их структуре лишних связей. Число лишних связей определяет степень статистической неопределимости  $n$  системы. Удаление лишних связей превращает статистически неопределимую систему в статистически определимую.

В зависимости от того, какие связи (внешние или внутренние) являются лишними, системы могут быть как внешне, так и внутренне статистически неопределимыми.

В статистически неопределимых системах внутренние силы возникают не только от нагрузки, но также и от температурных и дислокационных воздействий.

Расчет статистически неопределимой системы начинают с определения ее степени статистической неопределимости. Для плоских рам, состоящих из замкнутых контуров, удобно использовать формулу

$$n = 3k - m, \quad (1.5.1)$$

где  $n$  – степень статической неопределимости;  $k$  – число замкнутых контуров;  $m$  – число врезанных шарниров с учетом кратности.

При размыкании плоского замкнутого контура или стержня удаляются три связи (рис.1.5.1,а): две связи, препятствующие линейным перемещениям, и одна связь, препятствующая взаимному угловому перемещению сечений контура в месте разреза. Этим обобщенным перемещениям соответствуют обобщенные силы  $M$ ,  $Q$  и  $N$ .

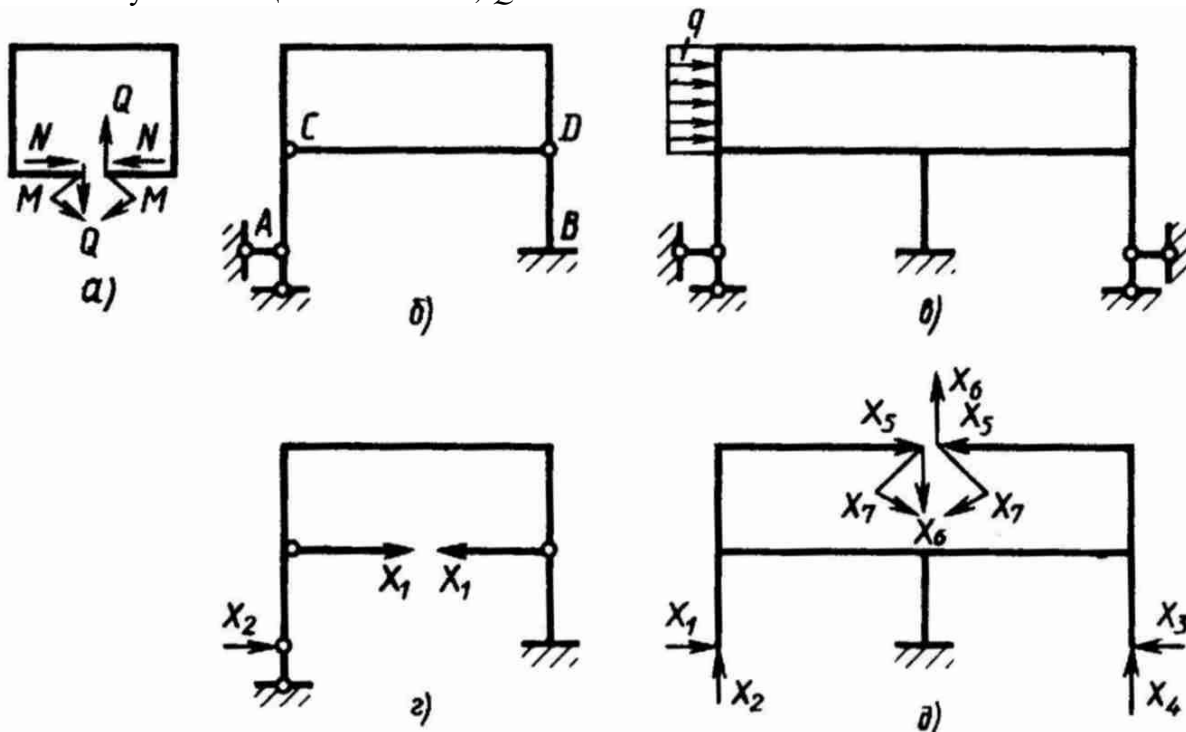


Рис.1.5.1

На рис.1.5.1, б показана рама с двумя контурами (земля считается замыкающей связью).

Шарниры  $A$  и  $C$  – однократные, а шарнир  $D$  – двукратный. Поэтому по формуле (1.5.1) находим

$$n = 3 \cdot 2 - 4 = 2.$$

Рама, изображенная на рис.1.5.1, в, 7 раз статически неопределимая ( $n = 3 \cdot 3 - 2 = 7$ ).

На рис.1.5.1, г, д показаны статистически определимые системы, полученные из заданных статистически неопределимых систем (рис.1.5.1, б, в) после удаления лишних связей.

## 1.5.2. Общие предпосылки методов расчета статистически неопределимых систем

Расчету подлежит не заданная статистически неопределимая система, а некоторая полученная из нее (преобразованная) система, которая должна быть ей эквивалентна в статистическом и кинематическом отношении – все условия и перемещения в эквивалентной системе должны быть такими же, как и в заданной.

Условия эквивалентности заданной и преобразованной систем выполняются при соблюдении принципа заменяемости связей, согласно которому:

- 1) любая  $i$ -я связь может быть удалена, если вместо нее приложены обобщенные силы  $X_i$  и принято, что взаимное перемещение, соответствующее этим силам, равно нулю, т.е.

$$\Delta_i = 0 \quad (1.5.2)$$

- 2) любая  $i$ -я связь может быть введена, если при этом введенная связь получит соответствующее перемещение  $Z_i$  и будет принято, что реакция (усилие) в этой связи равна нулю, т.е.

$$R_i = 0. \quad (1.5.3)$$

Система, полученная из заданной путем удаления связей или введения их, называется **основной системой**, а соответствующие ей неизвестные  $X_i$  и  $Z_i$  – **основными неизвестными**.

Условие **кинематической эквивалентности** представляет собой равенство нулю обобщенного перемещения  $\Delta_i$  от действия на преобразованную систему, как внешних воздействий, так и основных неизвестных  $X_i$  или  $Z_i$ . Обозначая для общности рассуждений основные неизвестные через  $Y_i$ , представим это условие в виде

$$\Delta_i = \Delta_{iY1} + \Delta_{iY2} + \dots + \Delta_{iYk} + \dots + \Delta_{iYn} + \Delta_{im} = 0, \quad (1.5.4)$$

где  $n$  – число основных неизвестных  $Y_i$ ,  $m$  – фактор внешнего воздействия.

Любой член этого уравнения, кроме последнего, можно представить в виде единичного перемещения  $\delta_{ik}$  на соответствующее неизвестной  $Y_k$ :

$$\Delta_{iYk} = \delta_{ik}Y_k.$$

Следовательно, выражение (1.5.4) можно представить в виде

$$\Delta_i = \delta_{i1}Y_1 + \delta_{i2}Y_2 + \dots + \delta_{ik}Y_k + \dots + \delta_{in}Y_n + \Delta_{im} = 0, \quad (1.5.5)$$

где  $\Delta_{im}$  – обобщенное перемещение  $\Delta_i$  от внешнего воздействия  $m$  на основную систему.

Исходя из аналогичных рассуждений, запишем **условие статической эквивалентности** (1.5.3):

$$R_i = r_{i1}Y_1 + r_{i2}Y_2 + \dots + r_{ik}Y_k + \dots + r_{in}Y_n + R_{im} = 0, \quad (1.5.6)$$

где  $r_{ik}$  – реакция в  $i$ -й введенной связи от  $Y_k = 1$ ;  $R_{im}$  – реакция в той же связи от внешнего воздействия.

Число уравнений (1.5.5), (1.5.6) равно числу  $n$  основных неизвестных. В совокупности они образуют **систему канонических уравнений**:

$$\begin{aligned} c_{11}Y_1 + c_{12}Y_2 + \dots + c_{1k}Y_k + \dots + c_{1n}Y_n + C_{1m} &= 0; \\ c_{21}Y_1 + c_{22}Y_2 + \dots + c_{2k}Y_k + \dots + c_{2n}Y_n + C_{2m} &= 0; \\ \dots &\dots \\ c_{n1}Y_1 + c_{n2}Y_2 + \dots + c_{nk}Y_k + \dots + c_{nn}Y_n + C_{nm} &= 0; \end{aligned} \quad (1.5.7)$$

где  $c_{ik}$  – единичные коэффициенты ( $\delta_{ik}$  или  $r_{ik}$ ), не зависящие от внешнего воздействия;  $c_{im}$  – свободные члены ( $\Delta_{im}$  или  $R_{im}$ ), зависящие от внешнего воздействия.

Вычислив коэффициенты  $c_{ik}$  и свободные члены  $c_{im}$  из решения системы  $n$  неизвестными (1.5.7), находят величины  $Y_i$ . Затем в соответствии с принципом суперпозиции определяют усилия  $S_j$  в любой  $j$ -й связи или перемещения  $\Delta_j$  любого  $j$ -го узла:

$$S_j = s_{j1}Y_1 + s_{j2}Y_2 + \dots + s_{jn}Y_n + S_{jm}; \quad (1.5.8)$$

$$\Delta_j = \delta_{j1}Y_1 + \delta_{j2}Y_2 + \dots + \delta_{jn}Y_n + \Delta_{jm} = 0, \quad (1.5.9)$$

где  $S_{jm}$  – усилие в  $j$ -й связи;  $\Delta_{jm}$  перемещение  $j$ -го узла от внешнего воздействия в основной системе.

Если основная система получена из заданной только путем удаления связей и основными неизвестными являются силы  $X_i$ , то метод расчета называют **методом сил**; если основная система получена из заданной только путем наложения связей и основными неизвестными являются перемещения  $Z_i$ , то метод расчета называется **методом перемещения**.

Существует также **смешанный метод** расчета, при использовании которого основную систему получают путем одновременного удаления и наложения связей (основные неизвестные: силы  $X_i$  и перемещения  $Z_i$ ).



По формулам (1.5.11) находят коэффициенты  $\delta_{ik}$  и свободные члены  $\Delta_{ip}$ . Затем, решая систему (1.5.10), определяют силы  $X_i$ . После этого любую внутреннюю силу  $S_j$  в соответствии с принципом суперпозиции рассчитывают по формуле:

$$S_j = S_{jp}^0 + s_{j1}X_1 + s_{j2}X_2 + \dots + s_{jk}X_k + \dots + s_{jn}X_n, \quad (1.5.15)$$

где  $S_{jp}^0$  - внутренняя сила в  $j$ -м сечении основной системы от нагрузки;  $s_{jk}$  - то же, но от соответствующей силы  $X_k = 1$ .

В соответствии с выражением (1.5.15) строят эпюры внутренних сил в заданной системе.

Правильность определения коэффициентов  $\delta_{ik}$  и свободных членов  $\Delta_{ip}$  можно проверить перемножением эпюр: суммарной единичной эпюры моментов  $\bar{M}_s = \sum \bar{M}_i$  самой на себя и, отдельно, на грузовую эпюру моментов  $M_p^0$ . При этом должны выполняться условия:

$$\sum_{\ell} \int \frac{\bar{M}_s^2 dz}{EI} = \sum \delta_{ik} \quad \text{и} \quad \sum_{\ell} \int \frac{\bar{M}_s M_p^0 dz}{EI} = \sum \Delta_{ip} \quad (1.5.16)$$

Однако такой контроль следует считать этапным, т.к. он не отражает правильности построения единичных и грузовых эпюр.

**Универсальный контроль** расчета системы методом сил заключается в кинематической проверке. Если вычисления правильны, то перемещение любой точки  $k$  по направлению соответствующей удаленной связи должно быть равно нулю, т.е.

$$\Delta_{kp} = \sum_{\ell} \int \frac{\bar{M}_k M_p dz}{EI} = 0, \quad (1.5.17)$$

где  $\bar{M}_k$  - момент в любой (желательно новой) основной системе от силы  $P_k = 1$ , приложенной по направлению удаленной связи;  $M_p$  - момент в заданной системе от заданной нагрузки.

Для рамы с затяжками формула универсального контроля имеет вид

$$\Delta_{kp} = \sum_{\ell} \int \frac{\bar{M}_k M_p dz}{EI} + \sum \frac{X_{зат.} \ell_{зат.}}{EA_{зат.}} = 0, \quad (1.5.18)$$

где  $X_{зат.}$ ,  $A_{зат.}$  - усилия в затяжках и площади их поперечных сечений.

## **Тема 5 ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ ПРОЕКТИРОВАНИЯ МЕТАЛЛОКОНСТРУКЦИЙ**

### **1.6.1 Общие требования к металлическим конструкциям**

Детали, изображаемые на чертежах, должны быть технологичными, с рациональными формами. Размеры и другие обозначения—проставлены грамотно. На таких чертежах чисто конструктивные размеры назначают там, где они действительно обусловлены требованиями и особенностями конструкции машин. Все же остальные конструктивные размеры, полно и точно определяющие деталь, должны быть правильно согласованы с производственными процессами изготовления деталей. Размеры должны быть заданы от таких баз, которые будут наиболее удобны для измерений контролируемых размеров и форм.

Создавая конструкции машин и приборов, обеспечивая на практике их заданные характеристики и надежность работы с учетом экономических показателей, инженер должен уверенно владеть методами изготовления деталей машин и их сборки. Для этого он должен обладать глубокими технологическими знаниями.

При единичном производстве экономически выгоднее применять рамы, сваренные из элементов сортового проката швеллеров, уголков, полос, листов. При серийном выпуске изделий выгоднее применять плиты. В отдельных случаях выбор плиты или рамы определяет конструкция машины и требования точности.

К производственной программе прилагаются чертежи общих видов машин, чертежи сборочные и отдельных деталей, спецификации деталей, а также описание конструкций машин и технические условия на их изготовление и сдачу.

Расчленение на агрегаты и отдельные детали зависит от конструктивных особенностей машины, ее соединений и деталей. Для каждого типа машин это расчленение может иметь индивидуальный характер общих правил расчленения различных машин на отдельные соединения не может быть, так как это расчленение зависит, как указано, от конструкции машины такое расчленение всегда условно и применимо только для данного типа машины.

Процесс компоновки конструкции машины или механизма в основном заключается в выборе унифицированных или функциональных блоков и деталей и сборки их в соответствии с заданной функциональной схемой. В отличие от задачи покрытия электронных схем при компоновке конструкции машины или механизма отсутствует избыточность элементов.

Конструкция машины как объекта проектирования представляет собой сложную систему. Математическое описание конструктивных элементов прежде всего базируется на блочно-иерархическом подходе к процессу проектирования.

Анализ конструкций. Основными задачами одновариантного анализа конструкции машин являются расчеты их статических и динамических выходных параметров. При расчете отдельных деталей станков и машин целью одновариантного анализа будет проверка выполнения условий прочности и жесткости.

При проектировании технических объектов важное значение имеет определение оптимальных вариантов структур и конструкций машин и устройств, параметров схем, режимов работы технологического оборудования и т. д. Под оптимальным будем понимать такой вариант структуры или конструкции, параметры которой удовлетворяют всем системным, конструктивным, технологическим, электрическим и экономическим требованиям ТЗ, а критерий оптимальности, описывающий качество проектируемой структуры или конструкции, принимает наилучшее (минимальное или максимальное) значение.

Однако в практике изображения строительных конструкций, машин и различных инженерных сооружений возникает необходимость в создании дополнительных проекций. Поступают так с единственной целью — сделать проекционный чертеж более ясным, удобочитаемым.

В книге изложены общие принципы рационального конструирования, направленные на повышение работоспособности конструкции машин, увеличение долговечности, облегчение сборки и улучшение условий эксплуатации.

В конструкции машин необходимо соблюдать требования технической эстетики. Машины должны иметь красивый внешний вид, изящную, строгую отделку.

Конструктивная преемственность — это использование при проектировании предшествующего опыта машиностроения данного профиля и смежных отраслей, введение в проектируемый агрегат всего полезного, что есть в существующих конструкциях машин. Почти каждая современная машина представляет собой итог работы конструкторов нескольких поколений. Начальную модель машины постепенно совершенствуют, снабжают новыми узлами и агрегатами, обогащают новыми конструктивными решениями, являющимися плодом творческих усилий и изобретательности последующих поколений конструкторов. Некоторые конструктивные решения с появлением более рациональных решений, новых технологических приемов, с повышением эксплуатационных требований отмирают, а некоторые оказываются исключительно живучими и сохраняются длительное время в таком или почти таком виде, какой им придали создатели.

Практика показывает, что часто незначительными изменениями конструкций машин в целях повышения их технологичности удавалось снизить трудоемкость изготовления в несколько раз.

Сварка является одним из основных технологических процессов в машиностроении и строительстве. Трудно назвать отрасль народного хозяйства, где бы ни применялась сварка. Сварка позволила создать принципиально новые конструкции машин, внести коренные изменения в конструкцию и технологию производства.

Мощность испытательных машин колеблется в пределах от нескольких граммов (для испытания волокон и нитей) до сотен тонн (для испытания крупных конструкций). Машины малой мощности

Кинематическая схема механизма является скелетом реальной конструкции машины. Выбор и проектирование схемы механизма определяет первый и основной этап проектирования машины. Выбор размеров и материала деталей будущей машины определяет следующий этап проектирования конструкций. Проектирование

Особую роль в развитии динамики машин играют вопросы колебаний. С одной стороны, это вопросы борьбы с вибрациями путем создания виброустойчивых конструкций машин и механизмов, с другой стороны — это использование резонансного эффекта вибраций для выполнения различных технологических процессов и создание новых вибрационных механизмов, обладающих требуемыми кинематическими характеристиками.

В машиностроении созданы и освоены новые системы современных, надежных и эффективных машин для комплексной автоматизации производства, что позволило выпускать продукцию высокого качества с наименьшими затратами труда увеличился выпуск автоматических линий, новых видов машины, приборов, аппаратов, отвечающих современным требованиям. Непрерывно совершенствуются конструкции машин и других изделий, технология и средства их производства и контроля, материалы расширилась внутриотраслевая и межотраслевая специализация на основе унификации и стандартизации изделий, их агрегатов и деталей шире используются методы комплексной и опережающей стандартизации внедряются системы управления и аттестации качеством продукции, система технологической подготовки производства.

Процесс проектирования машин необходимо проводить в виде диалога между конструктором и ЭВМ с целью выбора наиболее оптимального варианта конструкции машины и входящих в нее сборочных единиц и деталей с точки зрения производительности, надежности, точности и экономичности изделий. При проведении экспериментально-поисковых

работ необходимо непосредственно с дисплея передавать программу изготовления опытных деталей на станок без чертежа.

Срок морального старения оборудования, приборов и механизмов сократился, что вызвало более быструю их смену. Критерием снятия с производства выпускаемого изделия являются экономические преимущества производства и эксплуатации нового изделия того же назначения, его большие технические возможности, лучшие эргономические и другие показатели качества.

Проблема устранения дополнительных динамических давлений играет большую роль в современной технике, так как в конструкциях машин-двигателей и производственных машин обычно имеется деталь (либо узел деталей), которая с большой угловой скоростью вращается вокруг неподвижной оси (турбинный диск, ротор электрического мотора или генератора, шпиндель токарного или расточного станков и т. д.).

В спецификациях конструкций машины в технических условиях на эксплуатацию указываются тип и марки применяемого смазочного материала.

Кинематические характеристики механизма необходимы не только для оценки качества синтеза схемы механизма, но и для решения задач, связанных с прочностным расчетом и конструированием его звеньев, оценки динамических свойств механизма. Например, для проведения силового расчета механизма необходимо определить силы инерции и сопротивления движению звеньев, для чего должны быть известны скорости и ускорения их. Для вписывания механизма в конструкцию машинного агрегата необходимо знать траекторию движения его звеньев и их положения, определяющие габаритные размеры механизма. Для многих механизмов траектории движения звеньев определяют форму корпусных деталей, являющихся наиболее материалоемкими в машинах (картеры двигателей внутреннего сгорания, корпуса насосов и турбин, головки элеваторов и т. п.).

Создание новых конструкций машин, правильная их эксплуатация и ремонт могут быть обеспечены только при наличии высокоразвитой науки о машинах.

Машины и станки дают примеры весьма сложных несвободных систем с голономными связями. Число степеней свободы таких систем обычно не превышает единицы.

Основой для формирования проектных гипотез обычно служит базовая модель, т. е. действующий образец конструкции машины или отдельного узла. При разработке нового конструктивного образца, отвечающего требованиям технического задания (ТЗ), используются данные по результатам эксплуатации и испытаний базовой модели.

Одной из наиболее частных причин преждевременного выхода машины из строя является коррозия. В конструкции машин, особенно работающих на открытом воздухе, в условиях повышенной влажности или в химически активных средах, следует предусматривать эффективные средства защиты, применяя гальванические покрытия (хромирование, никелирование, омеднение), осаждение химических пленок (фосфатирование, оксидирование), нанесение полимерных пленок (капронизация, политенизация).

Совершенствование машин нередко требует последующего введения дополнительных агрегатов (редукторов, коробок скоростей, средств автоматизации). Необходимо обеспечить их установку без ломки конструкции машины, оставляя для них место и в некоторых случаях заранее предусматривая привалочные поверхности и крепежные точки.

### **1.6.2 Расчет на статическую прочность по допускаемым напряжениям**

Расчет конструкций в упругой постановке задачи, как известно, проводится по *методу допускаемых напряжений*. Данный подход при расчете статически определимых и статически неопределимых систем не позволяет найти их истинный запас прочности, так как исчерпание несущей способности конструкции сопровождается появлением в ней пластических деформаций. Для выявления истинного запаса несущей способности конструкции необходимо

проводить расчет с учетом упруго-пластических деформаций. Однако сложность аппарата теории пластичности не позволяет решать широкий круг очень важных инженерных задач. В этом отношении расчет конструкций по *методу предельного равновесия*, позволяет дополнить существующий пробел по данному вопросу. Поэтому, метод расчета конструкций по предельным состояниям, по сравнению с упругим расчетом, является важным этапом для оценки истинных запасов прочности конструкции. При этом следует отметить, что расчет конструкций по методу предельных состояний является приближенным в том контексте, что, в отличие от упруго-пластического расчета, не позволяет описать процесс перехода от упругого к предельному состоянию.

Если при проектировании инженерных сооружений необходимо знать процесс формирования напряженно-деформированного состояния вплоть до исчерпания несущей способности конструкций, метод предельного равновесия неприменим. Однако, в тех случаях, когда необходимо определить только несущую способность конструкции этот метод является очень эффективным и имеет важное практическое значение.

При расчете конструкций по допускаемым напряжениям в упругой постановке задачи, как известно, предельной нагрузкой считается та, при которой наибольшее напряжение  $\sigma_{max}$ , хотя бы в одной точке опасного сечения достигает величины  $\sigma_T$ . При этом вводится понятие о допускаемом напряжении, определяемом по формуле  $[\sigma] = \sigma_T/n$ , где  $n$  - коэффициент запаса.

При расчете конструкций по методу предельного равновесия предполагается двухстадийный характер деформирования материала: в первой стадии материал подчиняется закону Гука, пока напряжения не достигнут предела текучести; а затем во второй стадии, предполагая, что в нем в определенной стадии нагружения в опасных сечениях беспредельно развиваются пластические деформации при постоянном напряжении. С появлением пластических деформаций нарушается линейная зависимость между напряжениями и деформациями по закону Гука, и все расчетные формулы, вывод которых основан на этой зависимости, становятся неприменимыми. Нарушается прямая пропорциональность между действующими на элемент конструкции нагрузками и возникающими в нем напряжениями и деформациями. Становится неприменимым один из основных принципов сопротивления материалов – принцип независимости действия сил.

Так как зависимость между напряжениями и деформациями становится нелинейной и для каждого материала определяется видом диаграммы растяжения, единых для различных материалов расчетных формул, учитывающих пластические деформации, получить невозможно. При выводе расчетных формул диаграммы растяжения упрощают (схематизируют). Для материалов, имеющих площадку текучести, например для низкоуглеродистых сталей условная диаграмма зависимости напряжения от деформации состоит из наклонного и горизонтального участков и носит название *диаграммы идеально упруго-пластического тела*, или *диаграммы Прандтля*.

Суть метода состоит в том, что конструкция рассматривается в момент, непосредственно предшествующий ее разрушению, когда еще выполняются условия равновесия для внутренних и внешних сил, достигающих предельных значений. Отсюда и произошло название метода предельного равновесия.

Реальные конструкции представляют собой в большинстве случаев многократно статически неопределимые системы, материал которых обладает свойством пластичности. Благодаря этому конструкции обладают дополнительными резервами несущей способности. После того, как в наиболее опасных сечениях напряжения достигают предела текучести, в отличие от статически определимых систем, статически неопределимые системы могут нести дополнительные нагрузки за счет перераспределения внутренних сил.



Для пластичного материала предельным обычно считается, напряженное состояние, которое соответствует возникновению заметных остаточных деформаций, а для хрупкого - такое, при котором начинается разрушение материала.

Для выполнения расчетов на прочность по методу предельного равновесия вводятся понятия коэффициента *запаса прочности* и *эффективное напряжение*.

Коэффициент запаса при данном напряженном состоянии это число, показывающее во сколько раз следует одновременно увеличить все компоненты тензора напряжений, чтобы оно стало предельным.

Эквивалентное напряжение  $\sigma_{\text{ЭКВ}}$  - это такое напряжение, которое следует создать в растянутом образце, чтобы его напряженное состояние было равноопасно с заданным.

Для пластичных материалов критерием наступления предельного состояния принимается состояние, при котором максимальные касательные напряжения достигают некоторого предельного значения:

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = 2\tau_{\text{max}} = \sigma_1 - \sigma_3. \quad (20.1)$$

Гипотеза максимальных касательных напряжений, приемлемая для пластичных материалов, обнаруживает заметные погрешности для материалов, имеющих различные механические характеристики при сжатии и растяжении.

В таких случаях применяется энергетическая гипотеза, согласно которой предельное состояние в точке наступает тогда, когда энергия формоизменения

$$U_{\text{пр}} = \frac{1 + \mu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \quad (20.2)$$

принимает некоторое заранее заданное значение. Это предельное значение для  $U_{\text{пр}}$  определяется следующим образом. Для простого растяжения выражение (20.2) принимает вид:

$$U_{\text{пр}} = \frac{1 + \mu}{6E} 2\sigma^2.$$

В сложном напряженном состоянии  $U_{\text{пр}}$  принимает значение

$$U_{\text{пр}} = \frac{1 + \mu}{6E} 2\sigma_{\text{ЭКВ}}^2. \quad (20.3)$$

При совместном рассмотрении (20.2) и (20.3) получим:

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad \text{или}$$

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)}.$$

Следует помнить, что расчет по методу предельного равновесия можно выполнять только для элементов конструкций, изготовленных из пластичных материалов, допускающих пластические деформации в наиболее напряженных точках без появления в них трещин. Недопустимо появление пластических деформаций в деталях машин, длительно работающих при переменных, циклических напряжениях, так как при этом резко снижается число циклов до разрушения, т.е. долговечность детали.

### ***Основы теории пластичности***

Рассмотрим основные особенности характера деформирования материалов при их нагружении в упруго-пластической стадии. При напряжениях, превышающих предел упругости, после разгрузки наблюдаются заметные остаточные деформации. Свойство материалов относительно неспособности восстанавливать первоначальные размеры образцов после их разгрузки за счет возникновения остаточных деформаций, называется *пластичностью*.

Физические соотношения, взятые в основу теории, позволяющие определить переход напряженно-деформированного состояния от упругой стадии к упруго-пластической и описать процесс деформирования тела с учетом пластических свойств материалов, называются *теорией пластичности*.

Учет пластических свойств материалов является чрезвычайно важным этапом в плане совершенствования методов расчета конструкций. Если конструкции из хрупких материалов вплоть до стадии разрушения при действии внешних сил не развивают заметных пластических деформаций, то для конструкций из пластических материалов основные деформации формируются именно за счет возникновения пластических деформаций. Так например, полные деформации, соответствующие концу площадки текучести на реальной диаграмме, для многих материалов в 30 - 40 раз превышают деформации, соответствующие концу линейного участка.

В настоящее время существуют две теории пластичности. Их различие заключается в конкретной записи физических соотношений.

В *деформационной теории пластичности*, разработанной А.А.Ильюшиным, взамен закона Гука устанавливаются новые соотношения между напряжениями и деформациями.

Во второй теории - *теории течения*, физические соотношения связывают напряжения с приращениями деформаций или скоростями деформаций.

Как показывают экспериментальные исследования, деформационная теория пластичности справедлива при относительно небольших пластических деформациях для простого нагружения, т.е. когда все внешние нагрузки изменяются пропорционально во времени.

Теория течения является эффективным при изучении процессов, связанных с возникновением больших деформаций и при сложном нагружении, т.е. когда нагрузки, прикладываемые к телу, изменяются во времени независимо друг от друга.

Здесь ограничимся рассмотрением только деформационной теории пластичности.

Процесс деформирования материалов можно условно разделить на две стадии. Начальная стадия - *упругое деформирование*. Компоненты тензоров напряжений и деформаций при этом связаны законом Гука. Для реальных инженерных задач, связанных с определением напряженно-деформированного состояния тела, как в упругой, так и в *упруго-пластической стадии деформирования*, предварительно необходимо установить: во-первых, условие перехода от упругой стадии деформирования к пластической стадии и, во-вторых, установить физические зависимости во второй стадии деформирования.

Условия перехода от упругого состояния к пластическому могут быть определены по формулам одной из гипотез метода предельного равновесия.

Как это было изложено в пункте «Основные положения метода предельного равновесия», наиболее приемлемыми являются гипотезы *максимальных касательных напряжений* и *энергии формоизменения*. При этом, для построения соотношений пластичности гипотеза энергии формоизменения является наиболее приемлемой, согласно которой переход из упругого состояния в пластическое происходит тогда, когда величина

$$\sigma_i = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)} \quad (20.4)$$

называемая **интенсивностью напряжений**, достигает определенной величины, равной пределу текучести материала  $\sigma_T$  при одноосном напряженном состоянии, т.е.

$$\sigma_i = \sigma_T. \quad (20.5)$$

С учетом физических соотношений (10.18) и (10.19) выражение (20.4) принимает вид:

$$\sigma_i = E\varepsilon_i. \quad (20.6)$$

где принято обозначение:

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{2(1+\mu)} \sqrt{(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})^2 + (\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{zz})^2 + (\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{zz})^2 + \frac{3}{2}(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)}. \quad (20.7)$$

называемое **интенсивностью деформаций**.

Следовательно, соотношение (20.6), следует рассматривать как одну из форм выражения обобщенного закона Гука.

Выражения интенсивности напряжений и интенсивности деформаций, записанные через главные напряжения и деформации можно представить в виде:

$$\sigma_i = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2},$$

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot (1 + \mu)} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2}. \quad (20.8)$$

В основу деформационной теории пластичности заложены следующие гипотезы.

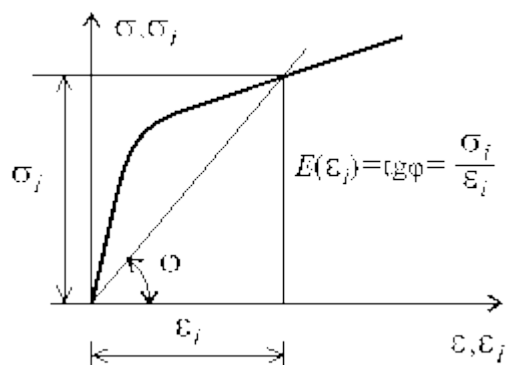


Рис. 20.1

Первая гипотеза устанавливает связь между интенсивностью напряжений и интенсивностью деформаций (рис. 20.1), и гласит, что она не зависит от вида напряженного состояния, т.е.

$$\sigma_i = E(\varepsilon_i)\varepsilon_i. \quad (20.6)$$

где  $E(\varepsilon_i)$  - является переменной величиной и зависит от значения  $\varepsilon_i$ . Соотношение (20.9) является единым для всех видов напряженного состояния.

Согласно второй гипотезе - изменение объема  $e = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$  является чисто упругой. Это положение хорошо согласуется с экспериментальными данными, так как при всестороннем сжатии в материалах заметных пластических деформаций не обнаруживается.

При деформировании материалов пластические деформации, как правило, существенно больше упругих и, учитывая, что объемная деформация  $e$  является величиной порядка упругих удлинений, поэтому принимается, что при пластическом деформировании изменение объема пренебрежительно мало. На основании этого положения вводится гипотеза, что в пластической стадии деформирования материал считается несжимаемым.

Откуда следует, что в пластической стадии деформирования можно коэффициент Пуассона принимать равным  $\mu = 0,5$ .

Сначала определим физические соотношения при одноосном растяжении, когда

$$\sigma_{xx} = \sigma, \quad \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0,$$

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon, \quad \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = -\mu\varepsilon, \quad \gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0.$$

Из (20.4) и (20.7), соответственно получим  $\varepsilon_i = \varepsilon$  и  $\sigma_i = \sigma$ , что подтверждает первое положение теории, что аналитическое выражение (20.9) едино для всех видов напряженного состояния. Данное обстоятельство позволяет определить переменный модуль деформирования  $E(\varepsilon_i) = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}$  по диаграмме  $\sigma \sim \varepsilon$ , т.е.  $E(\varepsilon_i) = E(\varepsilon) = \frac{\sigma}{\varepsilon}$ .

В заключение, аналогично соотношениям (10.18)-(10.19) запишем физические соотношения между напряжениями и деформациями при пластической стадии деформирования тела:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} \left[ \sigma_{xx} - \frac{1}{2} (\sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \right];$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} \left[ \sigma_{yy} - \frac{1}{2} (\sigma_{xx} + \sigma_{zz}) \right];$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} \left[ \sigma_{zz} - \frac{1}{2} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \right];$$

$$\gamma_{xy} = \frac{3\varepsilon_i}{\sigma_i} \tau_{xy};$$

$$\gamma_{xz} = \frac{3\varepsilon_i}{\sigma_i} \tau_{xz}; \quad (20.10)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{3\varepsilon_i}{\sigma_i} \tau_{yz}.$$

где  $G(\varepsilon_i) = \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i}$  является модулем деформации при сдвиге, который определяется следующим образом:

$$G(\varepsilon_i) = \frac{E(\varepsilon_i)}{2(1 + \mu)} = \frac{1}{3} E(\varepsilon_i) = \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i}. \quad (20.11)$$

Приведенные физические соотношения деформационной теории пластичности являются справедливыми при простых нагружениях, т.е. только в тех случаях, когда все внешние силы на всех этапах нагружения во времени изменяются пропорционально. В данном случае заметим, что главные оси напряженного состояния при изменении внешних сил сохраняют свое направление независимо от стадии деформирования.

Для наглядности ниже рассмотрим наиболее представительные примеры расчета конструкций по методу предельного равновесия.

### 1.6.3 Основы расчетов на прочность и жесткость элементов конструкций

Обеспечить надежное сопротивление элемента или конструкции в целом - означает обеспечить их прочность, жесткость, устойчивость и выносливость.

Прочность - способность тела сопротивляться внешним нагрузкам.

Жесткость - способность тела сопротивляться изменению своих размеров и формы под воздействием внешних нагрузок. (В отличие от теоретической механики в сопротивлении материалов рассматриваются деформируемые тела, то есть тела, которые изменяют свои размеры и форму под нагрузкой).

Устойчивость - способность тела под нагрузкой сохранять первоначальную форму устойчивого равновесия.

Выносливость - способность материала сопротивляться переменным силовым воздействиям длительное время.

Показателем надежности является коэффициент запаса  $n$ :

$$n = \frac{P_{кр}}{P_{max}}$$

где  $P_{кр}$  - критическое (предельное) значение параметра (нагрузка, напряжение).  $P_{max}$  - наибольшее значение данного параметра в рабочих условиях.

Условие надежности имеет вид:

$$n \geq [n],$$

здесь  $[n]$  - допускаемое или нормируемое значение коэффициента запаса, которое назначают, исходя из практического опыта создания аналогичных конструкций, уровня техники. Для каждой области техники  $[n]$  имеет свои границы значений. Так, например, при проектировании стационарных долговременных сооружений  $[n] = 2 \dots 5$ , в авиационной технике  $[n] = 1,5 \dots 2$ .

#### Моделирование объекта исследования

Объектом исследования, как было отмечено выше, является элемент конструкции, который может быть изготовлен из любого материала, отличаться большим многообразием формы, на него могут действовать различные нагрузки, а также, в зависимости от перечисленного, может быть и разным характер разрушения.

Для того чтобы охватить отмеченное многообразие материалов, формы, условий нагружения и разрушения, необходимо их модельное представление, которое должно учитывать наиболее значимые и отбрасывать несущественные факторы. Учет всех факторов, конечно, невозможен из-за их неисчерпаемости, поэтому любая модель - это приближенное в той или иной степени представление объекта. Таким образом, моделирование необходимо, чтобы на его основе получить расчетные зависимости, справедливые для достаточно широкого диапазона изменения соответствующих факторов.

Модель материала. Материал детали представляют однородной, сплошной изотропной средой. Это позволяет рассматривать тело как непрерывную среду и применять методы математического анализа.

Однородность означает, что тело состоит из материала одной природы, при этом результаты исследования элемента объема можно распространить на все тело, и свойства поверхности можно считать тождественными свойствам внутренним объемам тела.

Изотропия - независимость свойств материала от направления.

Модель материала наделяется такими физическими свойствами, как упругость, пластичность, хрупкость и ползучесть.

Упругость - способность тела восстанавливать первоначальную форму и размеры после снятия нагрузки.

Пластичность - способность тела сохранять значительные деформации (остаточные) после разгрузки.

Хрупкость - способность тела разрушаться без образования заметных остаточных деформаций.

Ползучесть - изменение во времени деформаций и напряжений при действии на тело постоянной внешней нагрузки.

Отмеченные физические свойства зависят от условий окружающей среды (температуры, химического свойства, уровня радиации и др.).

Модель формы. Для оценки прочности и жесткости элементов конструкций с целью упрощения расчетов вводят три типа формы тела: стержень; пластину (оболочку); массив.

Стержень - тело, имеющее поперечные размеры, несоизмеримо малые с его длиной. Стержень может иметь прямолинейную или криволинейную ось, постоянные или переменные по длине размеры и форму сечения.

Пластина (оболочка) - тело, имеющее размеры в двух направлениях, несоизмеримо большие, чем в третьем, и ограничивающиеся двумя плоскими (криволинейными) поверхностями.

Массив - тело, имеющее размеры, соизмеримые в трех направлениях.

Модели нагружения. Сила - это мера механического взаимодействия между телами. Силы подразделяются на внешние и внутренние.

Внешние силы - нагрузки, действующие на тело при его взаимодействии с другими телами.

Внутренние силы - силы взаимодействия между частями отдельного тела, оказывающие противодействие внешним силам, так как под влиянием внешних сил тело деформируется. Внутренние силы распределены в одних случаях по всей площади поперечного сечения тела равномерно, а в других - неравномерно. Если тело внешними силами не нагружено, то принимается, что внутренние силы отсутствуют.

Модели разрушения. В зависимости от условий нагружения выделяют статическое и усталостное разрушение.

## **Тема 6. МАТЕРИАЛЫ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЙ. УСТАЛОСТНАЯ ДОЛГОВЕЧНОСТЬ**

### **2.1.1. Требования к материалам металлических конструкций и их характеристики**

Металлы, применяемые в металлоконструкциях СДМ, должны обладать механическими свойствами, обеспечивающими долговечную и надежную работу конструкции. Они должны быть прочными, упругими, сопротивляться циклическим и ударным воздействиям при положительных и отрицательных температурах, обладать коррозионной стойкостью и хорошей свариваемостью.

Указанным требованиям отвечают стали с содержанием углерода не более 0,22...0,25%. При большем содержании углерода, несмотря на более высокую прочность, для несущих конструкций не применяют из-за плохой свариваемости и склонности к хрупкому разрушению.

Алюминиевые и титановые сплавы для несущих конструкций применяют ограниченно.

Углеродистые стали обыкновенного качества поставляются заказчику с гарантией механических свойств и (или) с гарантийным химическим составом. Сталь группы А поставляются с гарантией механических свойств, группы Б – с гарантией механических свойств и химического состава.

Применение низколегированных сталей по сравнению с углеродистыми позволяет снизить массу конструкций на 20...30% и увеличить их срок службы.

Кроме того, рекомендуются термочувствительные, углеродистые стали. Их недостаток – разупрочнение из-за нагрева при сварке.

Механические свойства сталей характеризуются временным сопротивлением разрыву  $\sigma_B$ , модулем упругости  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа, пределом текучести  $\sigma_T$ , относительным удлинением  $\delta$ , ударной вязкостью  $a$ , пределом выносливости  $\sigma_{-1}$  и др.

### **2.1.2. Рекомендации по выбору стали с учетом условий эксплуатации.**

При выборе марки стали необходимо учитывать возможность работы СДМ в различных климатических зонах.

Нужно учитывать стоимость материалов, трудоемкость изготовления конструкций из них. Например, прокат из сталей 09Г2, 09Г2Д приблизительно на 30% прочнее и на 17% дороже проката из стали Ст3, а сталь 10ХСНД на 70% прочнее стали Ст3 и на столько же дороже.

При понижении температуры и увеличении скорости деформации предел текучести стали увеличивается и становится больше предельного сопротивления отрыву  $\sigma_{отр}$ , что соответствует к переходу от пластического к упругому разрушению. Температура  $t_{кр}$ , при которой  $\sigma_T = \sigma_{отр}$  (рис.2.1.1).

При  $t < t_{кр}$  сталь склонна к хрупкому разрушению. При этом резко снижается долговечность конструкции и возникает риск внезапной поломки при наличии дефектов сварки, микротрещин и т.п.

Институтом электросварки им. Е.О. Патона разработаны рекомендации по выбору сталей для сварных конструкций. Для основных несущих конструкций, работающих при  $t = -40...-50^\circ\text{C}$  при толщине проката до 20...40 мм рекомендуются низколегированные стали 09Г2С, 09Г2, 10Г2С1, 15ХСНД, 10ХСНД, 14Г2АФ, 15Г2АФДСП.

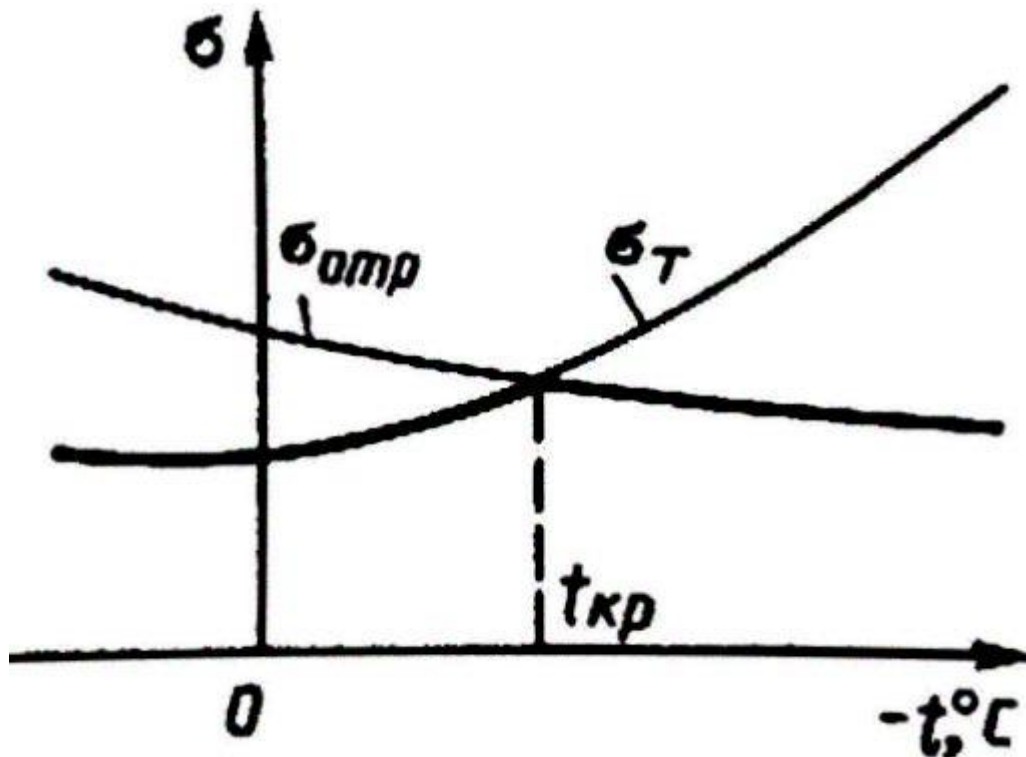


Рис.2.1.1

### 2.1.3. Сортамент

**Сортамент** – совокупность типоразмеров прокатных профилей, выпускаемых металлургической промышленностью: двутавров, швеллеров, стали угловой равнополочной и неравнополочной, стальных труб, листовой и широкополосной стали (по соответствующим ГОСТам).

Профили в виде двутавров и швеллеров первоначально были предусмотрены для строительных конструкций и не рассчитаны для работы под нагрузками, действующих в различных плоскостях. Эти профили могут использоваться как самостоятельно, так и в составе более сложных сечений (рис.2.1.2, а-в).

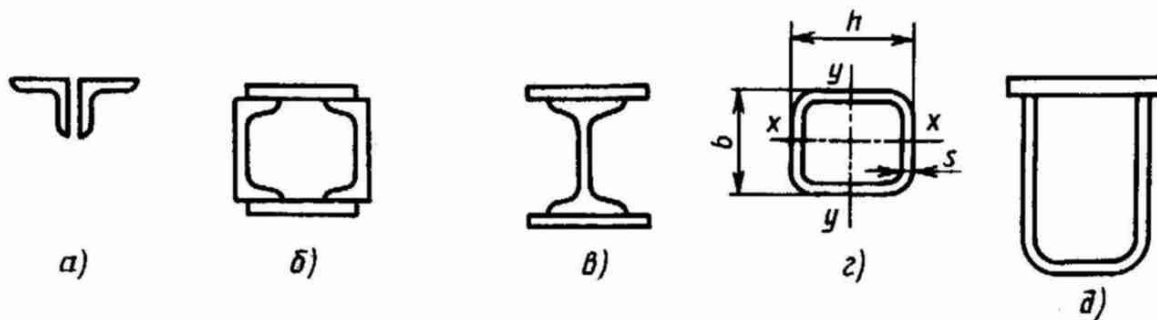


Рис.2.1.2

Наиболее распространены в металлоконструкциях СДМ гнуто-сварные и сварные профили, изготавливаемые из листовой стали (рис.2.1.2, з, д).

Металлургическая промышленность выпускает гнуто-сварные замкнутые профили коробчатого сечения квадратной и прямоугольной форм.



### 2.2.1. Нагрузки, действующие на металлоконструкции машин

Нагрузки, действующие на металлоконструкции машин делят на *постоянные* и *временные*.

*Постоянные нагрузки* – силы тяжести сооружений, *временные* – длительные (вес стационарного оборудования; давление жидкости, газа, сыпучих тел; температурные воздействия; нагрузки от мостовых кранов); *кратковременные* (вес людей нагрузки от ПТО, снеговые, ветровые нагрузки); и особые нагрузки (сейсмические, взрывные и т.п.).

Кроме того, нагрузки различают *нормативные* и *расчетные*. Нормативные – устанавливаются нормативами в виде числовых значений и формул для расчета. Расчетные принимаются равными соответствующим нормативным нагрузкам, умноженным на коэффициент перегрузки  $n$ , учитывающий возможность повышения нормативной нагрузки. При расчетах на усталостную долговечность принимают  $n=1$ , а при расчетах на прочность  $n > 1$ .

При проектировании несущих конструкций машин нагрузки разделяют на *основные (нормативные)*, *случайные* и *аварийные*.

К основным относят нагрузки, действующие на металлоконструкцию в условиях ее нормальной эксплуатации; к случайным – совокупность одновременно действующих нагрузок в сочетании, наихудшем для прочности рассчитываемого элемента конструкции; к аварийным – нагрузки, вероятность появления которых мала.

При проектировании башенных кранов, например, основными нагрузками являются силы тяжести крана и груза, ветровая и испытательная нагрузка. Случайными являются нагрузки, характеризующиеся некоторым статическим распределением (возможное передвижение груза; нагрузка, колебанием крана при пульсации динамического давления ветра; динамические нагрузки, возникающие при подъеме и опускании груза, при повороте, разгоне и торможении крана).

Для выполнения проектных расчетов принципиальное значение имеет правильный выбор расчетных сочетаний действующих нагрузок.

Существуют, например, нормы расчетов башенных кранов.

Для дорожных машин таких норм не существует и разработчики вынуждены самостоятельно определять комбинации расчетных нагрузок.

Общий принцип определения расчетных сочетаний нагрузок состоит в том, что проектируемая конструкция не должна разрушаться от однократного действия случайных нагрузок и длительного действия основных. Поэтому при расчетах на прочность и устойчивость исходят из наиболее неблагоприятного сочетания случайных и основных нагрузок (максимальных нагрузок). При расчетах же на усталость исходят из эквивалентной нагрузки – условной нагрузки с постоянной асимметрией цикла, эквивалентной по интенсивности накопления усталостных накоплений действительной нагрузке.

Определим нагрузки, действующие на зуб рыхлителя (рис.2.2.1,а).

Основными нагрузками, действующими на зуб являются горизонтальная  $P_G$  и вертикальная  $P_B$  составляющие усилия копания. При повреждении зуба в грунте сила копания и ее составляющие периодически изменяются во времени  $t$  по значению из-за выкалывания перед зубом элементов грунтовой стружки. В момент скола усилие копания снижается на 30...50% по сравнению с максимальным значением. Составляющие  $P_G$  и  $P_B$  можно определить по формулам (см. литературу по теории резания грунтов).

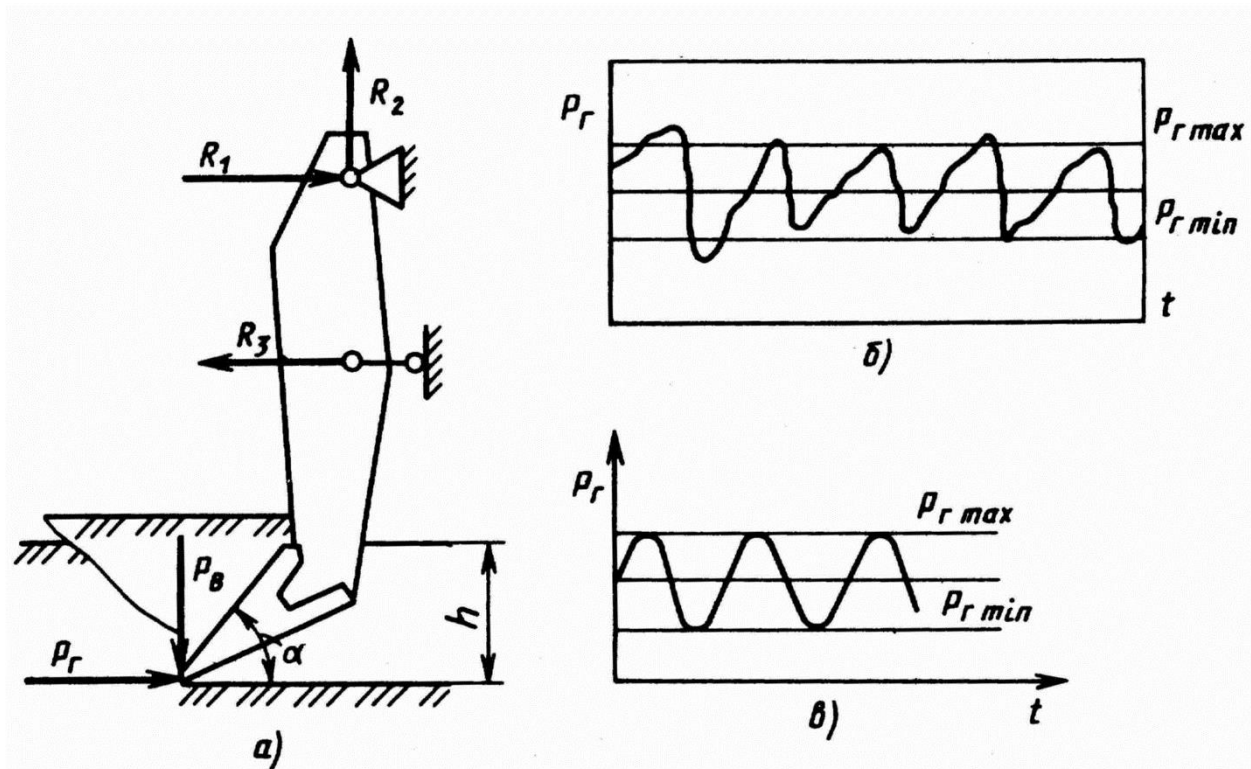


Рис.2.2.1

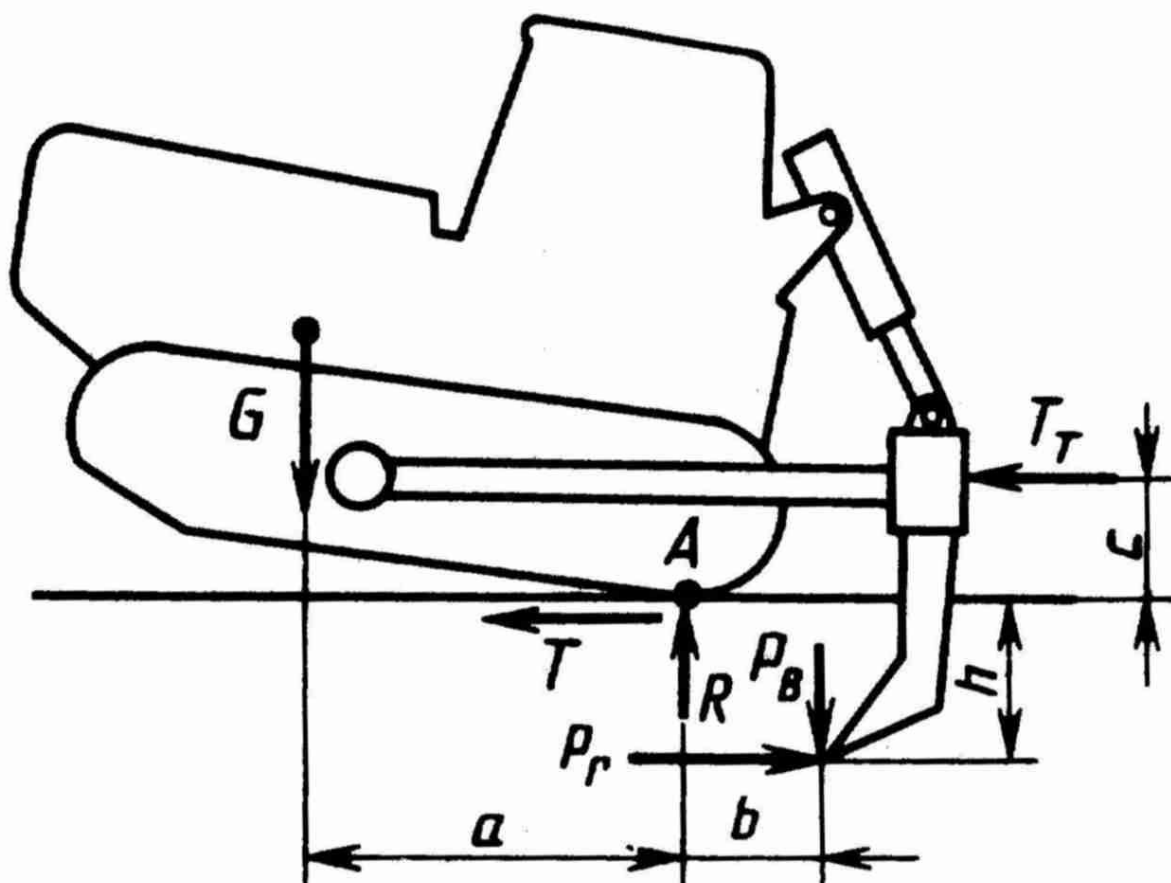


Рис.2.2.2

Для расчета на усталость основную нагрузку (рис.2.2.1,б) заменяют эквивалентной синусоидальной нагрузкой (рис.2.2.1,в), коэффициент которой  $R = \frac{R_{r\min}}{R_{r\max}}$ ,  $R_{r\min}$  и  $R_{r\max}$  - минимальное и максимальное значение горизонтальной составляющей усилия копания. Определив эквивалентную нагрузку, можно выполнять стандартный расчет на усталость (будет рассматриваться далее).

Для расчета на усталость необходимо выбрать наиболее опасные сочетания нагрузок, действующих на зуб. Они возникают при реализации максимальной мощности базового трактора и трактора – толкача, когда зуб упирается в непреодолимое препятствие.

Расчет выполняют для максимальных положений рабочего оборудования, при которых в элементе конструкции можно определить появление наибольших напряжений. Например, в случае упора зуба в препятствие (рис.2.2.2). В этом положении  $P_r$  равняется сумме максимальной тяговой силы  $T$  базового трактора и силы  $T_T$  трактора – толкача:

$$P_r = T + T_T,$$

а вертикальная нагрузка  $P_B$  из уравнения моментов  $\sum M_A = 0$ :

$$P_B = \frac{1}{b}(Ga + P_r h + T_T c) / n.$$

### 2.2.2. Расчет на статическую прочность по допускаемым напряжениям

Существует три метода расчета металлоконструкций машин: по допускаемым напряжениям, по предельным состояниям и на надежность.

В основе расчета по допускаемым напряжениям лежит гипотеза абсолютно упругого тела, для каждого закон Гука считается справедливым до начала текучести.

Основная формула расчета:

$$\sigma \leq [\sigma] = \frac{\sigma_n}{n}, \quad (2.2.1)$$

где  $\sigma$  - напряжение от действия основных, случайных или аварийных нагрузок;

$[\sigma]$  - допускаемое напряжение;

$\sigma_n$  - предельное напряжение ( $\sigma_T$  или  $\sigma_B$ );

$n$  – коэффициент запаса прочности.

Коэффициент запаса прочности устанавливается на основании опытных данных применительно к конкретным видам машин.

При расчетах на устойчивость или усталость формула (2.2.1) принимает вид:

$$\sigma \leq \varphi[\sigma] \text{ или } \sigma \leq \gamma[\sigma], \quad (2.2.2)$$

где  $\varphi$  и  $\gamma$  - коэффициенты, учитывающие соответственно снижение допускаемого напряжения в задачах устойчивости и усталостного разрушения конструкции.

При расчете по допускаемым напряжениям применяется единственный коэффициент запаса прочности, который не оценивает изменчивость и статистическую природу различных параметров, определяющих поведение конструкции. Это может привести к неправильной оценке несущей способности конструкции.

### 2.2.3. Расчет по предельным состояниям.

Метод основан на анализе процессов перехода конструкции в одно из состояний, при котором они теряют способность сопротивляться внешним воздействиям или перестают удовлетворять предъявленным к ним требованиям функционального требования.

Применительно к металлоконструкциям дорожно–строительных машин различают два вида предельных состояний:

1. *Состояние по несущей способности* (прочности, устойчивости и усталости), при достижении которого конструкция теряет возможность сопротивляться внешним воздействиям или в ней возникают такие остаточные изменения, при которых она перестает удовлетворять предъявленным к ней эксплуатационным требованиям.

2. **Состояние по развитию чрезмерных деформаций** от действия статических или динамических нагрузок, при достижении которого в конструкции, сохраняющей прочность и устойчивость, появляются обратимые деформации или колебания, вследствие чего конструкция перестает удовлетворять предъявляемым требованиям.

Расчетной для оценки предельного состояния металлоконструкции по несущей способности является формула:

$$\sum \sigma_i n_i \leq \sigma_T k k_y = R k_y, \quad (2.2.3)$$

где  $\sigma_i$  - напряжение в данной точке, вызываемое одной из рассчитанных нагрузок,

$n_i$  - коэффициент возможного повышения расчетной нагрузки (собственного веса и веса груза, статических и динамических воздействий),

$\sigma_T$  - нормативный предел прочности (для стали предел текучести),

$k$  - коэффициент, учитывающий случайное изменение сопротивления материала (для стали Ст3  $k=0,9$ , для более прочных сталей  $k=0,85 \dots 0,75$ , для стального литья  $k=0,75$ ),

$R$  - расчетное сопротивление материала,

$k_y$  - коэффициент условий работы конструкций ( $k_y = k_{y1} k_{y2}$ , где  $k_{y1}$  - коэффициент ответственности, значение которого зависит от области применения крана и целевого назначения элемента его конструкции  $k_{y1}=0,85 \dots 1,05$ ;  $k_{y2}$  - коэффициент, учитывающий особенности работы элемента или части металлоконструкции  $k_{y2}=0,8 \dots 0,9$ ).

Коэффициенты возможной перегрузки  $n_i$  для бетонных кранов определяется по ГОСТу, а для машин других типов по соответствующим нормам, где значения этих коэффициентов дифференцированы по типам нагрузки: для веса конструкции  $n_1=1,1$ , снеговой нагрузки  $n_2=1,4$ , ветровой  $n_3=1,2$ , весов оборудования, расположенного на конструкциях  $n_4=1,0 \dots 1,3$ , веса поднимаемого груза  $n_5=1,05 \dots 1,4$  (большие значения для меньшей грузоподъемности), вертикальных динамических нагрузок  $n_6=1,05 \dots 1,04$ , горизонтальных динамических нагрузок  $n_7=1,1$  и т. д.

Например, при расчете металлоконструкции стрелы крана (рис.2.2.3) суммарное расчетное напряжение в опасной точке А сечения 1-1 консоли:

$$\sum \sigma_i n_i = 1,1\sigma_k + 1,3\sigma_q + 1,3\sigma_{ин.в} + 1,1\sigma_{ин.г} + 1,1\sigma_{ин.ж},$$

де  $\sigma_k$  - напряжение от веса конструкции;

$\sigma_q$  - напряжение от веса  $Q$  поднимаемого груза;

$\sigma_{ин.в}$  - напряжение от вертикальной силы инерции;

$\sigma_{ин.г}$  - напряжение от горизонтальной силы инерции (в плоскости подвеса и стрелы);

$\sigma_{ин.ж}$  - напряжение от горизонтальной силы инерции (в плоскости перпендикулярной плоскости подвеса и стрелы).

При расчете по второй группе предельных состояний (по развитию чрезмерных деформаций или колебаний) предельное условие не отличается в принципе от соответствующей проверки по методу допускаемых напряжений; оно имеет вид:

$$t_p \leq [t] \text{ или } \frac{f}{l} \leq \left[ \frac{f}{l} \right], \quad (2.2.4)$$

где  $t_p$  и  $[t]$  - соответственно расчетное и допускаемое время затуханий колебаний конструкций;

$\frac{f}{l}$  и  $\left[ \frac{f}{l} \right]$  - расчетное и допускаемое значения относительного прогиба ( $f$  - прогиб,  $l$  - длина конструкции).

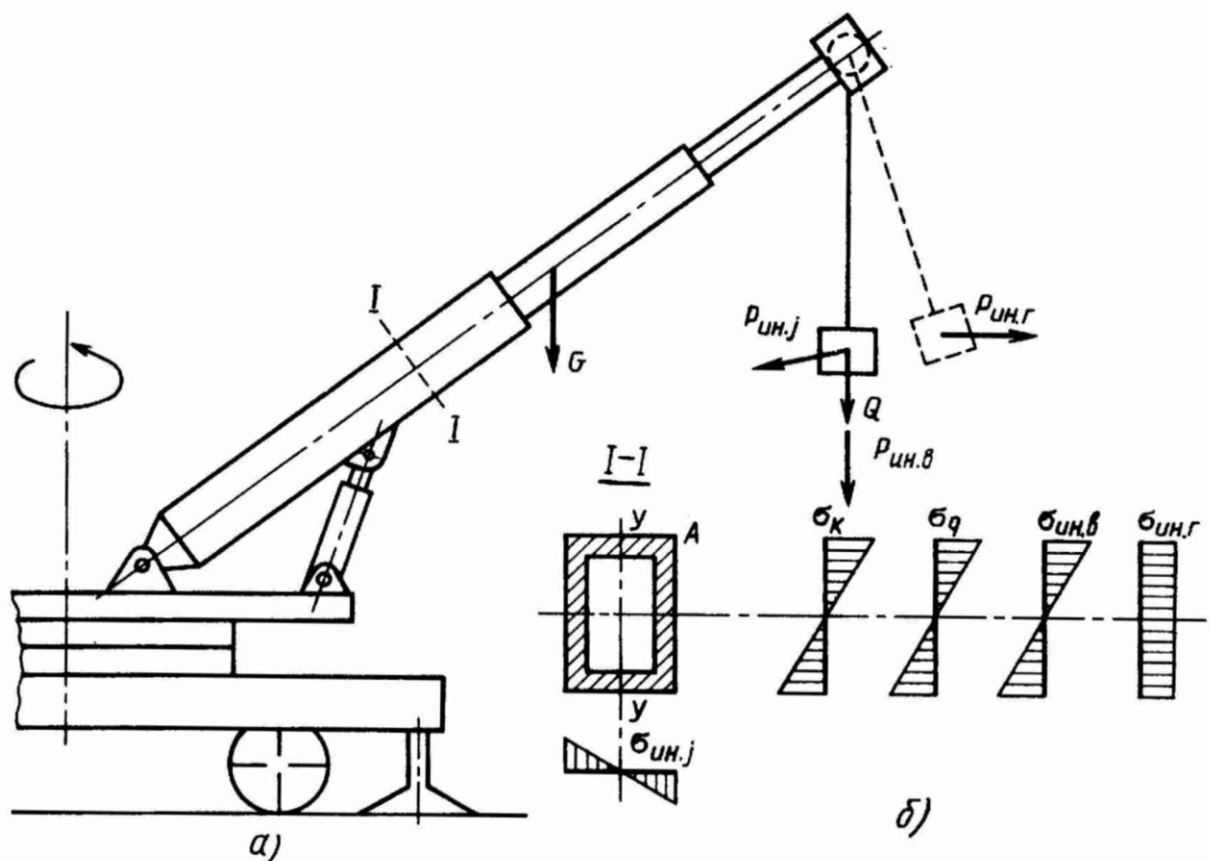


Рис.2.2.3

Расчеты по второму предельному состоянию проводят при коэффициентах перегрузки, равных единице, т.е. нормативным нагрузкам.

При расчетах на усталость коэффициент перегрузок отличен единицы только для постоянных нагрузок, а для изменяющихся нагрузок коэффициенты перегрузок  $n_i = 1$ .

#### 2.2.4. Расчет на надежность.

Металлоконструкции СДМ рассчитывают на надежность, исходя из следующего условия. Если в течение некоторого срока службы  $T_{сл}$  возможность того, напряжение в конструкции  $\sigma$  не превысит характеристику прочности  $R$  не менее чем заданная вероятность работы  $P_{T_{сл}}$ , то надежность конструкции обеспечена. Это условие имеет вид:

$$P(\sigma \leq R)_{T_{сл}} > P_{T_{сл}}. \quad (2.2.5)$$

Расчет на надежность является развитием метода предельных состояний. Он пока не получил широкого распространения. В настоящее время нет достаточной информации для определения коэффициентов, характеризующих возможные перегрузки для различных типов строительных и дорожных машин. Поэтому чаще всего ведут расчеты методом допускаемых напряжений.

#### 2.2.5. Основы расчета конструкций на устойчивость

При увеличении продольной сжимающей стержень силы  $P$  до некоторого критического значения  $P_{кр}$  исходная форма равновесия стержня становится неустойчивой (рис.2.2.4, а, б).

Дальнейшее незначительное увеличение силы  $P_{кр}$  приведет к новой форме равновесия, соответствующей деформации изгиба. Это явление называют потерей устойчивости первого рода. Критической силе соответствует критическое напряжение

$$\sigma_{кр} = N/A = P_{кр}/A. \quad (2.2.6)$$

Это напряжение, как правило, ниже допускаемого. Однако при потере устойчивости к нему добавляется напряжение от изгиба. Максимальные крайевые напряжения определяют по формуле

$$\sigma_{\max} = N/A + M/W. \quad (2.2.7)$$

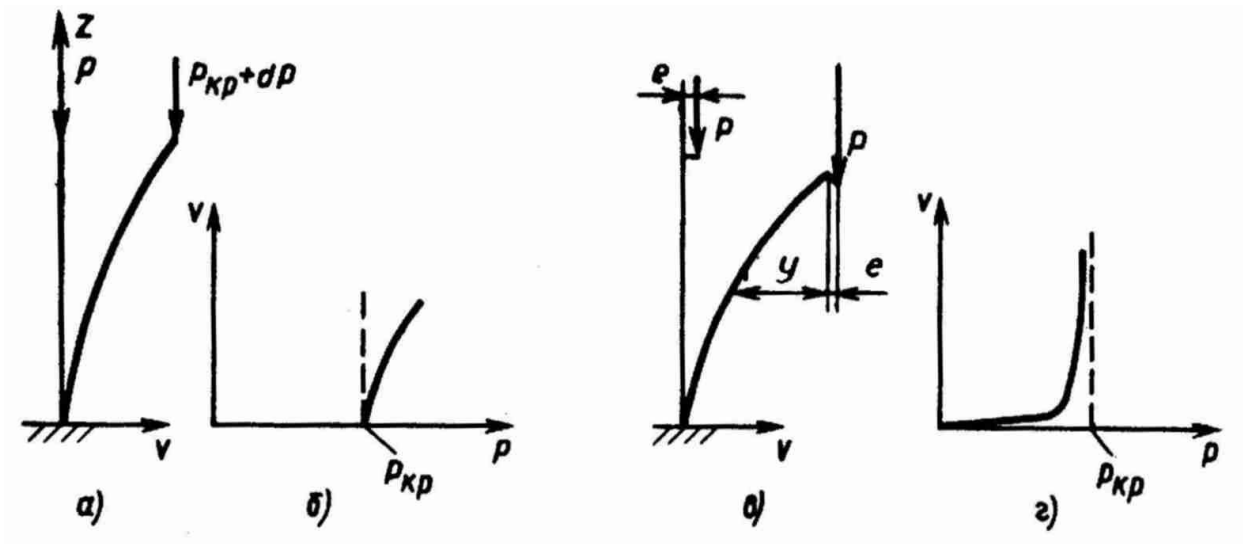


Рис.2.2.4

При этом изгибающий момент в произвольном сечении (рис.2.2.4,в)

$$M = P(e + y) = M_e + Py, \quad (2.2.8)$$

Где  $M_e = Pe$  - момент от нагрузки, определяемый по недеформированной схеме.

В сжато-изогнутом стержне (рис.2.2.4,в,г) при  $P \rightarrow P_{кр}$  быстро увеличиваются прогибы, изгибающие моменты и напряжения. Это приводит к потере несущей способности, называемой также потерей устойчивости второго рода.

Основной характеристикой стержня при продольном изгибе является гибкость  $\lambda = \mu l/i$ , где  $\mu$  - коэффициент приведения длины, зависящий от условий закрепления стержня;  $l$  - длина стержня;  $i$  - радиус инерции поперечного сечения.

В упругой стадии продольного изгиба критическая сила определяется по формуле Эйлера:

$$P_3 = \pi^2 EJ / (\mu l)^2, \quad (2.2.9)$$

где  $EJ$  - жесткость стержня при изгибе;  $\mu l$  - приведенная длина стержня.

Этой силе соответствует критическое напряжение

$$\sigma_{кр} = \pi^2 E / \lambda_{\max}^2. \quad (2.2.10)$$

Формула Эйлера справедлива, если  $\sigma_{кр} \leq \sigma_{нц}$  (рис.2.2.5). Поэтому условие использования формулы обычно записывают в виде

$$\lambda_{\max} \geq \sqrt{\pi^2 E / \sigma_{нц}}. \quad (2.2.11)$$

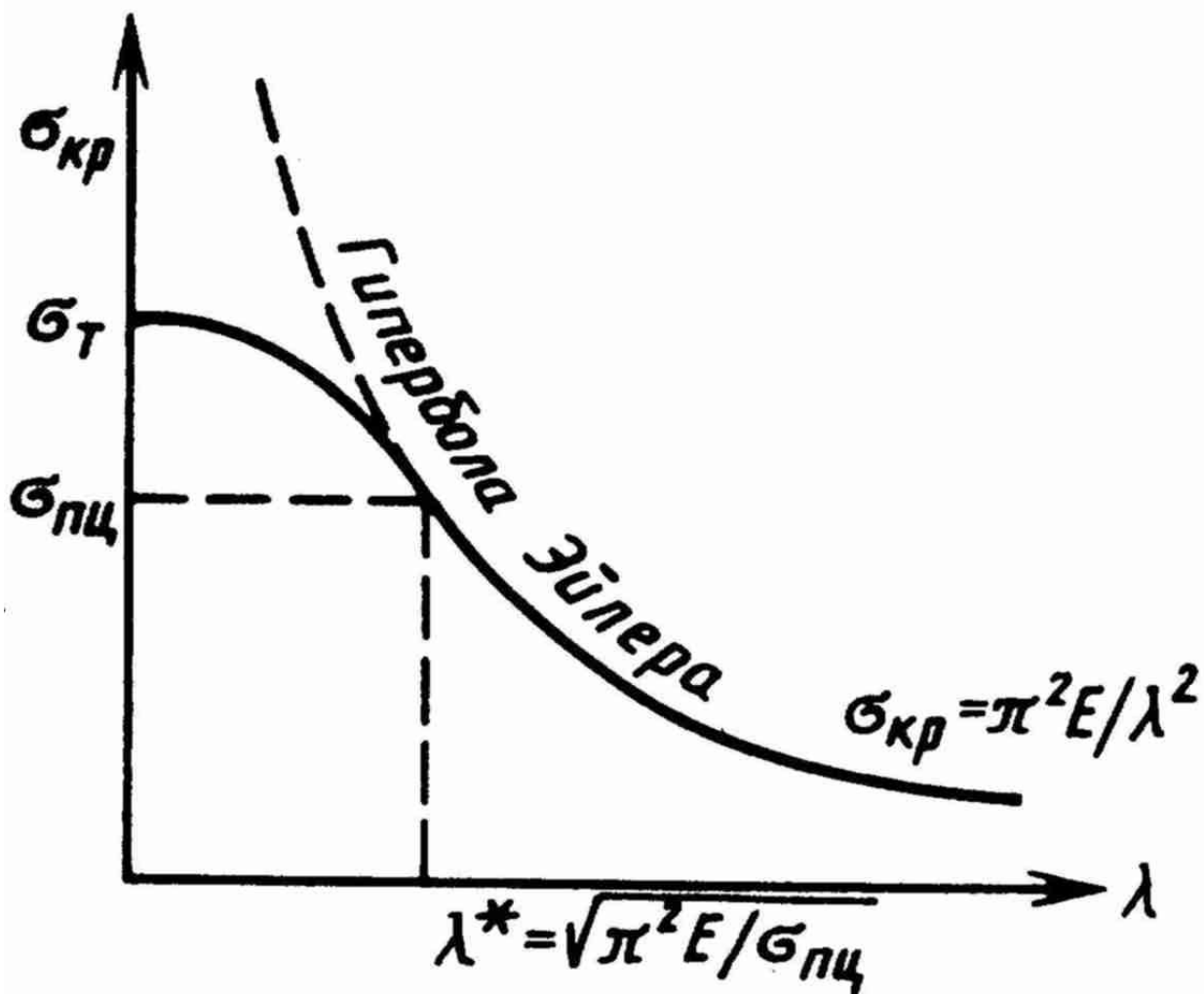


Рис.2.2.5

При расчете сжатых стержней на устойчивость гибкость  $\lambda$  учитывают путем введения коэффициента продольного изгиба  $\varphi = \varphi(\lambda)$ . Условие устойчивости центрально сжатых стержней имеет вид:

$$\sigma = N/A < \varphi[\sigma] \text{ или } \sigma_{расч} = N_{расч}/A \leq \varphi Rk_y, \quad (2.2.12)$$

где  $k_y$  - коэффициент условий работы;  $N$  и  $N_{расч}$  - нормативная и расчетная продольные силы соответственно.

Устойчивость внецентренно сжатых стержней в плоскости действия момента проверяется по формулам:

$$N/A \leq \varphi_{вн}[\sigma] \text{ или } N_{расч}/A \leq \varphi_{вн} Rk_y, \quad (2.2.13)$$

где  $\varphi_{вн} < \varphi$  - коэффициент, зависящий от гибкости стержня  $\lambda$  и от приведенного эксцентриситета  $m_1$ , учитывающего форму поперечного сечения. Значения  $\varphi$ ,  $m_1$ ,  $\varphi_{вн}$  и  $k_y$  определяют для различных материалов по специальным таблицам и формулам.

На рис.2.2.6,а-е показаны схемы с различными условиями закрепления стержней и приведены соответствующие значения коэффициентов  $\mu$ . Приведенная длина стержня  $\mu l$  равна длине соответствующей полуволны синусоиды. Это относится и к случаю, когда сила при продольном изгибе постоянно направлена в полюс (рис.2.2.6,д), что соответствует потере устойчивости крановой стрелы из плоскости действия нагрузки. Податливость опорных связей может значительно снизить критическую нагрузку (рис.2.2.6,е).

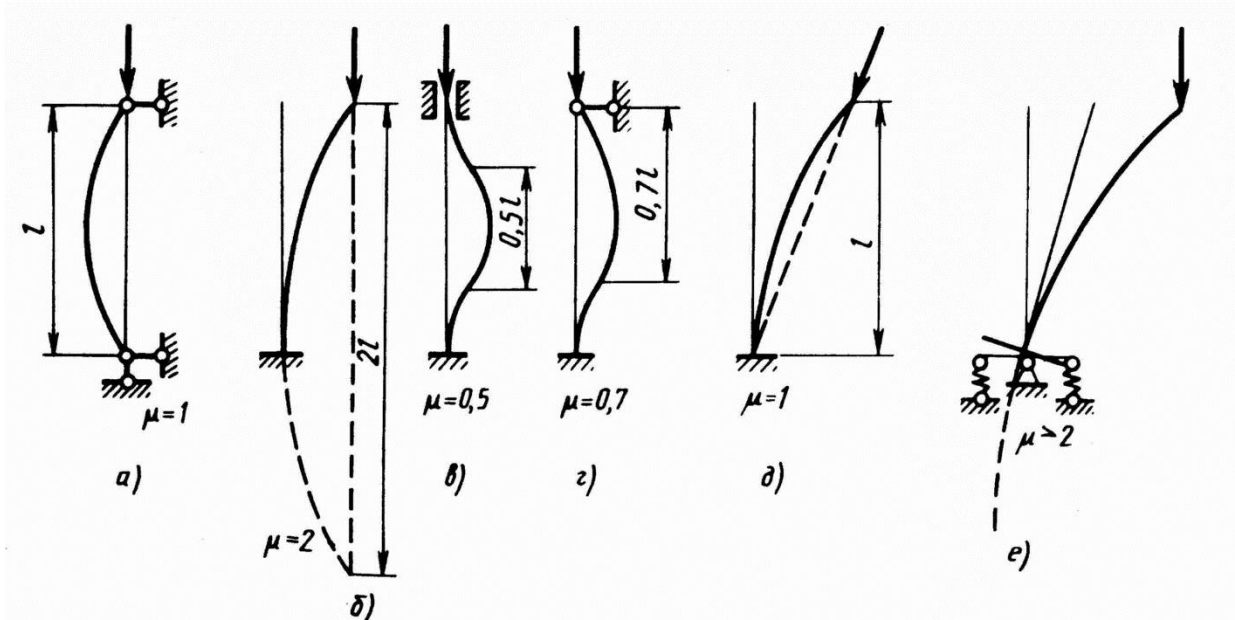


Рис.2.2.6

### 2.3.1. Механизм усталостного разрушения

Под усталостью понимают процесс постепенного накопления повреждений материала под действием переменных напряжений, приводящих к образованию трещин, их развитию и разрушению. Свойство материала противостоять усталости называется сопротивлением усталости. Около 90% разрушений происходит от усталости. Различают малоцикловую и многоцикловую усталость. При малоцикловой усталости усталостное повреждение происходит при упругопластическом деформировании (число циклов до разрушения  $10^2 \dots 5 \cdot 10^4$ ).

При многоцикловой усталости усталостное повреждение или разрушение происходит при упругом деформировании. Металлоконструкции СДМ рассчитывают на многоцикловую усталость.

Многоцикловая усталость имеет место при напряжениях, не превышающих предела упругости. Разрушение под действием такой нагрузки можно представить следующим образом: сначала в образце нет видимых повреждений; затем в материале обнаруживаются дислокации, субмикротрещины, которые увеличиваются с ростом числа циклов; затем появляются микротрещины; в заключительной стадии образуется и растет макротрещина, этот процесс завершается хрупким разрушением образца.

До разрушения проследить усталостный процесс практически невозможно.

### 2.3.2. Факторы, влияющие на усталостную долговечность

Процесс изменения напряжений характеризуется циклом напряжений (рис.2.3.1), то есть совокупностью последовательных значений напряжений за один период их изменения при регулярном нагружении.



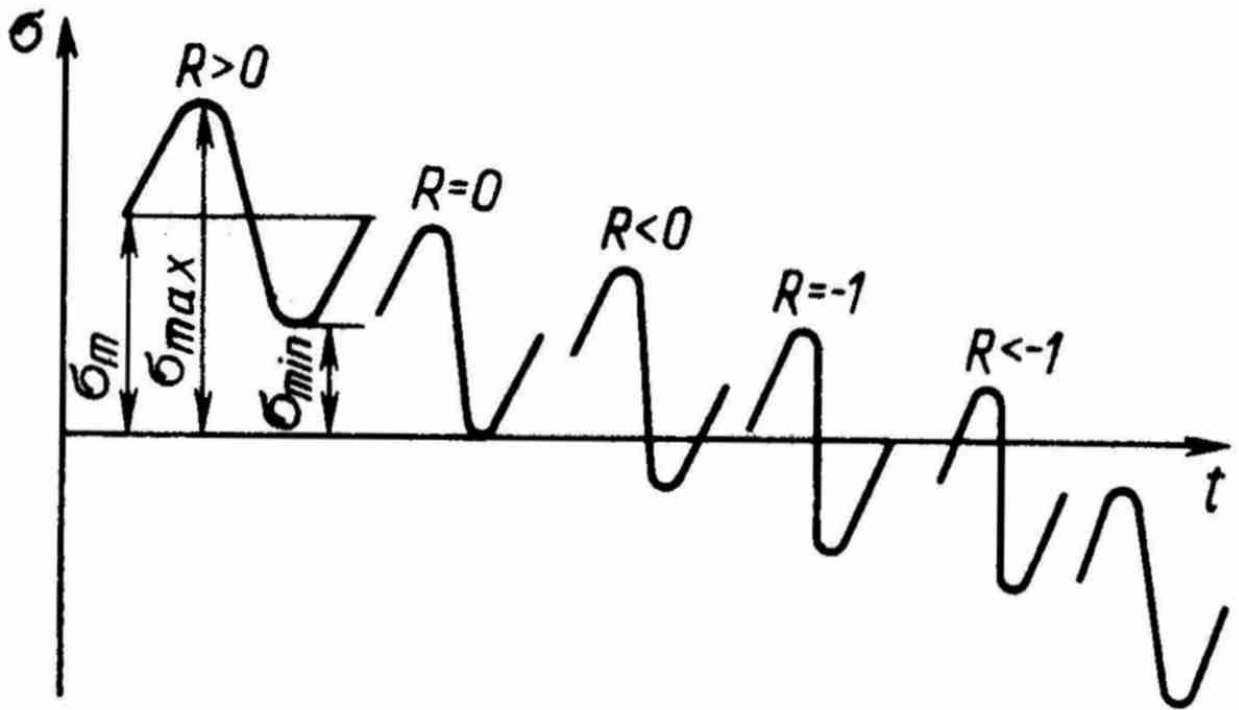
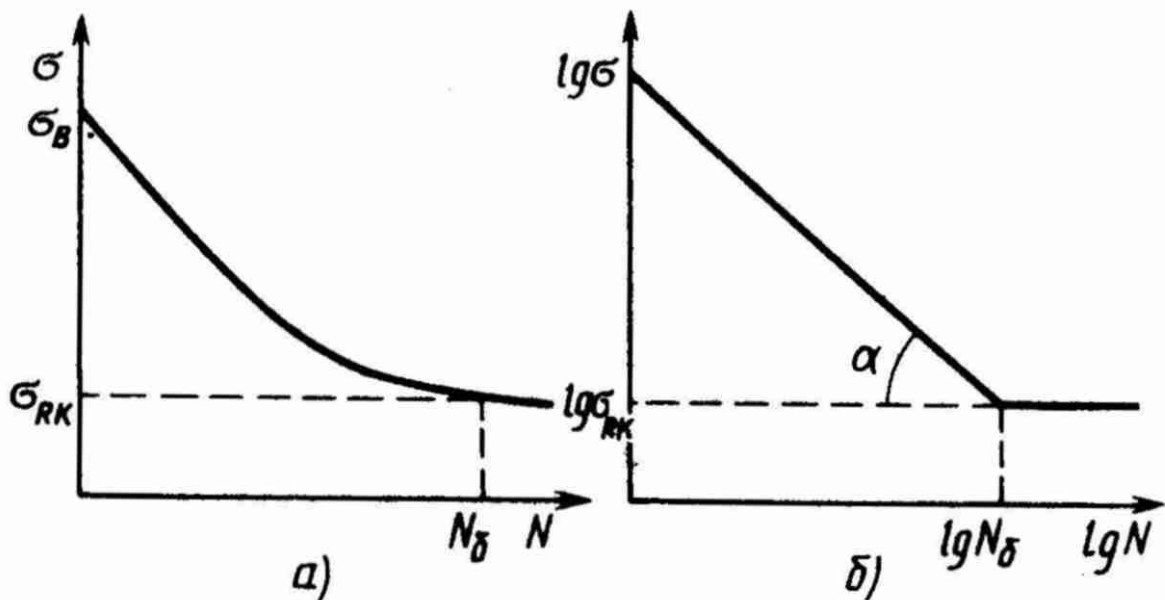


Рис.2.3.1.

Характеристики цикла напряжений: коэффициент асимметрии цикла  $R = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}$ ; среднее

напряжение цикла  $\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2}$ ; амплитуда напряжений цикла  $\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}$ , где  $\sigma_{\max}, \sigma_{\min}$  – наибольшее, наименьшее напряжения цикла (алгебраические значения). При  $R = -1$  цикл называется асимметричным. Знакопостоянный цикл (при  $\sigma_{\min} = 0$  или  $\sigma_{\max} = 0$ ) называют отнулевым. При среднем напряжении, не равном нулю, цикл называют симметричным ( $R \neq -1$ ).

Поведение металлов при переменных нагрузках изучают экспериментально. На специальных испытательных машинах образцы подвергают действию нагрузок, изменяющихся по заданному закону. По результатам испытаний строят кривую усталости – зависимость между максимальным напряжением  $\sigma$  и числом нагружений  $N$  до разрушения образца. Эта кривая может быть построена в обычных и логарифмических координатах (рис.2.3.2).



**Рис. 2.3.2**

Пределом ограниченной выносливости  $\sigma_{RN}$  называют максимальное по абсолютному значению напряжение цикла, при котором еще не происходит усталостное разрушение в момент  $N$ -го нагружения.

Кривая усталости позволяет установить значение пределов выносливости  $\sigma_R$ , то есть максимальных по абсолютному значению напряжений цикла, при которых не происходит усталостное разрушение до числа циклов нагружения  $N_\sigma$  – базы испытаний.

База испытания  $N_\sigma$  – это предварительно задаваемая наибольшая продолжительность испытаний на усталость, обычно принимаемая равной экономически целесообразному сроку службы изделия (на практике  $N_\sigma = 10^6 \dots 3 \cdot 10^6$  циклов).

Важнейший параметр, по которому оценивается сопротивление усталости, – это эффективный коэффициент концентрации напряжений  $K = \frac{\sigma_R}{\sigma_{RK}}$  – отношение предела выносливости  $\sigma_R$  образцов без концентрации напряжений к пределу выносливости  $\sigma_{RK}$  образцов с концентрацией напряжений.

При усталостных испытаниях определяется влияние факторов на усталостную долговечность сварных узлов: свойств материала конструкции, условий эксплуатации и окружающей среды, геометрических особенностей сварных узлов и технологических особенностей их изготовления.

Влияние материала оценивается на образцах без концентраторов напряжений (как правило при  $N_\sigma = 2 \cdot 10^6$ ,  $R = -1$ ). Эти данные приводятся в справочных таблицах.

Влияние условий эксплуатации: зависимость напряжений от времени (амплитуда  $\sigma_a$ ,  $R$ ,  $N$ ).

**Количество циклов нагружения  $N$ .**

Для наклонного участка кривой усталости аппроксимирующая зависимость имеет вид:

$$\sigma_{RN}^m \cdot N = \sigma_R^m \cdot N_\sigma, \quad (2.3.1)$$

где  $m$  – показатель степени, зависящий от угла наклона кривой усталости; для сварных крановых конструкций из углеродистых и низколегированных сталей

$$m = 0.05 \cdot \sigma_{-1} + 1.2 \quad (2.3.2)$$

Предел ограниченной выносливости для симметричного цикла нагружения можно определить по формуле:

$$\sigma_{-1N} = \sigma_{-1} \cdot \sqrt[m]{\frac{N_\sigma}{N}} \quad (2.3.3)$$

Для сталей, применяемых в металлоконструкциях СДМ, этот предел рекомендуют принимать равным  $0.5 \cdot \sigma_{-1}$ .

**Коэффициент асимметрии цикла нагружения  $R$ .**

Установить пределы выносливости для всех возможных  $R$  не представляется возможным. Если результаты испытаний по определению пределов выносливости изобразить в виде диаграммы (рис.2.3.3), на которой по оси ординат отложить значения  $\sigma_{\max}, \sigma_{\min}$ , а по оси абсцисс  $\sigma_m$ , то такая диаграмма будет представлена прямыми линиями. Эта диаграмма строится по данным испытаний при базовом числе циклов нагружения  $N_\sigma$ .

Наибольшее значение предела выносливости не должно превышать предела текучести  $\sigma_T$ .

Если значения  $\sigma_{\max}, \sigma_{\min}$  лежат на контурной линии диаграммы, то напряженное состояние элемента соответствует пределу выносливости, если внутри контурной линии диаграммы – имеется запас по отношению к пределу выносливости, а если вне контурной линии – напряженное состояние превышает предел ограниченной выносливости.

Для произвольной точки  $M$ :

$$\sigma_a + \sigma_m = \sigma_{-1} + \sigma_m \cdot tg\gamma \quad \text{или} \quad \sigma_a = \sigma_{-1} - \sigma_m \cdot (1 - tg\gamma) = \sigma_{-1} - \psi \cdot \sigma_m, \quad (2.3.4)$$

где  $\operatorname{tg} \gamma = \frac{2 \cdot (\sigma_0 - \sigma_{-1})}{\sigma_0}$ ;  $\psi = \frac{2 \cdot \sigma_{-1} - \sigma_0}{\sigma_0}$  – характеризует угол наклона линии предельных напряжений и называется коэффициентом чувствительности металла к асимметрии цикла. Для углеродистых сталей  $\psi = 0.1 \dots 0.2$ , для легированных  $\psi = 0.2 \dots 0.3$ .

Уравнение (2.3.4) можно использовать для приведения асимметричного цикла нагружения к эквивалентному ему по повреждениям симметричному циклу согласно выражению

$$\sigma_{-1np} = \sigma_a + \psi \cdot \sigma_m \quad (2.3.5)$$

В этом случае работоспособность изделия оценивают при известном числе циклов нагружения  $N$ , коэффициенте асимметрии  $R$ , уровни максимальных напряжений  $\sigma_R$  и пределе выносливости материала  $\sigma_{-1}$  по выражению:  $\sigma_{-1N} \geq \sigma_{-1np}$ .

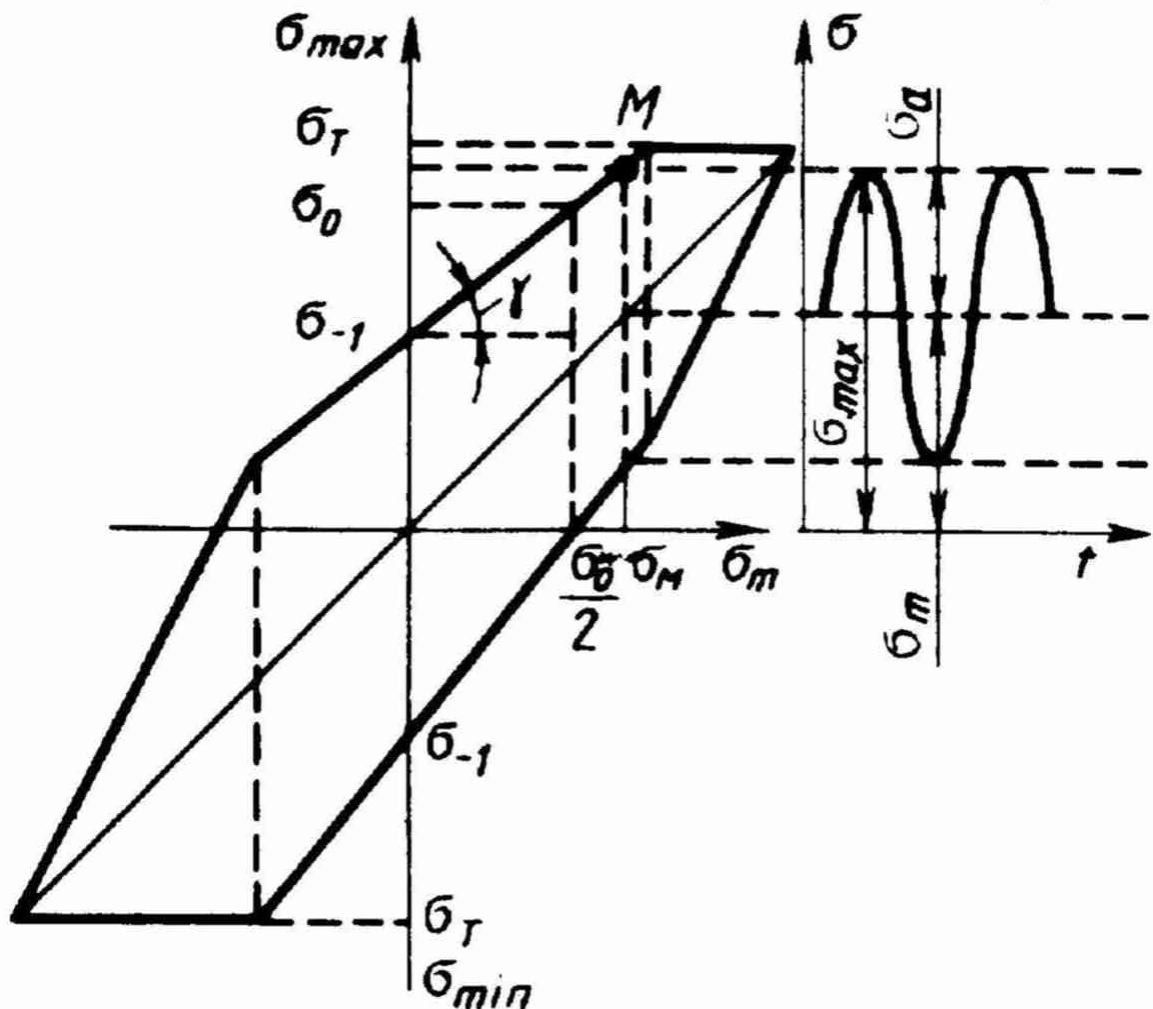


Рис. 2.3.3

Учитывая, что при  $|\sigma_{\max}| > |\sigma_{\min}|$   $\sigma_R = \sigma_{\max}$ ,  $\sigma_a = \sigma_R \cdot \frac{(1-R)}{2}$  и  $\sigma_m = \sigma_R \cdot \frac{(1+R)}{2}$ , получаем

$$\sigma_{-1} \cdot \sqrt[m]{\frac{N_{\sigma}}{N}} \geq \frac{\sigma_R}{2} \cdot [(1-R) + \psi \cdot (1+R)] \quad (2.3.6)$$

При  $|\sigma_{\max}| < |\sigma_{\min}|$ ,  $\sigma_R = \sigma_{\min}$ ,  $\sigma_a = \sigma_R \cdot \frac{(1-R)}{2R}$ ,  $\sigma_m = \sigma_R \cdot \frac{(1+R)}{2R}$ , это же условие имеет вид:

$$\sigma_{-1np} \cdot \sqrt[m]{\frac{N_{\sigma}}{N}} \geq \frac{\sigma_R}{2R} \cdot [(1-R) + \psi \cdot (1+R)] \quad (2.3.7)$$

Если  $\sigma_{-1np}$  или, что тоже самое, правые части выражений (2.3.6) и (2.3.7) меньше  $0.5 \cdot \sigma_{-1}$ , то изделие можно считать работоспособным. В этом случае циклические напряжения повреждений не создают.

### Режимы нагружения.

В течение времени значения  $\sigma_m, \sigma_a$  не остаются постоянными. При оценке работоспособности машин в этом случае пользуются линейным законом суммирования повреждений:

$$\sum \frac{n_i}{N_i} = 1, \quad (2.3.8)$$

где  $n_i$  – общее число циклов за время действия нагрузки, при которой число циклов до разрушения равно  $N_i$ . Согласно этому закону деталь металлоконструкции, которая выработала при напряжении симметричного цикла нагружения  $\sigma_{-1}$  половину ресурса  $N_1$  и затем стала работать при напряжении  $\sigma_2$ , будет иметь оставшийся ресурс, равный половине  $N_2$ . Умножая числитель и знаменатель (2.3.8) на  $\sigma_{-1}^m \cdot N_i$  и учитывая, что  $\sigma_{-1N_i}^m \cdot N_i = const$ , получаем в предельном случае для серии симметричных циклов нагружений:

$$\sum \sigma_{-1N_i}^m \cdot n_i = \sigma_{-1}^m \cdot N_\sigma \quad (2.3.9)$$

Если изделие подвергается нагружениям асимметричного цикла при различных напряжениях, в левой части (2.3.9) используют приведенные к симметричному циклу напряжения (2.3.5) и условие выносливости записывают в виде

$$\sum \sigma_{-1np}^m \cdot n_i \leq \sigma_{-1}^m \cdot N_\sigma \quad (2.3.10)$$

При этом необходимо учитывать, что циклы нагружений, имеющие  $\sigma_a + \psi \cdot \sigma_m < 0.5 \cdot \sigma_{-1}$ , при суммировании не учитываются.

Условие неразрушения можно выразить через максимальное напряжение, воспринимаемое изделием в заданной серии асимметричных циклов нагружений. Для этого введем обозначения:

$$\sigma_R = \sigma_{\max} \text{ при } |\sigma_{\max}| > |\sigma_{\min}| \text{ или } \sigma_R = \sigma_{\min} \text{ при } |\sigma_{\max}| < |\sigma_{\min}|.$$

Тогда напряжение, соответствующее асимметричному циклу нагружения и приведенное к симметричному циклу с учетом выражений (2.3.6) и (2.3.7), запишем в виде:

$$\sigma_{-1np} = \frac{\sigma_R}{2} \cdot [(1-R) + \psi \cdot (1+R)] \text{ при } |\sigma_{\max}| > |\sigma_{\min}| \text{ или } \sigma_{-1np} = \frac{\sigma_R}{2R} \cdot [(1-R) + \psi \cdot (1+R)] \text{ при } |\sigma_{\max}| < |\sigma_{\min}|.$$

$$\sigma_{-1} = \alpha \cdot \sigma_{-1np}$$

Принимая  $\sigma_{-1} = \alpha \cdot \sigma_{-1np}$  в формуле (2.3.10), получим условие предельного состояния изделия:

$$\sum \sigma_{-1np_i}^m \cdot n_i = (\alpha \cdot \sigma_{-1np})^m \cdot N_\sigma, \quad (2.3.11)$$

где  $\alpha$  – коэффициент режима нагружения, определяющий долю накопленных повреждений при действии переменных нагрузок:

$$\alpha = \sqrt[m]{\frac{\sum \sigma_{-1np_i}^m \cdot n_i}{\sigma_{-1np}^m \cdot N_\sigma}} \quad (2.3.12)$$

Таким образом, условие работоспособности изделия при заданном режиме нагружения, состоящем из блоков регулярного цикла нагружения, можно представить через максимальное значение напряжения  $\sigma_R$ :

$$\sigma_R \leq \frac{2 \cdot \sigma_{-1}}{\alpha \cdot [(1-R) + \psi \cdot (1+R)]} \text{ при } |\sigma_{\max}| > |\sigma_{\min}|; \quad (2.3.13)$$

$$\sigma_R \leq \frac{2 \cdot \sigma_{-1} \cdot R}{\alpha \cdot [(1-R) + \psi \cdot (1+R)]} \text{ при } |\sigma_{\max}| < |\sigma_{\min}| \quad (2.3.14)$$

**Окружающая среда.** При разработке СДМ большое значение для оценки сопротивляемости усталостному разрушению имеет учет температурного фона и условий коррозии.

Практикой установлено, что у всех сталей, применяемых в сварных металлоконструкциях СДМ, предел прочности и текучести с понижением температуры возрастает. Однако при этом увеличивается чувствительность металлов к концентрации напряжений и снижается ударная вязкость.

Предел выносливости в условиях коррозии не зависит от предела прочности, поэтому применение большинства высокопрочных легированных сталей в коррозионной среде нецелесообразно.

**Концентрация напряжений.** Обычно концентрация напряжений является следствием резких изменений размеров или формы поперечных сечений по длине элементов металлоконструкций. Для оценки величины концентрации напряжений используют теоретический коэффициент концентрации напряжений  $\alpha_\sigma$ , определяемый как отношение максимального напряжения в зоне концентратора к номинальному напряжению детали при упругом деформировании. Номинальные напряжения при этом вычисляют по формулам сопротивления материалов.

Практически для оценки влияния концентрации напряжения на усталость сварных узлов используют эффективный коэффициент концентрации напряжения  $K_\sigma$ , определяемый отношением пределов выносливости деталей без концентратора напряжений и с концентратором напряжений.

Значение теоретических и эффективных коэффициентов концентрации напряжений для сварных узлов металлоконструкций СДМ приведены в соответствующих рекомендациях.

При расчетах усталостной долговечности концентрацию напряжения учитывают введением в расчетные зависимости вместо предела выносливости  $\sigma_{-1}$  величины

$$\sigma_{-1K} = \frac{\sigma_{-1}}{K_\sigma}.$$

## Тема 7. РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ СВАРНЫХ СОЕДИНЕНИЙ. БОЛТОВЫЕ СОЕДИНЕНИЯ

### 2.4.1. Сварные соединения.

Сварные соединения разделяют на стыковые (рис.2.4.1,а-в), угловые (рис.2.4.1,д), тавровые (рис.2.4.1,е), нахлесточные (рис.2.4.1,з).

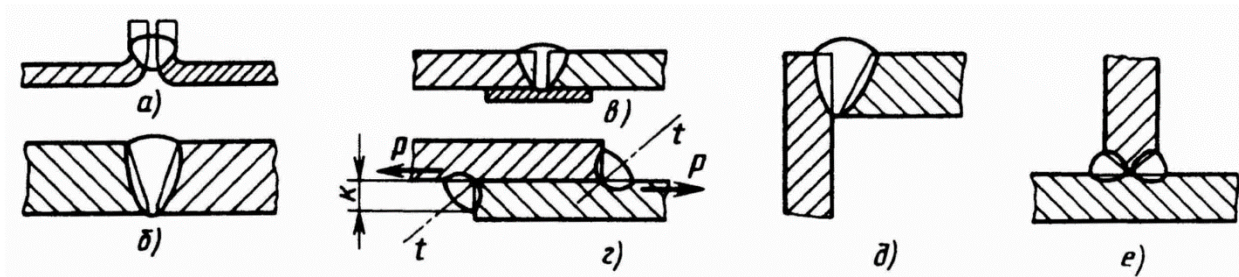


Рис.2.4.1

Каждое соединение может быть односторонним или двусторонним, со скосом кромок или без скоса, с отбортовкой или без нее.

По отношению к внешнему растягивающему усилию (рис.2.4.2)стыковые швы делятся на прямые (II) и косые (III), а угловые – на лобовые (I), фланговые (IV) и косые.

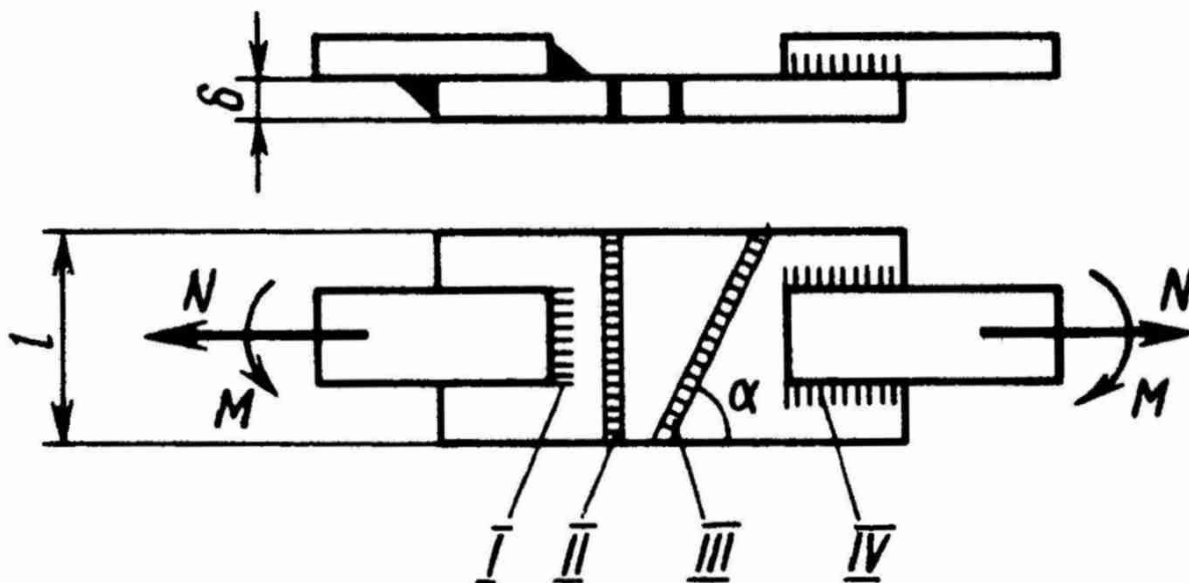


Рис.2.4.2

По ответственности сварные швы делятся на рабочие и связующие. Разрушение рабочего шва приводит к разрушению конструкции.

**Размеры сечения сварных швов.** Толщину стыковых швов при сварке элементов конструкции, выполненных из стальных швов, обычно принимают равной минимальной толщине листа. Основным размером, характеризующим сечение углового шва, является катет шва  $k$  (рис.2.4.1,з). Максимальное значение катета шва не должно превышать 1,2 толщины более тонкого из свариваемых элементов.

**Сопряжение элементов в сварных узлах.** Отдельные балки, выполненные из прокатных профилей (швеллеров, угловой стали) и образующие раму, соединяют в узлах сваркой (рис.2.4.3,а-к).

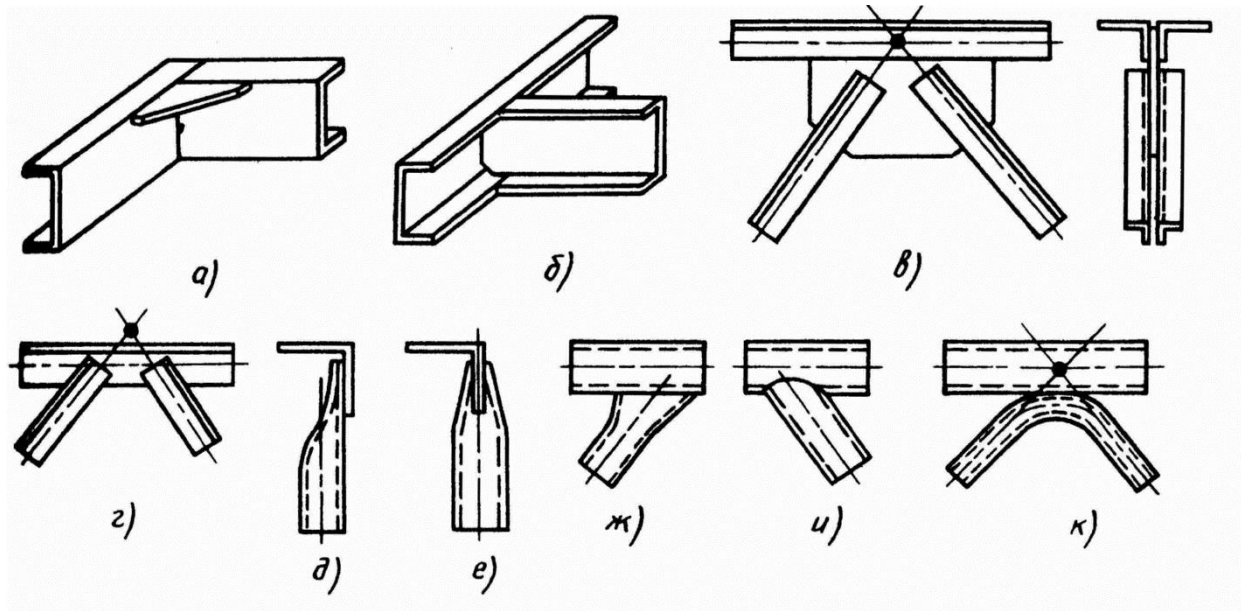


Рис.2.4.3

Косынки служат для увеличения жесткости (рис.2.4.3,а). Полки срезают, чтобы увеличить длину сварных швов (рис.2.4.3,б).

Для решетчатых систем, выполненных из угловой стали предпочтительным являются узлы со сдвоенными уголками. При симметрии узла относительно плоскости фермы и пересечении геометрических осей стержней, сходящихся в узле в одной точке, в узлах не действуют изгибающие моменты. Использование косынок (фасонок) позволяет расположить на них сварные швы нужной длины (рис.2.4.3,в). Однако такая конструкция имеет недостаток – она сложна. Поэтому часто используются одинарные уголки, свариваемые без косынок (рис.2.4.3,г). Такая конструкция допустима при условии, что расчетная длина шва не превышает длину контура прилегание свариваемых деталей.

Если применяются стержни из труб, то прилегание элементов в узле обеспечивается различными способами (рис.2.4.3,д-к).

При проектировании сварных узлов: рекомендуется применять автоматическую и полуавтоматическую сварку под флюсом или в углекислом газе.

#### Расчет сварных соединений.

**Стыковые швы.** Косые стыковые швы при угле наклона  $\alpha \leq 67^\circ$  не уступают по прочности основному металлу и на прочность не рассчитываются. Однако их применение не всегда экономически выгодно из-за потерь при раскрое листа. Прямые стыковые швы равнопрочны с основным металлом при условии соблюдения всех рекомендаций и качественного провара шва. При проверочном расчете прямых стыковых швов сравнивают напряжение  $\sigma$  с расчетным сопротивлением разрыву  $R_{св}$  материала шва.

При одновременном действии на соединение продольной силы  $N$  и изгибающего момента  $M$ . Прочность проверяют по неравенству:

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M}{W} = \frac{N}{\delta \cdot l_p} + \frac{6 \cdot M}{\delta \cdot l_p^2} \leq R_{св} \cdot k_y, \quad (2.4.1)$$

где  $A$  – площадь сечения шва;  $W$  – момент сопротивления сечения шва;  $\delta$  – толщина шва;  $l_p$  – расчетная длина шва;  $k_y$  – коэффициент условий работы.

**Угловые швы.** Сварные соединения с угловыми швами рассчитывают на срез по одному из двух сечений: по металлу шва (по площадке, проходящей через биссектрису угла шва; линия  $t$ ) или по металлу границы сплавления основной детали и шва.

Расчетная зависимость:

$$\tau \leq R_{св.с} \cdot k_y,$$

где  $\tau$  – касательное напряжение;  $R_{св.с}$  – расчетное сопротивление срезу (определяется типом электрода или маркой сверочной проволоки).

Рассмотрим расчет сварного соединения, нагруженного моментом  $M_1$ , продольной силой  $N$ , поперечной силой  $Q$  (рис.2.4.4).

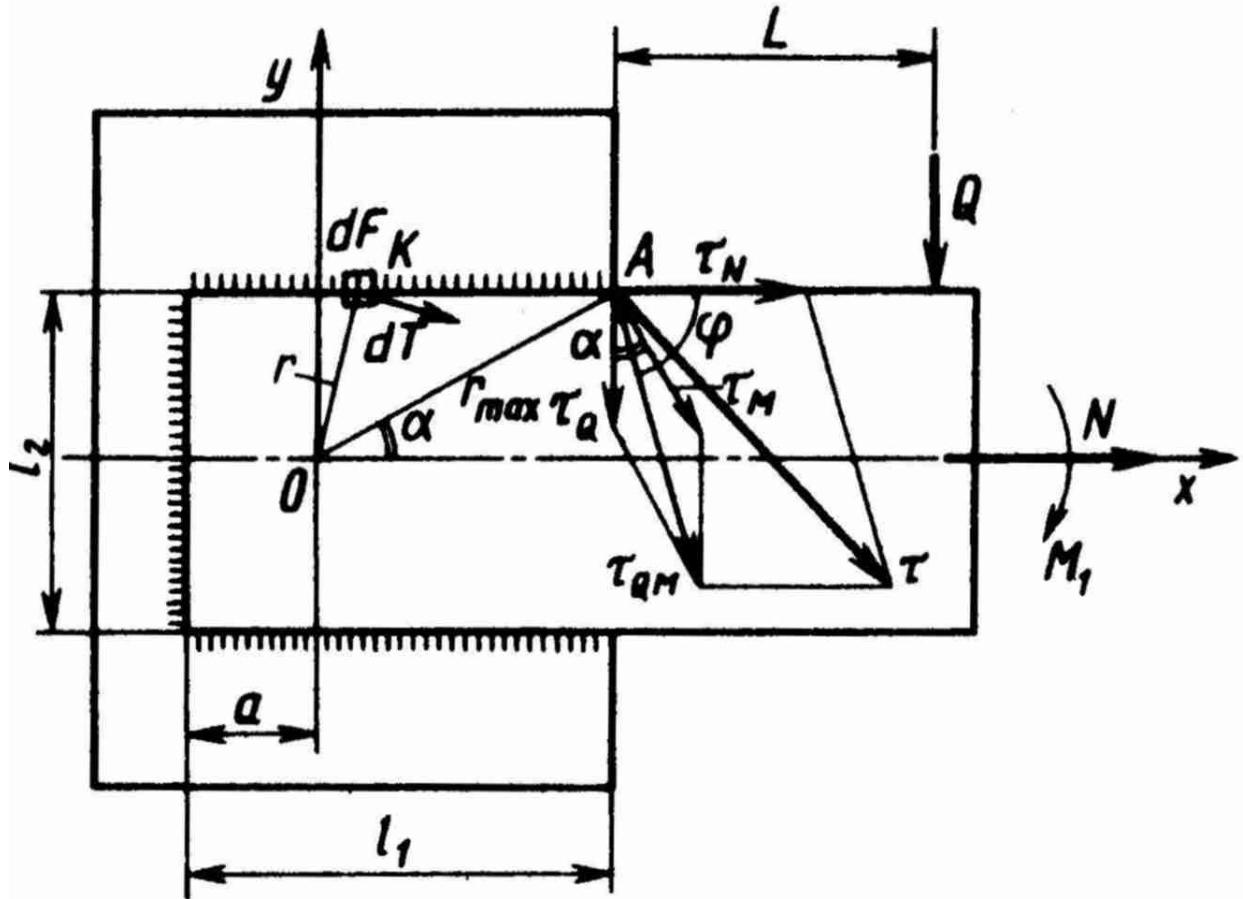


Рис.2.4.4

Он основан на том, что детали являются жесткими, а деформируются только сварные швы, причем под действием момента соединяемые детали поворачиваются одна относительно другой вокруг центра масс  $O$  шва. Момент  $M$  является суммой внешнего момента  $M_1$  и момента от поперечной силы  $Q$ :

$$M = M_1 + (L + l_1 - a) \cdot Q \quad (2.4.3)$$

Найдем напряжения, создаваемые моментом  $M$ . Его можно представить как сумму элементарных моментов, воспринимаемых элементарным участком шва:

$$dM = r \cdot dF = r \cdot \tau_M \cdot dA, \quad (2.4.4)$$

где  $r$  – расстояние от рассматриваемой точки к шва до центра  $O$ ;  $dF$  – элементарная сила;  $\tau_M$  – касательное напряжение;  $dA$  – элементарная площадь.

Поскольку приняли, что соединяемые детали не деформируются, деформации участков шва пропорциональны расстояниям  $r$ , следовательно,  $\tau_M = c \cdot r$ , где  $c$  – коэффициент пропорциональности, равный касательному напряжению в точке, удаленной от  $O$  на  $r = 1$ . Интегрируя, получаем:

$$M = c \cdot \int_A r^2 \cdot dA = c \cdot I_p = c \cdot (I_x + I_y), \quad (2.4.5)$$

где  $I_p$  – полярный момент инерции;  $I_x, I_y$  – осевые моменты инерции швов.

Откуда,

$$c = \frac{M}{I_x + I_y}. \quad (2.4.6)$$

Напряжение от момента  $M$  в рассматриваемой точке  $k$ :

$$\tau_M = \frac{M \cdot r}{I_x + I_y}. \quad (2.4.7)$$



Наибольшее касательное напряжение  $\tau_{\max}$  действует в точке  $A$ , для которой  $r = r_{\max} = \sqrt{x^2 + y^2}$ , где  $x$  и  $y$  – координаты точки  $A$ :  $x = l_1 - a$ ,  $y = \frac{l_2}{2}$ .

Следовательно,

$$\tau_M = \tau_{M_{\max}} = \frac{M \cdot \sqrt{x^2 + y^2}}{I_x + I_y}. \quad (2.4.8)$$

Напряжение

$$\tau_N = \frac{N}{A} = \frac{N}{(2 \cdot l_1 + l_2) \cdot k \cdot \beta}. \quad (2.4.9)$$

Аналогично определяется

$$\tau_Q = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{(2l_1 + l_2)k\beta} \quad (2.4.10)$$

Суммарное касательное напряжение:

$$\bar{\tau} = \bar{\tau}_M + \bar{\tau}_N + \bar{\tau}_Q. \quad (2.4.11)$$

В частных случаях расчет угловых швов упрощен. Нахлесточное соединение несимметричного профиля, (например, углового) с плоским элементом при действии продольной силы  $N$  и сварке фланговыми швами (рис.2.4.5).

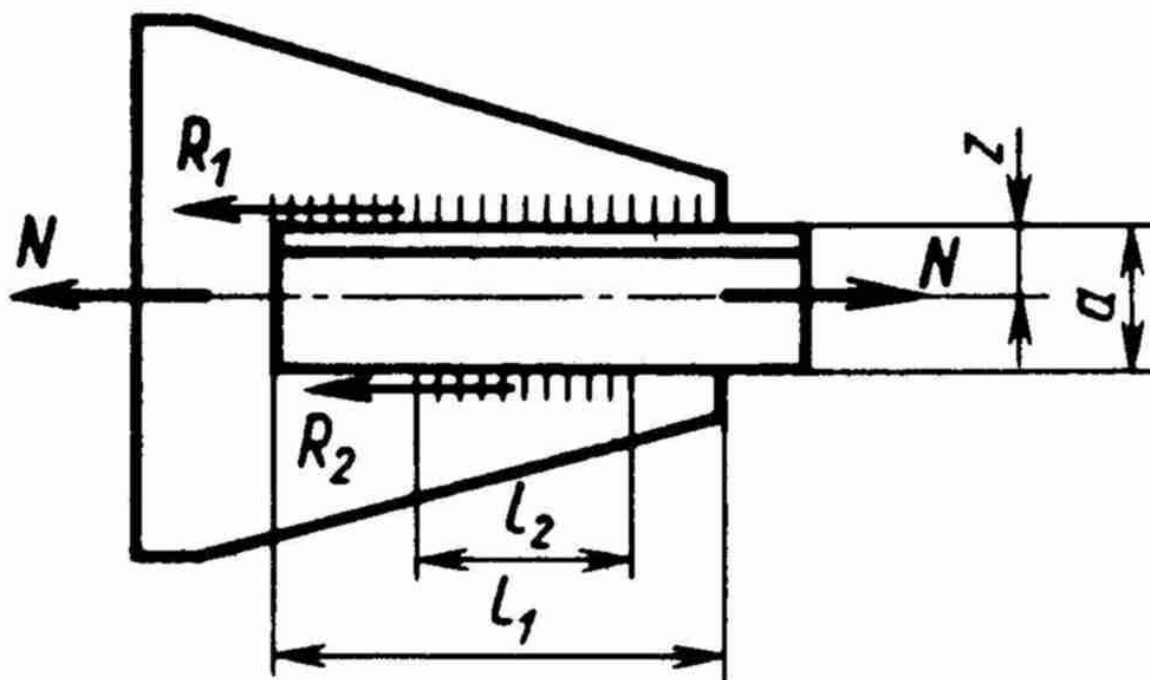


Рис.2.4.5

Из уравнения проекций всех сил на ось уголка получим  $R_1 + R_2 = N$  (где  $R_1$  и  $R_2$  - реакции в швах), система один раз статически неопределима. Чтобы напряжения в двух швах были одинаковыми, длины  $l_1$  и  $l_2$  швов должны быть разными и находится в соотношении:

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{a - z}{z}, \quad (2.4.12)$$

где  $a$  – ширина полки;  $z$  – расстояние от центральной оси до полки уголка.

При указанном соотношении из условия прочности  $\frac{N}{A} = \frac{N}{(l_1 + l_2) \cdot k \cdot \beta} \leq R_{св.с} \cdot k_y$  можно определить суммарную длину швов  $(l_1 + l_2)$ , а затем найти длину каждого.

При конструировании узлов ферм необходимо придерживаться следующих правил:

- 1) Линии центров тяжести поперечных сечений всех сходящихся в узле стержней должны пересекаться в центре узла.
- 2) Узлы ферм должны содержать минимальное количество вспомогательных промежуточных элементов и иметь, возможно, простую форму. Не допускать скученности швов. Последнее может привести к хрупкому разрушению.
- 3) При присоединении стержней к косынке нужно стремиться к тому, чтобы усилия, переходя от стержня к косынке, распределялись по ней равномерно.

### 2.4.2. Заклепочные и болтовые соединения.

**Заклепочные соединения** используют преимущественно при плохой свариваемости соединяемых деталей или при недопустимости их нагрева при сварке. При проектировании заклепочного соединения рекомендуется принимать минимальное расстояние между осями соседних заклепок равным  $3d$ , а между осью заклепки и краем детали не менее  $(1.5...2)d$ , где  $d$  – диаметр заклепки. Суммарная толщина соединяемых деталей не должна превышать  $5d$ . Расчет заклепочного соединения. Включает проверку прочности соединяемых деталей и расчет на прочность самих заклепок. При этом определяют напряжения в сечениях, ослабленных отверстиями под заклепки (например, в сечении  $A-A$  на рис.2.4.6).

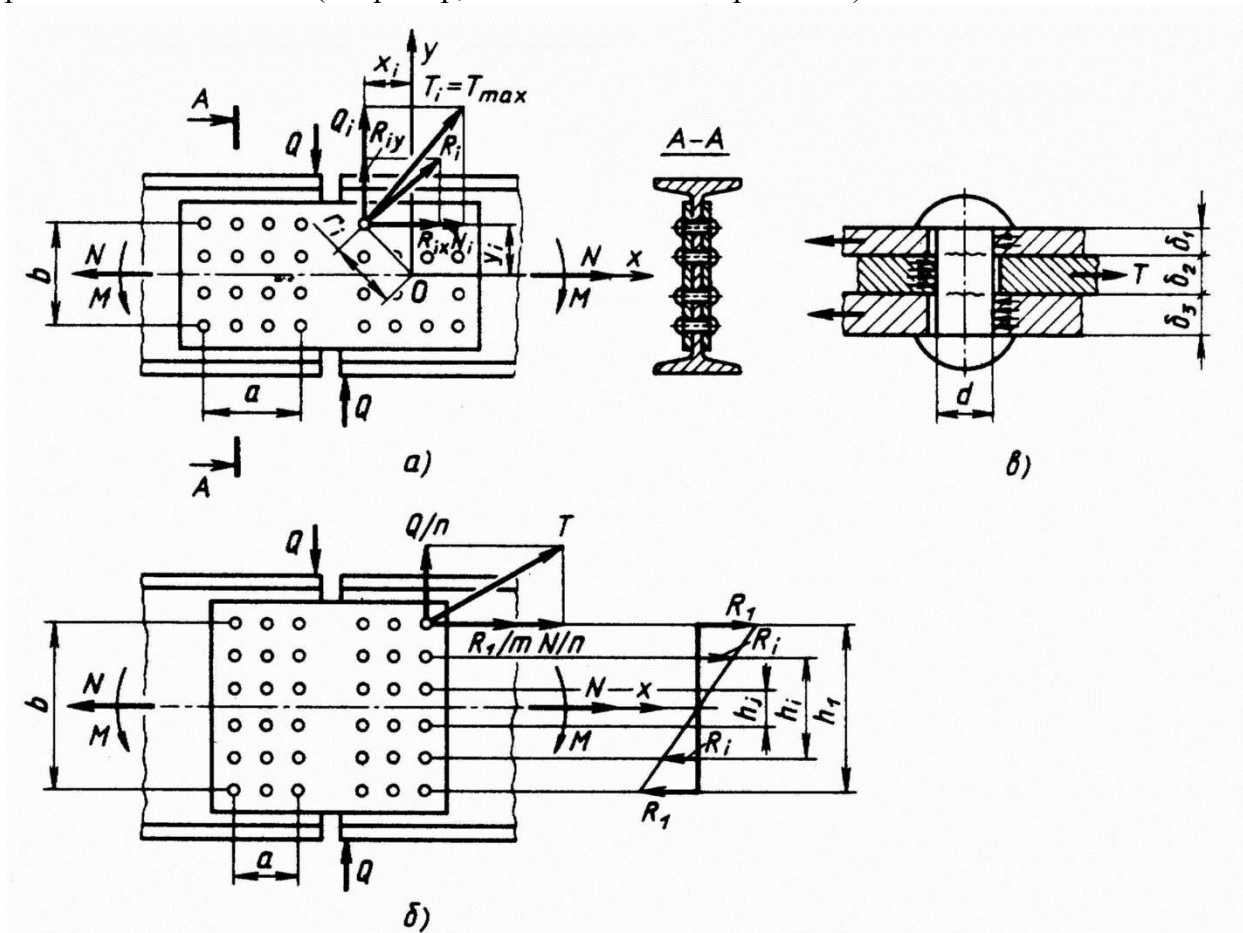


Рис.2.4.6

Заклепки рассчитывают на срез и на смятие в два этапа. Сначала выявляют наихудший случай нагружения, что сводится к поиску наиболее нагруженной заклепки и определению усилия среза  $T_{max}$ , действующего на нее. Затем проверяют прочность этой заклепки. Известно два метода расчета заклепочных соединений. При так называемом широком заклепочном поле ( $b/a < 3$ , рис.2.4.6,а) принимают, что деформация заклепок от действия момента  $M$  происходит при повороте деталей относительно центра  $O$  заклепочного поля. При узком заклепочном поле ( $b/a \geq 3$ , рис.2.4.6,б) принимают, что деформация происходит аналогично изгибу балки, причем, наиболее нагруженными оказываются заклепки, наиболее удаленные от оси балки. В обоих методах допускают, что продольная  $N$  и поперечная  $Q$  силы воспринимаются равномерно всеми заклепками.

Определим силу  $T_{max}$  для узкого заклепочного поля (рис.2.4.6,б), нагруженного моментом  $M$ , продольной силой  $N$  и поперечной силой  $Q$ .

Момент  $M$  уравнивается суммой моментов  $R_i \cdot h_i$ , передаваемых на каждую пару горизонтальных рядов полустыка:

$$M = R_1 \cdot h_1 + R_2 \cdot h_2 + \dots + R_j \cdot h_j = \sum_{i=1}^j R_i \cdot h_i, \quad (2.4.13)$$

где  $j = m_r/2$  при четном числе горизонтальных рядов  $m_r$  и  $j = (m_r - 1)/2$  при нечетном числе рядов. Из подобия треугольников следует  $R_i/R_1 = h_i/h_1$  или  $R_i = R_1 \cdot \frac{h_i}{h_1}$ . Тогда

$$M = \sum_{i=1}^j R_1 \cdot \frac{h_i^2}{h_1} = \frac{R_1}{h_1} \cdot \sum_{i=1}^j h_i^2.$$

Отсюда определим суммарную силу сопротивления  $R_1$ , создаваемую всеми заклепками внешнего ряда при действии на соединение момента  $M$ :

$$R_1 = \frac{M \cdot h_1}{\sum_{i=1}^j h_i^2},$$

где  $h_1$  – расстояние между внешними горизонтальными рядами заклепок;  $h_i$  – расстояние между рядами, симметрично расположенными относительно оси.

На одну заклепку внешнего ряда действует сила  $\frac{R_1}{m}$ , где  $m$  – число вертикальных рядов в полустыке.

Найдем  $T = T_{max}$  как геометрическую сумму составляющих

$$T_{max} = \sqrt{(R_1/m + N/n)^2 + (Q/n)^2}, \quad (2.4.14)$$

где  $n = m \cdot m_r$  – общее число заклепок в полустыке. Для широкого заклепочного соединения получаем:

$$T_{max} = \sqrt{(R_{1x} + N/n)^2 + (R_{1y} + Q/n)^2}; \quad (2.4.15)$$

$$R_{1x} = \frac{M y_1}{\sum_1^n (x_i^2 + y_i^2)}; \quad R_{1y} = \frac{M x_1}{\sum_1^n (x_i^2 + y_i^2)}, \quad (2.4.16)$$

где  $x_1, y_1$  – координаты наиболее нагруженной заклепки, находящейся на наибольшем расстоянии от центра  $O$ ;  $x_i, y_i$  – координаты  $i$ -й заклепки полустыка;  $n$  – число заклепок в полустыке.

Определив  $T_{max}$ , приступаем к проверке прочности наиболее нагруженной заклепки на срез и смятие:

$$\tau = \frac{4T_{max}}{k_{II} \pi d^2} \leq k_y R_{cp}; \quad (2.4.17)$$

$$\sigma_{cm} = \frac{T_{max}}{zd} \leq k_y R_{cm}, \quad (2.4.18)$$

где  $k_{II}$  – число поверхностей среза;  $z$  – наименьшая суммарная толщина элементов, сминаемых в одном направлении ( $z = \delta_1 + \delta_3$  при  $\delta_1 + \delta_3 < \delta_2$ , в противном случае  $z = \delta_2$ );  $d$  – диаметр заклепки;  $k_y$  – коэффициент условий работы;  $R_{cp}$ ,  $R_{cm}$  – расчетные сопротивления срезу и смятию.

## Тема 8. БАЛКИ. РЕШЕТЧАТЫЕ КОНСТРУКЦИИ (ФЕРМЫ). РАМЫ

### 2.5.1. Общая характеристика балок

В конструкциях строительных и дорожных машин балки имеют широкое применение. Стрелы и рукояти экскаваторов, толкающие брусья бульдозеров, хребтовая балка основной рамы автогрейдера и ряд других узлов машин являются конструкциями балочного типа.

По виду поперечного сечения балки разделяют на прокатные и составные. Прокатные балки отличаются простотой конструкции и малой стоимостью, однако из-за ограниченности сортамента и несоответствия геометрических характеристик сечений условиям нагружения большого распространения они не получили.

По конфигурации сечения различают балки с открытым профилем (уголок, швеллер, двутавр) и замкнутым профилем. Последние в дорожных и строительных машинах применяются гораздо чаще благодаря лучшим условиям защиты металла от коррозии и способности сопротивляться не только изгибающим, но и крутящим моментам. Так как изгибающие моменты, действующие во взаимно перпендикулярных плоскостях, как правило, неодинаковы, чаще применяются балки прямоугольного коробчатого сечения. В случае равенства изгибающих моментов целесообразно использовать балки трубчатого сечения.

### 2.5.2. Расчет балок из проката

Прокатные профили типа двутавров и швеллеров имеют массивные полки и тонкие стенки. Такие профили выгодно применять в тех случаях, когда балки работают на изгиб в одной плоскости.

Сечения прокатных балок выбирают в результате расчета на статическую изгибную прочность. Требуемый момент сопротивления сечения прокатных балок

$$W_{mp} = M / (R k_y), \quad (2.5.1)$$

где  $R$  - расчетное сопротивление растяжению при изгибе;  $k_y$  - коэффициент условий работы.

Далее по сортаменту подбирают номер профиля ( $W \geq W_{mp}$ ) и проверяют его прочность, общую устойчивость и жесткость. Прочность по нормальным напряжениям проверяется с учетом продольной силы  $N$ :

$$\sigma = M/W + N/A \leq R k_y, \quad (2.5.2)$$

прочность по касательным напряжениям от расчетной поперечной силы  $Q$ :

$$\tau = \frac{QS}{J \delta_{cm}} \leq R_{cp} k_y, \quad (2.5.3)$$

где  $A$  - площадь сечения балки;  $S$  - статический момент половины сечения балки относительно нейтральной оси;  $J$  - момент инерции сечения;  $\delta_{cm}$  - толщина стенки;  $R_{cp}$  - расчетное сопротивление срезу.

Напряжения в выбранном сечении должны быть меньше предельного 7 ... 10 %.

Проверка сжатых балок на устойчивость выполняется при недостаточном закреплении сжатого пояса от боковых смещений или при отношении длины  $l$  балки к ширине  $b$  сжатого пояса превышающем 15:

$$\sigma = M / (\varphi_\delta W) \leq R k_y, \quad (2.5.4)$$

где  $\varphi_\delta$  - коэффициент снижения напряжений при потере устойчивости, определяемый по таблицам.

Жесткость балки оценивается относительным прогибом  $f/l$  под нагрузкой, который не должен превышать нормативного значения  $[f/l]$ :

$$f/l = Ml / (kEJ) \leq [f/l], \quad (2.5.5)$$

где  $k$  - коэффициент, зависящий от схемы балки и нагрузки.

Если при обеспечении прочности условие жесткости не выполняется, необходимо увеличить момент инерции сечения.

### 2.6.1. Решетчатые конструкции дорожно-строительных машин.

Решетчатой конструкцией (фермой) называется стержневая система, сохраняющая геометрическую неизменяемость при замене всех жестких узлов шарнирами. Примерами решетчатых конструкций являются башни и стрелы кранов и драглайнов; фермы, мачты копровых и буровых установок; несущие конструкции ленточных транспортеров. Основными элементами плоской фермы, изображенной на рис.2.6.1, являются верхний пояс 1, нижний пояс 2, раскосы 3, стойки 4, косынки 5, сварные узлы опорных устройств 6. Расстояние  $L$  между опорами называется пролетом фермы.

### 2.6.2. Классификация решетчатых конструкций.

По расположению элементов в пространстве решетчатые конструкции разделяются на плоские (рис.2.6.1,а,в-л) и пространственные (рис.2.6.1,б).

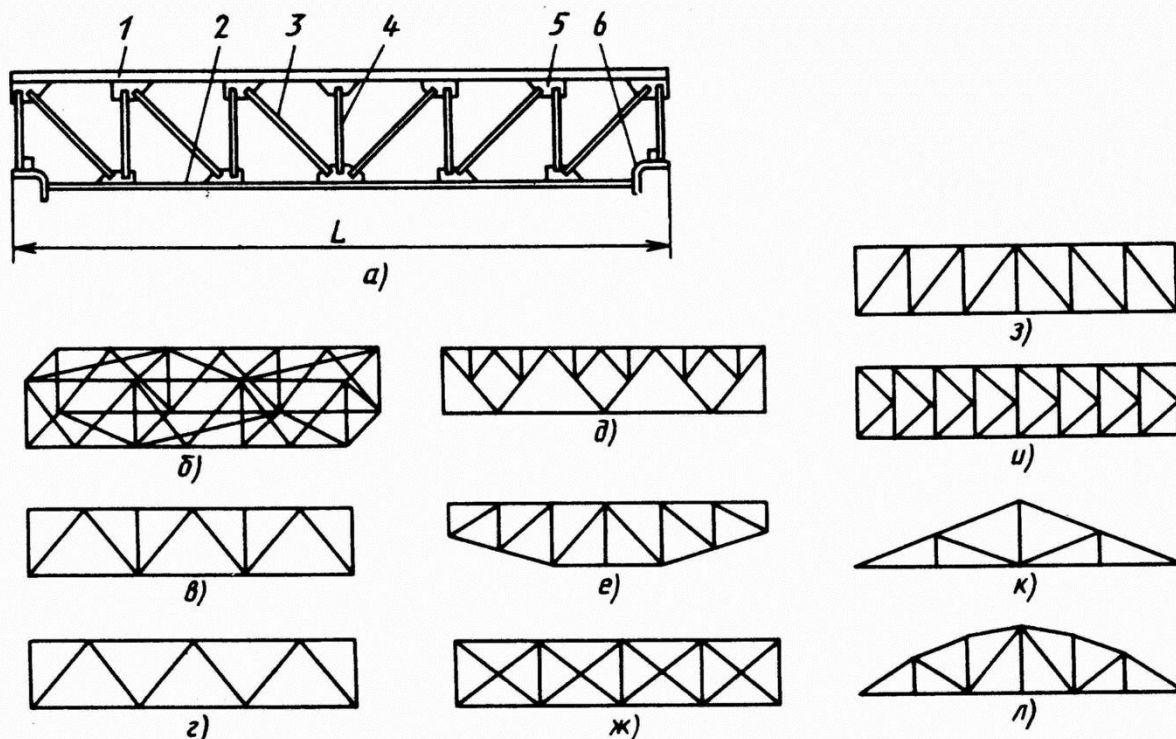


Рис.2.6.1

Решетчатые конструкции бывают статически определимыми и статически неопределимыми (рис.2.6.1,ж). Статически определимые фермы применяют чаще из-за удобства расчетов и нечувствительности к неточности изготовления и монтажа.

По структуре решетки различают фермы с треугольной решеткой (рис.2.6.1,з), с раскосной решеткой (рис.2.6.1,и), с треугольной решеткой и дополнительными стойками (рис.2.6.1,в), с полураскосной решеткой рис.2.6.1,у), шпренгельные (рис.2.6.1,д). Для ферм с треугольной решеткой характерно чередование знаков усилий: растянутые раскосы чередуются со сжатыми. Конструкции с раскосными решетками рекомендуется проектировать так, чтобы на продольный изгиб работали более короткие стержни: стойки, а не раскосы.

По очертанию поясов плоские фермы разделяют на прямоугольные (с параллельными поясами), треугольные (рис.2.6.1,к), полигональные (рис.2.6.1,е) и арочные (рис.2.6.1,л).

### 2.6.3. Рекомендации по проектированию решетчатых конструкций.

Основными параметрами плоских ферм являются пролет(вылет)  $L$ , высота  $h$  и угол наклона  $\alpha$  раскосов. Пролет, как правило, задан, а остальные параметры конструктор должен выбрать.

Для стропильных ферм отношение  $L/h = 6...10$ , для ферм мостовых кранов  $L/h = 12...16$ , для стрел экскаваторов и самоходных кранов  $L/h \leq 40$ . Угол  $\alpha$  рекомендуется принимать равным  $45^\circ$  для конструкций с треугольной решеткой и  $33^\circ...55^\circ$  для конструкций с раскосной решеткой.

Все нагрузки, действующие на решетчатую конструкцию, должны быть приложены в узлах фермы.

Сечения стержней ферм могут быть открытыми или замкнутыми, из одного элемента или составные. Наиболее простыми являются одиночные уголки. Они применяются лишь для легких горизонтальных и вспомогательных ферм, так как передают осевую нагрузку с эксцентриситетом. Поэтому следует отдавать предпочтение симметричным профилям.

При расчете решетчатых конструкций определяют их параметры и проверяют работоспособность.

Проверку работоспособности выполняют для металлоконструкций, основные параметры которых уже определены. Исходными данными являются геометрические размеры (пролет, расстояние между узлами, углы наклона раскосов и т.д.); значения и направления неподвижных внешних нагрузок; подвижные внешние нагрузки; характеристики стали и сечений всех стержней; данные, характеризующие конструктивные и технологические особенности сварных узлов; условия эксплуатации конструкции и требуемый срок службы.

Критерии работоспособности зависят от требований, предъявляемых к конструкции. Как правило, должны выполняться требования прочности, жесткости, усталостной долговечности.

Последовательность проверочного расчета может быть следующей.

1. Составляют расчетную схему, предполагая все узлы фермы шарнирными. На схеме указывают все внешние нагрузки, опорные реакции и размеры.
2. На основе принципа независимости действия сил определяют сначала усилия во всех стержнях от действия неподвижной нагрузки, а затем – от действия подвижной нагрузки. Суммарные продольные силы находят алгебраически.
3. Выявляют максимально нагруженные стержни. Вычисляют напряжения в этих стержнях как сумму напряжений от продольной силы и изгибающего момента  $M = Ne$ , вызванного эксцентриситетом  $e$  (при невыполнении условия пересечения геометрических осей стержней, сходящихся в узле).
4. Максимальные напряжения сравнивают с предельными (допускаемыми напряжениями или расчетными сопротивлениями) для проверки прочности стержней. Сжатые стержни рассчитываются на устойчивость.
5. Для оценки жесткости конструкции определяют перемещения в заданных точках. Найденные значения перемещений сравнивают с предельно допустимым значением.
6. Выполняют расчет сварных соединений на прочность.
7. Исходя из заданного срока службы, вычисляют необходимое число циклов нагружения за весь срок службы конструкции. После чего выполняют расчет на усталостную долговечность (выносливость).

## Тема 9. ОСОБЕННОСТИ ПРОЕКТИРОВАНИЯ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЙ РАЗЛИЧНЫХ МАШИН

### 2.7.1. Особенности расчета металлоконструкций башенных кранов

Металлоконструкции башенных кранов. Масса металлоконструкций составляет 50 ... 80 % общей массы башенных кранов. К несущим конструкциям относятся башня 1 (рис. 2.56), стрела 8, консоль 6, рама поворотной платформы 2, ходовая рама 3, кронштейны 4, распорки 5, оголовки 7. У кранов с поворотной башней оголовок неподвижен относительно башни. У кранов с поворотной стрелой (рис. 2.56,б) оголовок 7, стрела 8 и противовесная консоль 6 совместно вращаются относительно башни 7, неподвижно закрепленной на портале 9. Неподвижные краны опираются на основание и крепятся дополнительными связями к конструкции строящегося здания.

Конструктивно башни и стрелы разделяют на трубчатые (рис. 2.56 а) и решетчатые (рис. 2.56, б). Стержни решетчатых стрел и башен изготавливают из стального проката: уголков или труб.

Основные сведения о расчете стрел и башен. Стрелы и башни рассчитывают по ГОСТ 13994-81. Методика расчета имеет ряд особенностей: расчет выполняют учитывая деформационное состояние стрелы и башни; общую устойчивость стрелы и башни не проверяют. Ниже даны основные положения расчета, однако необходимо подчеркнуть, что при выполнении практических расчетов разработчики должны пользоваться ГОСТ 13994-81.

Расчет на прочность выполняют для рабочего состояния крана с грузом и без груза, для нерабочего состояния (например, при монтаже) и для крана, находящегося под действием испытательной нагрузки. В каждом состоянии регламентируется определенное сочетание нормативных и случайных нагрузок (см. п. 2.2.1). Так, в рабочем состоянии с грузом учитывают нормативные нагрузки: веса крана и груза, ветровую нагрузку, динамическую, возникающую при повороте, а также случайные нагрузки: отклонения веса груза от нормативного значения; пульсацию ветровой нагрузки; случайные составляющие динамических нагрузок, возникающих при повороте, подъеме и опускании груза и при передвижении крана.

Прочность крана или его элементов проверяют по условию

$$K\sigma_n \leq k_y R_p,$$

где  $K = K_1 K_2 + 1$  – коэффициент перегрузки (здесь  $K_1 = 4 \dots 6$  – коэффициент надежности,  $K_2$  – коэффициент изменчивости напряжений);  $\sigma_n$  – нормальное или касательное напряжение от нормативных составляющих нагрузок, МПа;  $k_y = k_{y1} k_{y2}$  – коэффициент условий работы, учитывающий ответственность конструкции ( $k_{y1} = 0,85 \dots 1,05$ ) и назначение рассчитываемого элемента ( $k_{y2} = 0,75 \dots 0,90$ );  $R_p$  – расчетное сопротивление стали.

Таким образом, напряжения определяются только от нормативных нагрузок, а случайные нагрузки входят в коэффициент

$$K_2 = \sqrt{\sum \sigma_i^2 / \sigma_n},$$

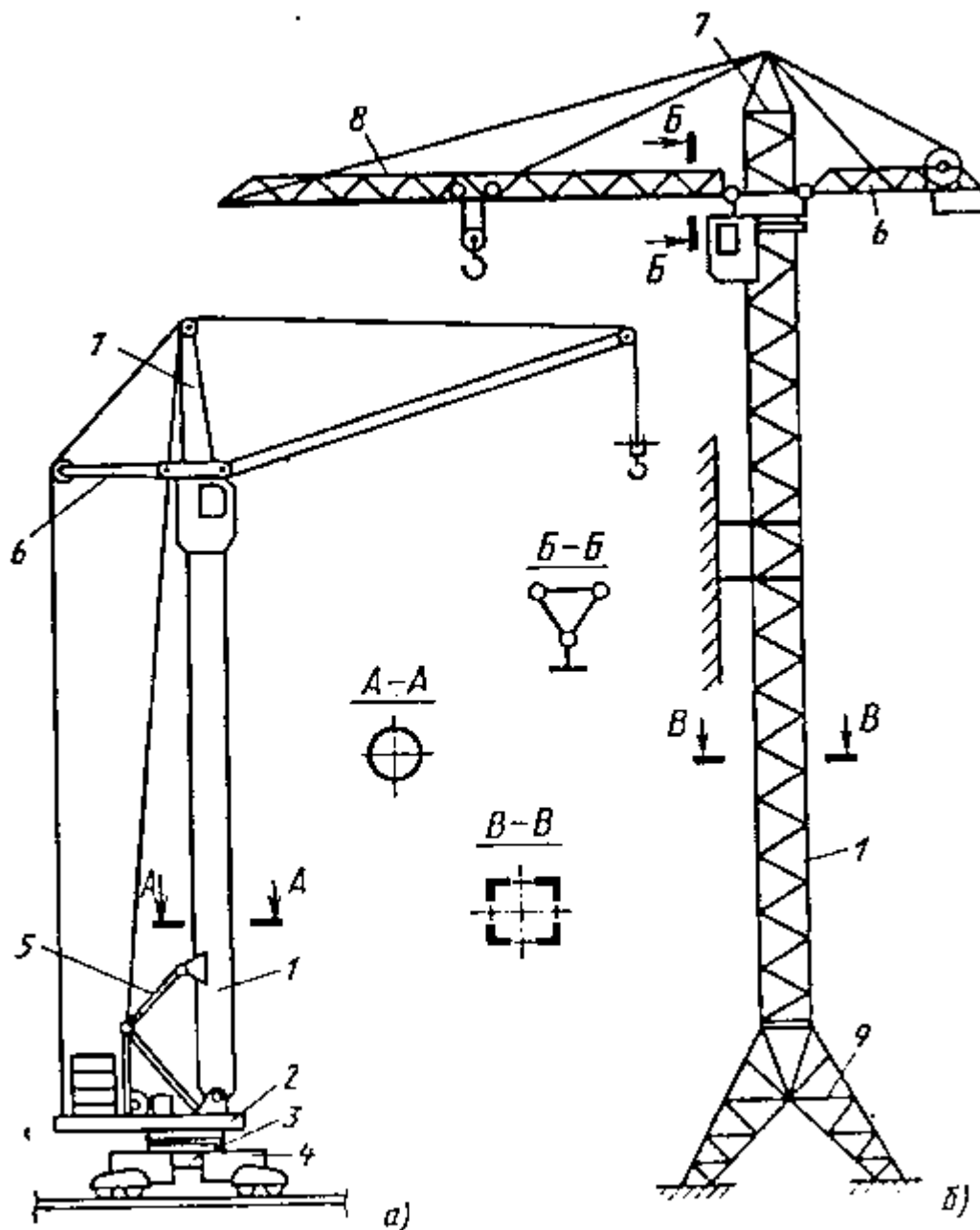
где  $\sigma_i$  – напряжение от среднего квадратического отклонения случайной составляющей нагрузки, МПа.

Прочностной расчет выполняют в следующей последовательности: вычисляют нормативные и случайные нагрузки, определяют расчетное положение (наиболее неблагоприятное взаимное положение частей крана и нагрузок), находят опорные реакции крана или отдельных его частей, вычисляют внутренние усилия в элементах металлоконструкции, деформации стрелы и башни, уточняют значения внутренних усилий в элементах с учетом деформированного состояния, рассчитывают напряжения, проверяют прочность по условию (2.140).

Нагрузки, действующие на металлоконструкции башенных кранов. Расчетная схема крана с указанием нормативных и случайных нагрузок показана на рис. 2.57.

Нормативные нагрузки определяют следующим образом. Силы тяжести крана  $Q_k$  или его узлов  $Q_{сн}$  (стрелы),  $Q_{кн}$  (консоли),  $Q_{бн}$  (башни) принимают по конструкторской документации, а на начальных стадиях проектирования, когда площади поперечных сечений элементов еще неизвестны, силы тяжести задают, ориентируясь на их значения для ранее спроектированных кранов. Вес груза  $\xi$ ), определяют исходя из устойчивости крана против

опрокидывания, для чего используют графики грузоподъемности, показывающие закон изменения допустимого веса груза в функции вылета груза  $L$ . Ветровую нагрузку  $W_H$ , действующую на груз и части крана ( $W_{16H}$ ,  $w_{UM}$ ,  $w_{CH}$ ), рассчитывают по ГОСТ 1451-77.



**Рис. 2.56. Схемы башенных кранов**

Динамическая нагрузка  $f_{пов}$  от поворота для кранов с поворотной башней считается приложенной к точке подвеса груза и действующей горизонтально и перпендикулярно плоскости подвеса стрелы (рис. 2.57). Ее определяют в зависимости от избыточного момента  $M_{изб}$  на валу двигателя или тормоза по формуле  $P_{пов} = M_{изб} K_0 / l$ , где  $l$  — общее передаточное число механизма поворота. Избыточный момент при разгоне равен разности между моментом, развиваемым двигателем, и суммой моментов статических сопротивлений, приведенных к валу двигателя. При торможении  $M_{изб}$  — это сумма тормозного момента и моментов статических сопротивлений.

Кроме упомянутых в ГОСТе нормативных нагрузок рекомендуется учитывать центробежные силы вращающихся масс, расположенные горизонтально в плоскости подвеса стрелы ( $P_c$ , и тд.). Сила  $P_c$  (Н), действующая на груз:



$$P_{ц} = m_{3п} \omega^2 L = \frac{(Q_H + q) \pi^2 n^2 L}{g \cdot 900},$$

где  $m_{3п}$  – сумма масс груза и подвески, кг;  $\omega = \pi n / 30$  – угловая скорость, рад/с;  $Q_H$  – вес груза, Н;  $q$  – вес грузовой подвески, Н;  $g$  – ускорение свободного падения, м/с<sup>2</sup>;  $n$  – частота вращения платформы, об/мин;  $L$  – вылет, м.

Случайные нагрузки от силы тяжести груза  $S_Q$  и ветровые  $S_{wj}$ ,  $S_{w2}$ ,  $S_{wc}$ ,  $S_w$  определяют в зависимости от соответствующих нормативных нагрузок: сила  $S_q$  составляет 4 ... 10 % веса груза  $Q_H$ . Средние квадратические отклонения ветровых нагрузок, действующих на элементы крана, определяют по формуле  $S_{wi} = m_{п} \xi W_{ин}$  ( $m_{п}$  – коэффициент, учитывающий пульсации ветровой нагрузки,  $m_{п} = 0,07 \dots 0,12$ ; % – динамический коэффициент, для вычисления которого в ГОСТ 13994—81 приводятся формулы и таблицы). Среднее квадратическое отклонение случайной составляющей ветровой нагрузки, действующей на груз,  $S_w = 0,1 W_M$ . Случайные динамические нагрузки, возникающие при подъеме/опускании груза ( $S_{д1}$  и  $S_{д2}$ ), при повороте ( $S_{д3}$ ) и разгоне/торможении крана ( $S_{д4}$ ) рассчитывают на основе второго закона Ньютона. Например, вертикальная динамическая нагрузка  $S_{д2} > a_2 m_{3п}$ , где  $a_2 = 0,5$  м/с<sup>2</sup>. Массы башни, стрелы, консоли приводят к опорному шарниру  $C$  стрелы, где приложены горизонтальные случайные нагрузки  $S_{д1}$ ,  $S_{д3}$ ,  $S_{д4}$ , причем их значения не должны быть меньше  $a_1 (m_{1п} + m_{2п})$ . (где  $m_{1п}$ ,  $m_{2п}$  — массы частей крана, приведенные к точке подвеса стрелы и к концу стрелы,  $a_1 = 0,1$  м/с<sup>2</sup>).

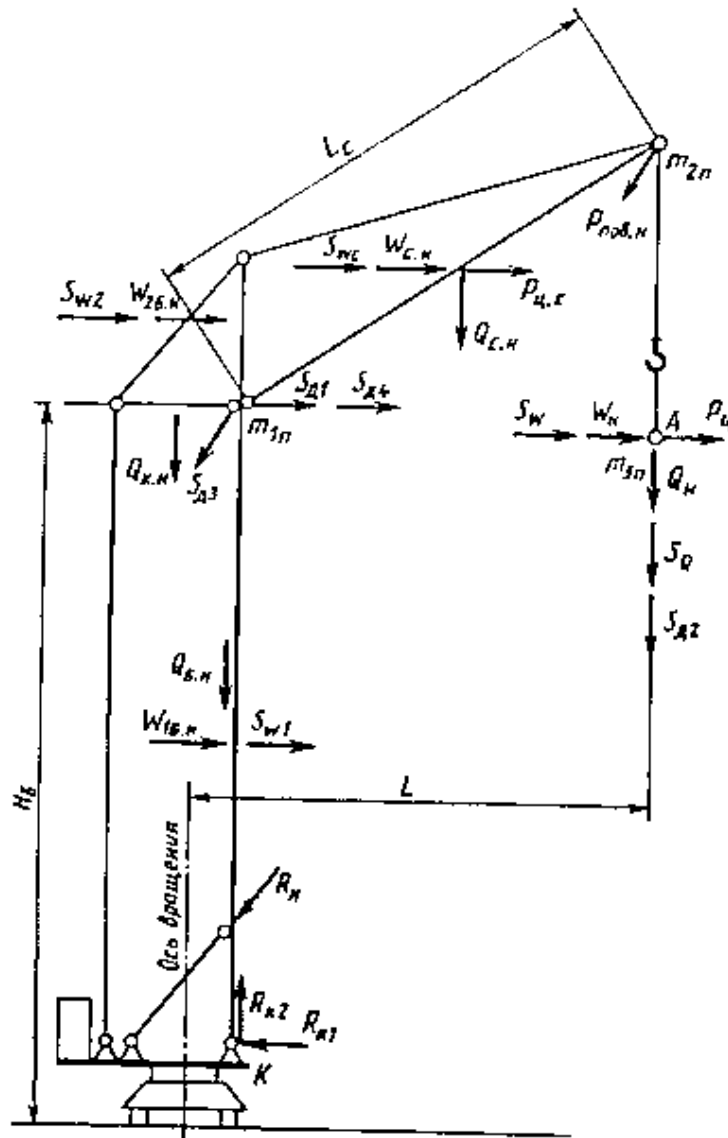
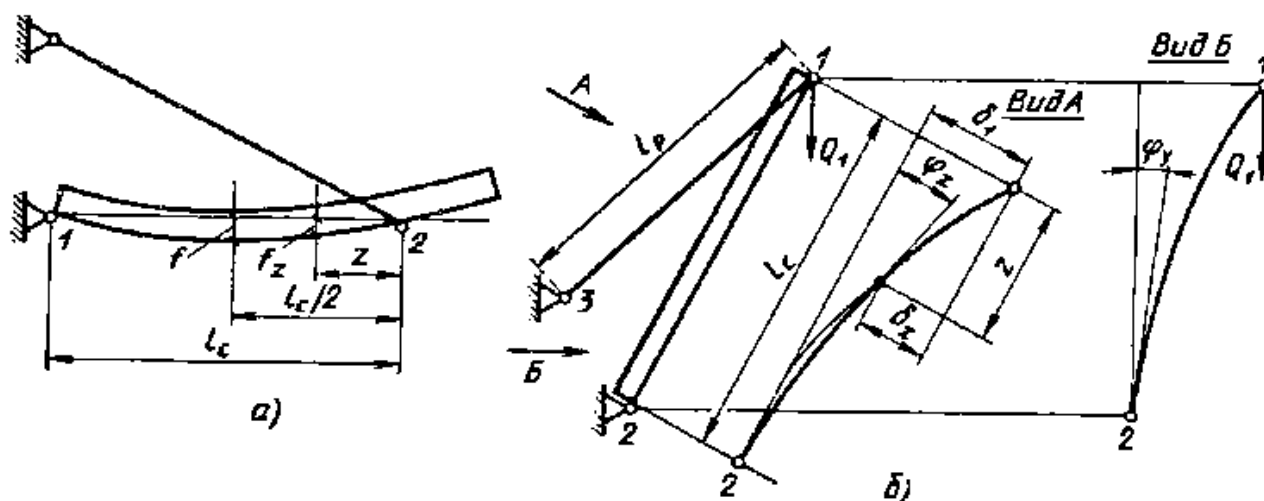


Рис. 2.57. Расчетная схема нагружения башенного крана

Расчетное положение крана определяют в его рабочем состоянии при учете действия только нормативных нагрузок, причем упругие деформации на этой стадии расчета не учитывают. Методы поиска наиболее неблагоприятного для прочности взаимного положения частей крана зависят от его конструкции. Для кранов, в которых вылет  $L$  изменяется при подъеме и опускании стрелы (см. рис. 2.56, а), можно применить метод окружностей влияния, а для кранов с горизонтальной стрелой и перемещающейся кареткой — метод линий влияния.

Расчет стрел по деформированному состоянию. После того, как определены действующие нагрузки и выбрано расчетное положение, дальнейший расчет выполняют методами сопротивления материалов и строительной механики. Особенностью расчета башенных кранов является учет начального прогиба и упругих деформаций от нагрузок. Изгибающие моменты и поперечные силы в стреле надо определять как при деформации стрелы в плоскости подвеса груза, так и в плоскости, перпендикулярной ей. В первом случае начальный прогиб  $f_n$  в любом сечении стрелы на участке 1—2 (рис. 2.58, а) вычисляют в функции максимально допускаемого прогиба в середине стрелы  $f = l_c/800$  (где  $l_c$  - длина стрелы, м):  $f_n = fs \sin(\pi z/l_c)$  (здесь  $z$  — расстояние от точки крепления расчала к стреле до рассматриваемого сечения, м). Изгибающие моменты в сечениях стрелы равны сумме момента  $M_0$  от внешних нагрузок без учета деформации и момента  $M_d$ , возникающего вследствие деформаций:

$$M = M_0 + M_d.$$



**Рис. 2.58. Схемы для расчета стрелы в деформированном состоянии**

В приложении к ГОСТ 13994—81 приводятся расчетные формулы и таблицы для определения  $M_d$ . При ориентировочном расчете можно применить формулы  $M = M_0 + Nv$ , где  $N$  - продольная сила в сечении;  $v = v_1 + f$  - прогиб в рассматриваемом сечении, равный сумме прогибов от действующих нагрузок ( $v_1$ ) и начального прогиба ( $f$ ). Прогибы определяют методами, изложенными в п. 2.2.3. Поперечная сила от действия нагрузок с учетом деформации системы

$$Q = Q_0 + Q_d.$$

При деформации стрелы в плоскости, перпендикулярной плоскости подвеса груза (рис. 2.58, б), момент

$$M_d = \Delta M(1 + \Delta M/M_0)$$

и поперечная сила

$$Q_d = 1,15\Delta Q,$$

где

$$\Delta M = N_c \delta_z + (Q_1 \varphi_y - \delta_1 N_p / l_p) z;$$

$$\Delta Q = N_c \delta_z + Q_1 \varphi_y - \delta_1 N_p / l_p;$$

$\Delta M$  и  $\Delta Q$  — изгибающие моменты и поперечная сила, создаваемые продольными усилиями за счет деформаций, вычисленных без учета продольных сил;  $N_c$  и  $N_p$  — продольные усилия в стреле и растяжке;  $Q_1$  — вертикальная нагрузка, действующая на головку стрелы; остальные обозначения приведены на рисунке 2.58, б.

После определения  $N$ ,  $M$  и  $Q$  сечения проводится расчет напряжений в поясах стрелы или башни и проверка прочности по условию (2.140).

Расчет на усталость выполняют методами, изложенными в п 2.5.3. При этом полагают, что кран работает с грузом наибольшей массы в течение  $N_1$  циклов нагружения, причем

$$N_1 = N_p K_q,$$

где  $N_p$  — расчетное число циклов работы крана;  $K_q = 0,125 \dots 1,0$  — расчетный коэффициент нагрузки крана, зависящий от группы режима работы.

Допускают, что остальные  $N_p - N_1$  циклов кран работает без груза. Эти циклы учитывают только при расчете элементов, расположенных ниже опорно-поворотного устройства.

## 2.7.2. Особенности расчета рамных конструкций землеройных машин с навесным оборудованием

Металлоконструкции бульдозеров. На рис. 2.67, а представлена схема конструкции рабочего оборудования бульдозера ДЗ-110А, которое состоит из отвала 4, левого 1 и правого 6 толкающих брусьев, горизонтального 7 вертикального 5 раскосов и гидроцилиндров 3 подъема-опускания и 2 перекоса отвала бульдозера. Левый толкающий брус 1 оснащен кронштейном, в котором расположен двойной цилиндрический шарнир 8 крепления горизонтального раскоса 7.

Согласно расчетной схеме рабочего оборудования бульдозера (рис. 2.67, б) гидроцилиндры подъема-опускания и перекоса отвала и вертикальный раскос являются простыми стержнями с шаровыми опорами на концах. Хвостовая часть толкающих брусьев присоединяется к раме трактора шаровыми шарнирами 1, 12. Передняя часть толкающих брусьев крепится к отвалу двойными цилиндрическими шарнирами 3, 9, позволяющими передней части брусьев и отвалу поворачиваться относительно друг друга вокруг осей  $x$  и  $z$ .

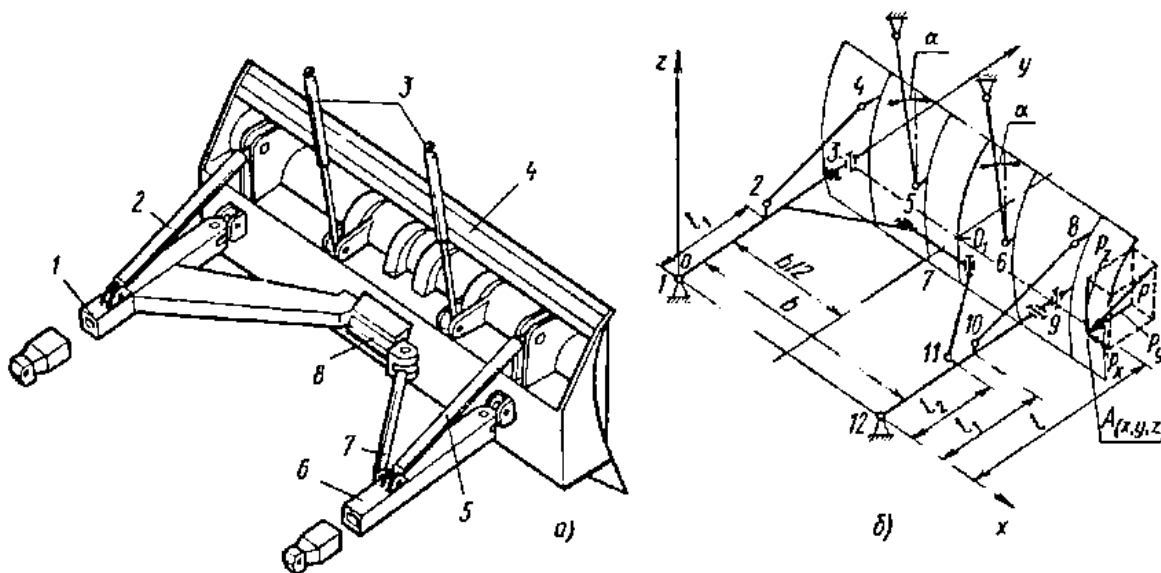


Рис. 2.67. Рабочее оборудование бульдозера и его расчетная схема

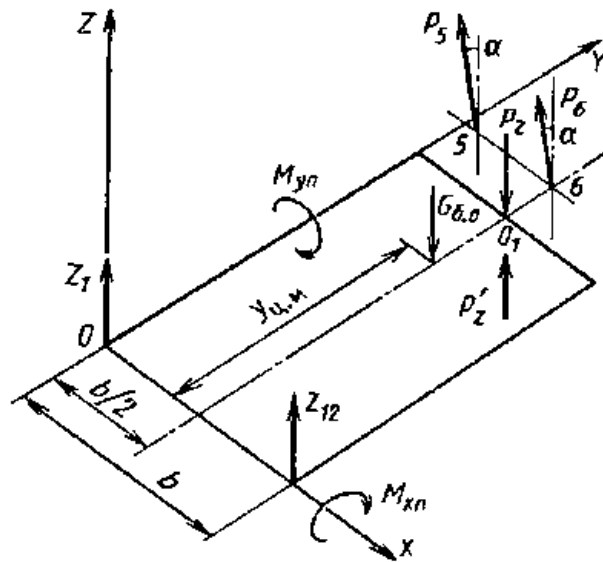
Горизонтальный раскос одним концом 11 присоединяется шаровым шарниром к правому толкающему брусу, а другим крепится к кронштейну левого бруса двойным цилиндрическим шарниром 7, позволяющим горизонтальному раскосу и кронштейну поворачиваться относительно друг друга вокруг осей  $x$  и  $z$ .

Для кинематического анализа воспользуемся формулой (1.2) В рассматриваемом случае  $B = 4$ , т.е. как тела учитываются отвал, левый и правый толкающие брусья и горизонтальный раскос;  $Ш_{2ц} = 3$  — число двойных цилиндрических шарниров передней части толкающих брусьев и горизонтального раскоса, эквивалентных четырем элементарным связям;  $Ш_{ш} = 3$  — число сферических шарниров задней части толкающих брусьев и горизонтального раскоса, эквивалентных трем элементарным связям;  $C = 4$  — число кинематических связей от гидроцилиндров подъема-опускания и перекоса отвала и вертикального раскоса, как простых стержней с шаровыми опорами на концах.

В результате имеем  $U = -1$ , т.е. представленная расчетная схема обладает одной лишней кинематической связью. Однако необходимо учитывать, что штоковые и поршневые полости

гидроцилиндров подъема-опускания отвала гидравлически связаны и одинаковы по размерам. Это условие выражается в виде дополнительного уравнения, определяющего равенство сил  $P_5$  и  $P_6$  на штоках гидроцилиндров, на основе равенства давлений в их полостях, т.е.

$$P_5 = P_6 = P_{56}.$$



**Рис. 2.68. Силы, действующие вне плоскости системы**

Для упрощения решения задачи приложенную в произвольной точке отвала равнодействующую силу  $P$  переносят в точку  $O_1$ , расположенную на оси симметрии отвала бульдозера в плоскости  $xOy$  толкающих брусьев и горизонтального раскоса. Система находится под действием проекций  $P_x, P_y, P_z$ , равнодействующей  $P$ , приложенной в точке  $Ox$ , и моментов  $M_{xп}, M_{yп}, M_{zп}$ , учитывающих перенос равнодействующей сил из точки  $A(x, y, z)$  в точку  $O_1(b/2, l, 0)$ :

$$M_{xп} = -P_z(y - l) - P_y z;$$

$$M_{yп} = P_z(x - b/2) + P_x z;$$

$$M_{zп} = -P_y(x - b/2) + P_x(y - l).$$

Учитывая равенство (2.149), из условия  $\sum M_x = 0$  определим силы на штоках гидроцилиндров подъема-опускания рабочего оборудования (рис. 2.68):

$$P_{56} = \frac{M_{xп} + G_{б.о} u_{ц.м} + P_z l}{2(z_{56} \sin \alpha + y_{36} \cos \alpha)}$$

где  $G_{б.о}$  сила тяжести бульдозерного оборудования;  $u_{ц.м}$  — координата центра масс бульдозерного оборудования;  $z_{56}$  и  $y_{56}$  — координаты точек крепления гидроцилиндров к отвалу.

Силы на штоках гидроцилиндров подъема-опускания рабочего оборудования, приведенные в точку  $O_1$ , представим в виде ортогональных составляющих, действующих вне ( $P_y'$ ) и в плоскости ( $P_y''$ ) системы (толкающие брусья - горизонтальный раскос - отвал), и момента  $M_x'$  относительно оси, параллельной оси  $x$ :

$$P'_z = \frac{M_{x\Pi} + G_{б.о}y_{цт} + P_z l}{z_{сб} \sin \alpha + y_{сб} \cos \alpha} \cos \alpha;$$

$$P'_y = \frac{M_{x\Pi} + G_{б.о}y_{цт} + P_z l}{z_{сб} \sin \alpha + y_{сб} \cos \alpha} \sin \alpha;$$

$$M'_x = P'_y z_{сб} + P'_z (y_{сб} - l).$$

Моменты относительно осей, проходящих через точку  $O_1$ , и параллельных осям  $y$  и  $z$  основной системы отсчета, в силу симметрии расположения гидроцилиндров относительно точки  $O_1$  и равенства (2.149) равны нулю.

Определим реакции в шарнирах 1 и 12 (см. рис. 2.67, б) от сил и моментов, действующих вне плоскости системы «толкающие брусья – горизонтальный раскос – отвал». Согласно расчетной схеме (см. рис. 2.68)

$$\Sigma Z = 0; Z_1 + Z_{12} - P_z + P'_z - G_{б.о} = 0;$$

$$\Sigma M_y = 0; -Z_{12}b + M_{y\Pi} + G_{б.о} b/2 - (P_z - P'_z)b/2 = 0,$$

откуда

$$Z_1 = \frac{1}{2} (P_z - P'_z + G_{б.о}) - M_{y\Pi}/b;$$

$$Z_{12} = \frac{1}{2} (P_z - P'_z + G_{б.о}) + M_{y\Pi}/b.$$

Здесь и далее индекс  $i$  при реакциях  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  и  $R$  означает, что реакция действует в узле  $i$ .

Для определения внутренних усилий от сил и моментов, приложенных в плоскости рамы, рассмотрим расчетные схемы, представленные на рис. 2.69, а, б, в, г, и составим системы уравнений.

Уравнения равновесия отвала (рис. 2.69,5):  $\Sigma X = 0; Y = 0; M_3 = 0$ , т.е.

$$X_3 + X_9 - P_x = 0;$$

$$Y'_3 + Y'_9 - P_y - P'_y = 0;$$

$$Y'_9 b - M_{z\Pi} - (P_y + P'_y)b/2 = 0.$$

Из условия равновесия левого толкающего бруса (рис. 2.69, в) имеем  $\Sigma X = 0; Y = 0; M_7 = 0$ , т.е.

$$X_1 - X_3 + R_7 \sin \varphi = 0;$$

$$Y_1 - Y'_3 - R_7 \cos \varphi = 0;$$

$$(Y'_3 - Y_1)b_7 + X_1 l_7 + X_3 (l - l_7) = 0.$$

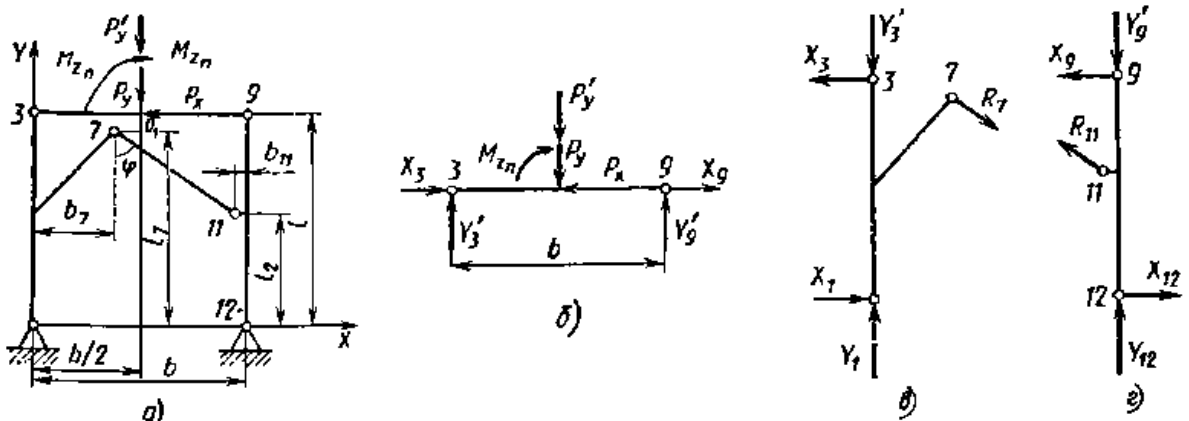


Рис. 2.69. Силы, действующие в плоскости системы

При рассмотрении равновесия правого бруса (рис. 2.69, г) получим  $\sum X = 0; Y = 0; M_{11} = 0$ , т.е.

$$X_{12} - X_9 - R_{11} \sin \varphi = 0;$$

$$Y_{12} - Y_9' + R_{11} \cos \varphi = 0;$$

$$(Y_{12} - Y_9')b_{11} + X_{12}l_2 + \\ + X_9(l - l_2) = 0.$$

Из условия равновесия горизонтального раскоса  $D_7 = R_n$ .

В итоге имеем систему из десяти уравнений, решение которой позволит определить искомые десять неизвестных усилий:  $X_1, Y_1, X_3, Y_3', R_7, R_{11}, X_9, Y_9', X_{12}$  и  $Y_{12}$ . Недостающие неизвестные силы на штоке гидроцилиндра перекоса отвала, вертикальном раскосе ( $R_2 = R_4$  и  $R_8 = R_{10}$ ) и реакции  $Y$  и  $Z$  в узлах 3 и 9 находят из рассмотрения равновесия толкающих брусьев, находящихся под действием сил, указанных на рис. 2.70.

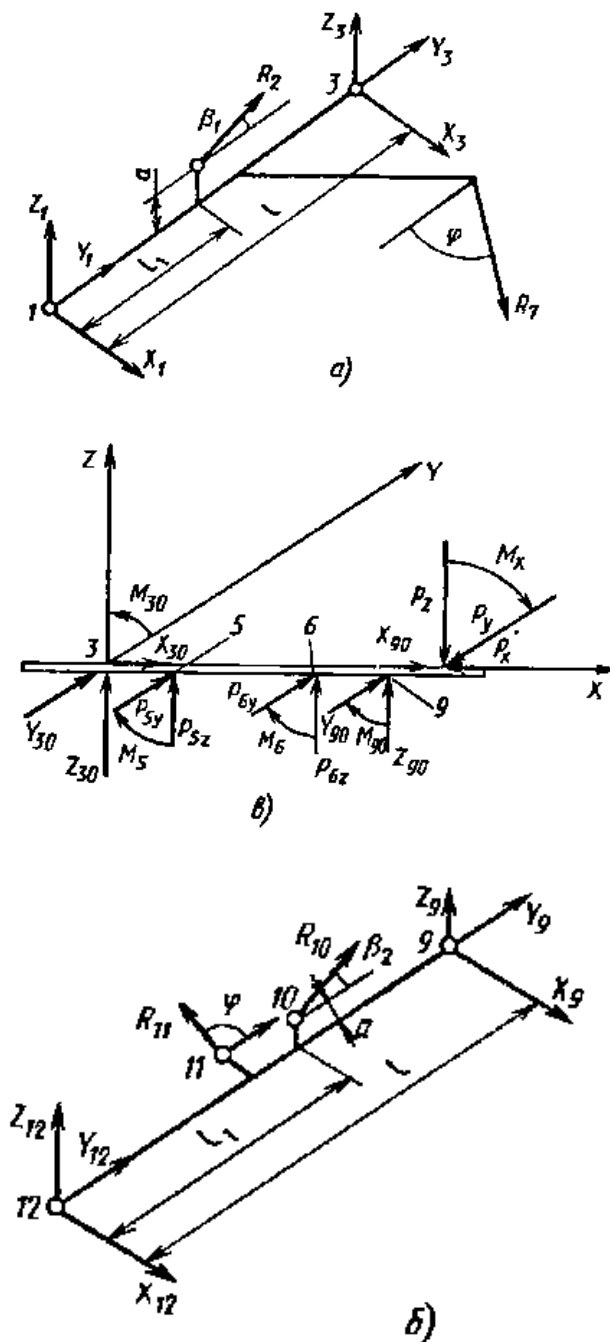


Рис. 2.70. Силы, действующие в толкающих брусьях и отвале бульдозера

Для левого бруса  $\sum Z = 0, \sum Y = 0, \sum M_{3x} = 0$  (рис. 2.70,а):

$$Z_1 + Z_3 + R_2 \sin \beta_1 = 0;$$

$$Y_1 + Y_3 + R_2 \cos \beta_1 - R_7 \cos \varphi = 0;$$

$$-Z_1 l - R_2 \sin \beta_1 (l - l_1) - R_2 a \cos \beta_1 = 0.$$

Для правого бруса  $\sum Z = 0, \sum Y = 0, \sum M_{9x} = 0$  (рис. 2.70,а):

$$Z_{12} + Z_9 + R_{10} \sin \beta_2 = 0;$$

$$Y_{12} + Y_9 + R_{10} \cos \beta_2 + R_{11} \cos \varphi = 0;$$

$$-Z_{12} l - R_{10} (l - l_1) \sin \beta_2 - R_{10} a \cos \beta_2 = 0.$$

Совместное решение полученных уравнений позволит определить недостающие неизвестные. После определения внутренних сил переходят к определению напряжений.

Горизонтальный и вертикальный раскосы рассчитывают как и гидроцилиндры на действие продольной силы. Толкающие брусья рассчитывают на действие изгибающих моментов в плоскостях  $xOy$  и  $yOz$  и продольных сил. Суммарные нормальные напряжения

$$\sigma = \frac{M_Z}{W_Z} + \frac{M_X}{W_X} + \frac{N}{F}.$$

Опасные сечения, подвергаемые проверке, расположены в местах, где крепят шарниры раскосов. Обычно действие поперечных сил и крутящих моментов в сечениях брусков не учитывают. При этом погрешность при расчете наибольших суммарных напряжений в бруске не превышает 10%.

Отвал рассчитывают как балку на двух опорах, реакции в которых определяют из условия приведения всех активных и реактивных сил к линии, соединяющей передние концы толкающих брусков. Расчетная схема отвала представлена на рис. 2.70, в.

Реакции в узлах 3 и 9 отвала определяют из уравнений (рис. 2.70, а - в):

$$M_{30} = R_4 z_4 \cos \beta_1; \quad M_{90} = R_8 z_8 \cos \beta_2;$$

$$X_{30} = X_3; \quad X_{90} = X_9;$$

$$Y_{30} = Y_3 + R_4 \cos \beta_1; \quad Y_{90} = Y_9 + R_8 \cos \beta_2;$$

$$Z_{30} = Z_3 + R_4 \sin \beta_1; \quad Z_{90} = Z_9 + R_8 \sin \beta_2.$$

Реакция  $X_3, Y_3, Z_3, R_8, R_4, X_9, Y_9, Z_9$  определяют из системы уравнений согласно расчетным схемам, представленным на рисунке 2.70, б, в (угол  $\alpha$  см. на рис. 2.68):

$$P_{5y} = P_5 \sin \alpha; \quad P_{6y} = P_6 \sin \alpha;$$

$$P_{5z} = P_5 \cos \alpha; \quad P_{6z} = P_6 \cos \alpha.$$

Моменты:

$$M_5 = P_5 z_5 \sin \alpha;$$

$$M_6 = P_6 z_6 \sin \alpha;$$

$$M_x = -P_z (y - l) + P_y z;$$

$$M_z = P_x y,$$

где  $z_5$  и  $z_6$  – координаты точек приложения сил  $P_5$  и  $P_6$  (см. рис. 2.68);  $y, z, l$  – см. на рис. 2.67).

Под действием внешних сил в отвале возникают усилия в виде изгибающих моментов в плоскостях  $xOy$  и  $xOz$ , крутящего момента и продольных сил. При расчете отвала допускают, что

его размеры и форма сечения по длине постоянны. Отвал рассчитывают по формулам вычисления напряжений для общего случая сложного сопротивления тонкостенного стержня.

Расчет элементов соединения конструкции рабочего оборудования бульдозера проушин, осей, шарниров, болтовых и сварных соединений производится по реактивным усилиям, определенным настоящим расчетом с использованием методик определения прочностных параметров элементов (см. 2.3; 2.4).

В расчете усилий, действующих на элементы конструкции рабочего оборудования бульдозера, внешнюю нагрузку на рабочем органе считают приложенной в произвольно выбранной точке  $A$  с координатами  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и действующей в произвольном направлении, что позволяет анализировать влияние места приложения и направления действия внешней нагрузки на нагруженность элементов конструкции с целью поиска наихудшего случая нагружения.

Расчет на прочность элемента конструкции бульдозера проводят в следующем порядке:

1) на отвал наносят координатную сетку, в узлах которой намечают точку приложения внешней нагрузки переменного направления;

2) составляют уравнения для определения максимального значения внешней нагрузки в зависимости от места приложения и направления ее действия с учетом ограничений по тягово-сцепным свойствам ходового оборудования, мощности двигателя и условия опрокидывания тягача;

3) определяют напряжения в рассчитываемом сечении элемента конструкции от действия максимальной внешней нагрузки, поочередно приложенной в узлах координатной сетки;

4) сравнивают полученные значения напряжений и определяют его максимальное значение;

5) по максимальному значению напряжения рассчитывают на прочность рассматриваемый элемент конструкции рабочего оборудования бульдозера.

Представленный порядок расчета соответствует условию восприятия рабочим оборудованием нагрузок через рабочий орган — отвал бульдозера. Однако на практике при расчете на прочность металлоконструкции рабочего оборудования бульдозера необходимо учитывать возможность непосредственного соприкосновения элементов его несущей части (например, толкающего бруса) с объектами воздействия (с грунтом, камнями, валунами и пр.). В таких случаях расчет на прочность рекомендуется проводить в указанной выше последовательности, расширив п. 1 рассмотрением положений приложения внешней нагрузки по координатам возможного контакта несущей части конструкции с препятствиями. Такой расчет сопряжен с выполнением большого числа однотипных вычислительных операций, что предопределяет необходимость использования ЭВМ.

Металлоконструкции рыхлителей. Навесные рыхлители крепятся к остову базового тягача или к корпусу его заднего моста при помощи трех или четырехзвенной подвески. Наибольшее распространение получила четырехзвенная подвеска рыхлителя, обеспечивающая постоянный или малоизменяющийся угол рыхления.

На примере рыхлителя Д-652АС рассмотрим схему навесного рыхлительного оборудования с четырехзвенной подвеской (рис. 2.71, а). Оборудование состоит из нижней 1 и верхней 4 рам, рабочей балки 3, рабочих органов-зубьев 2 и гидросистемы управления с гидроцилиндрами 5.

Нижняя рама 1 представляет собой две параллельные тяги, соединенные цилиндрическими шарнирами с рабочей балкой 3 коробчатого сечения, сваренной из двух гнутых листов. Передние концы тяг рамы 1 соединяются с трактором двумя цилиндрическими шарнирами, пальцы которых проходят через проушины тягача и серьги гидроцилиндров 5 подъема и опускания рыхлителя.

Верхняя рама 4 представляет собой сварную конструкцию, передние концы тяг которой соединены цилиндрическими шарнирами с проушинами тягача, а задние — с верхними кронштейнами рабочей балки 3. Задние проушины верхней рамы 4 соединены с кронштейнами рабочей балки длинной осью, на выступающих концах которой расположены серьги штоков гидроцилиндров 5.

При определении числа степеней свободы системы навески рыхлителя к тягачу местную кинематическую свободу флюгерного крепления рабочего органа — зуба к рабочей балке на учитывают. Система рабочего оборудования рыхлителя состоит из четырех тел (блоков): рабочей балки с рабочими органами — зубьями, верхней рамы, нижней рамы, остова тягача, т.е.  $B = 4$ . Число цилиндрических шарниров  $Ш_{ц} = 4$ , так как каждый из парных цилиндрических шарниров на



концах нижней и верхней рам принят за один цилиндрический шарнир (рис. 2.71, б). Два гидроцилиндра управления рыхлителем представляют стержневые связи с шаровыми опорами ( $C=2$ ). Тогда  $U=4$ .

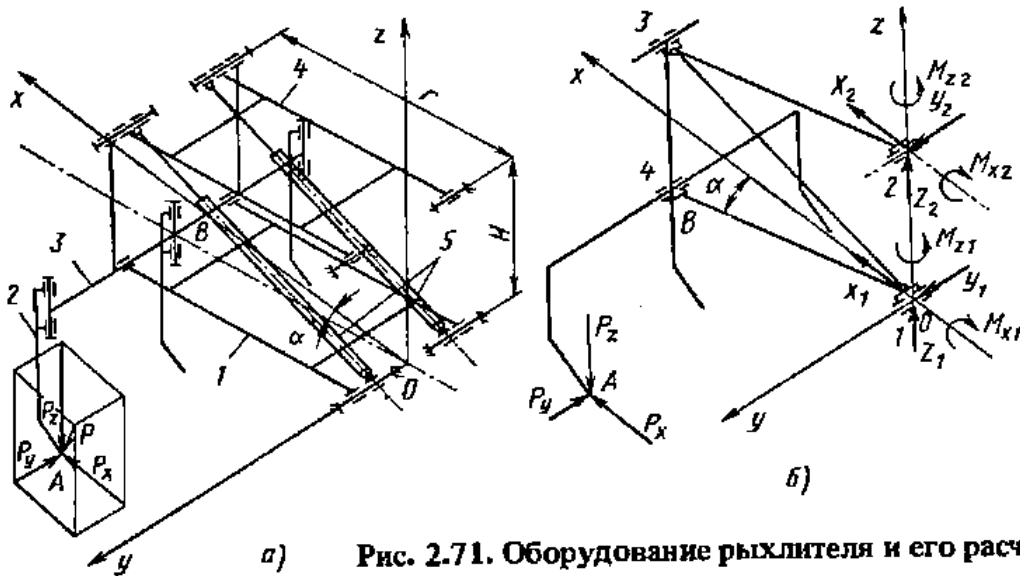


Рис. 2.71. Оборудование рыхлителя и его расчетная схема

Система статически неопределима и имеет четыре лишние связи, для определения усилий в которых надо ввести дополнительные уравнения, одним из которых является равенство усилий в гидроцилиндрах управления рыхлителем, так как они имеют одинаковые параметры, и равенство давлений в одноименных полостях гидроцилиндров, так как они гидравлически связаны:  $P_{ц1} = P_{ц2} = P_{ц}/2$ .

Расчет элементов металлоконструкций рыхлителя начинают с определения реакций опор и силы на штоке гидроцилиндра  $P_{ц}$ . В узле 1 (рис. 2.71,б) неизвестными являются реакции  $Z_1, X_1, Y_1$ , моменты  $M_{z1}, M_{x1}$ ; в узле 2 —  $Z_2, X_2, Y_2, M_{z2}, M_{x2}$ .

Равнодействующую сил со стороны препятствия, приложенную к конструкции оборудования в произвольной точке А с координатами  $x, y, z$ , перенесем в точку В плоскости симметрии рыхлителя, расположенную на оси рабочей балки, координаты которой  $x_B = r \cos \alpha, y_B = 0, z_B = -r \sin \alpha$ : (где  $r$  и  $\alpha$  см. рис. 2.71,а). При этом моменты от приведенных сил:

$$M_{xB} = -P_z y - P_y (z - r \sin \alpha);$$

$$M_{yB} = P_z (x - r \cos \alpha) - P_x (z - r \sin \alpha);$$

$$M_{zB} = -P_x y + P_y (x - r \cos \alpha).$$

Рассмотрим отдельно равновесие системы под действием сил в плоскости симметрии  $xOz$  (рис. 2.72). Для этого проведем сечение I – I и составим уравнения равновесия левой части подвески рыхлителя:

$$\Sigma M_3 = 0; S_{14} = P_x / \cos \alpha - M_{yB} / (H \cos \alpha);$$

$$\Sigma M_1 = 0; S_{23} = (P_z r \cos \alpha - P_x r \sin \alpha + M_{yB}) / (H \cos \alpha);$$

$$\Sigma Z' = 0; P_{ц} = (P_x \sin \alpha - P_z \cos \alpha) / \sin \beta,$$

где  $\sin \beta = H \cos \alpha / l$ ;  $S_{14}$  и  $S_{23}$  – силы в тросах, соединяющих узлы 1 и 4 и 2, 3 соответственно; Тогда

$$P_{ц} = (P_x \sin \alpha - P_z \cos \alpha) l / (H \cos \alpha).$$

Длина гидроцилиндра I в зависимости от угла наклона рам рыхлителя (см. рис. 2.71,а):

$$l = \sqrt{H^2 + r^2 - 2Hr \sin \alpha}.$$

Зная величины  $S_{23}$ ,  $S_{14}$  и  $P_{11}$ , определяют реакции опор 1 и 2 в узлах крепления рыхлителя к тягачу в плоскости  $xOz$ :

$$X_1 = -P_x - \frac{M_{yB}}{H} - \frac{r}{H} (P_x \sin \alpha - P_z \cos \alpha);$$

$$Z_1 = -P_z \left( \frac{r}{H} \sin \alpha - 1 \right) + \frac{\text{tg } \alpha}{H} (P_x r \sin \alpha + M_{yB});$$

$$X_2 = \frac{M_{yB}}{H} + \frac{r}{H} (P_x \sin \alpha - P_z \cos \alpha);$$

$$Z_2 = P_z \frac{r}{H} \sin \alpha - \frac{\text{tg } \alpha}{H} (P_x r \sin \alpha + M_{yB}).$$

Рассмотрим равновесие системы рыхлителя при действии сил и моментов вне плоскости его симметрии. Из расчетной схемы (рис. 2.73, а) следует, что в точке В к подвеске рыхлителя приложены нагрузки  $P_y$ ,  $M_{xB}$ ,  $M_{zB}$ , воспринимаемые цилиндрическими опорами 1 и 2; реакции в которых  $M_{x1}$ ,  $M_{z1}$ ,  $Y_1$ ,  $M_{x2}$ ,  $M_{z2}$ ,  $Y_2$ . Для определения шести неизвестных реакций воспользуемся методом сил (см. п. 1.5.2). Основная система представлена на рис. 2.73, б. Здесь в отличие от опорных реакций  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ ,  $X_1^*$ ,  $X_2^*$ ,  $X_3^*$  — основные неизвестные, определяемые методом сил.

После составления и решения канонических уравнений находят значения  $X_1^*$ ,  $X_2^*$  и  $X_3^*$  и строят действительные суммарные эпюры изгибающих и крутящих моментов, действующих в элементах конструкции подвески рыхлителя вне плоскости ее симметрии.

Далее по найденным значениям реакций в шарнире 2 ( $M_{x2} = X_1^*$ ;  $Y_2 = X_2^*$ ;  $M_{z2} = X_3^*$ ) из уравнений равновесия подвески рыхлителя определим реакции в цилиндрическом шарнире опоры 1 (см. рис. 2.73, а, б):

$$\Sigma Y = 0; Y_1 = P_y - Y_2;$$

$$\Sigma M_x = 0; M_{x1} = -M_{xB} +$$

$$+ P_y r \sin \alpha - M_{x2};$$

$$\Sigma M_z = 0; M_{z1} = -M_{zB} +$$

$$+ P_y r \cos \alpha - M_{z2}.$$

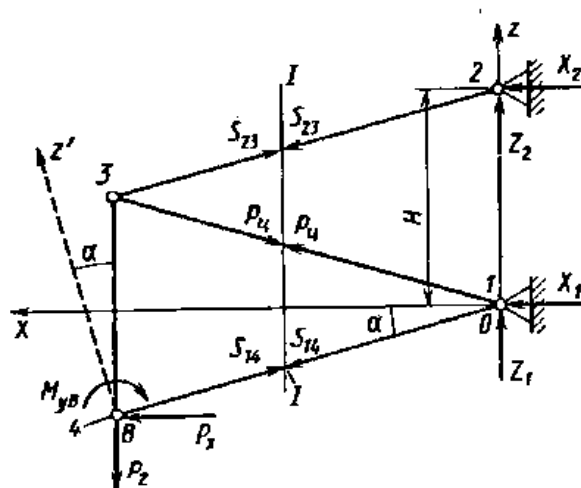
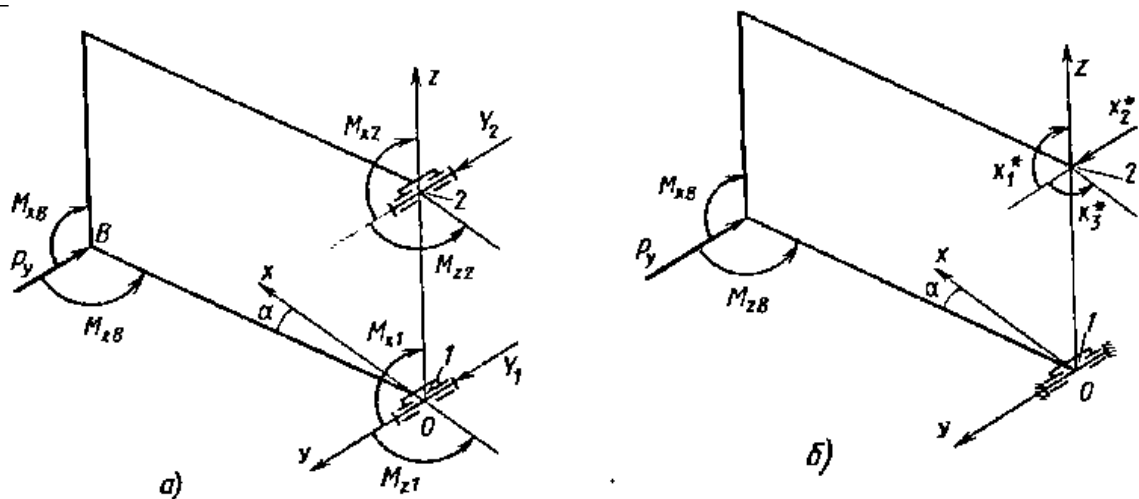


Рис. 2.72. Нагрузки, действующие в плоскости симметрии навески рыхлителя



**Рис. 2.73. Нагрузки, действующие вне плоскости симметрии навески рыхлителя**

По известным значениям реакций опор в цилиндрических шарнирах, изгибающих и крутящих моментов и продольных сил в элементах конструкций подвески рыхлителя определяют опасные сечения и максимальные напряжения.

Рабочий орган – зуб рыхлителя рассчитывают по схеме расчета простой балки. В зависимости от конструкции узла крепления зуб может иметь вид балки, защемленной одним концом или установленной на двух опорах с цилиндрическими шарнирами.

Наибольшие нагрузки в элементах конструкции рыхлителя возникают при упоре рабочего органа-зуба рыхлителя в непреодолимое препятствие. При этом наибольшее тяговое усилие соответствует положению линии действия и направлению равнодействующей реакции отпора непреодолимого препятствия на конструкции трактор-рыхлитель. Помимо этого нагрузка в конкретном элементе конструкции рыхлителя зависит от положения рабочего оборудования в пространстве.

Применение известных аналитических и графических методов строительной механики (линии влияния и окружности влияния) для определения наихудшего случая нагружения элемента конструкции рыхлителя невозможно из-за непостоянства максимальной реакции со стороны препятствия в зависимости от места соприкосновения оборудования рыхлителя с препятствием и направления её действия. Эту величину необходимо определять с учетом мощности двигателя тягача, сцепного веса тягача, по условиям опрокидывания тягача относительно контура опорной поверхности, юза ходового оборудования тягача в направлении отпора со стороны препятствия, разворота тягача относительно точки соприкосновения с препятствием и срабатывания предохранительных клапанов в гидросистеме рабочего оборудования рыхлителя.

В силу этого поиск расчетного положения конкретного элемента конструкции сопряжен с выполнением огромного количества однотипных вычислительных операций определения максимального напряжения в рассчитываемом элементе при переменных значениях координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$  точки контакта препятствия с рабочим оборудованием, углов, определяющих положением рабочего оборудования рыхлителя относительно тягача. В этом случае для решения поставленной задачи целесообразно использовать ЭВМ.

## **II ПРАКТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ**

### **2.1 Темы практических занятий**

1. Образование и кинематический анализ систем.
2. Исследование неизменяемых ферм.
3. Статический метод: способ вырезания узлов, способ сечений, способ моментной точки и способ проекций.
4. Основы кинематического метода.
5. Линии влияния изгибающих моментов и поперечных сил для однопролетных и консольных балок.
6. Построение линий влияния усилий в стержнях простейших ферм.
7. Определение перемещений от температурных и дислокационных воздействий.
8. Метод сил.
9. Расчет усталостной долговечности.
10. Болтовые соединения.
11. Расчет коробчатых балок.

### **2.2 Темы курсовых проектов (работ)**

1. Проектирование металлоконструкции неповоротного отвала бульдозера.
2. Проектирование концевой балки мостового крана.
3. Проектирование стрелы копра на базе экскаватора.
4. Проектирование рамы грузоподъемного оборудования вилочного погрузчика.
5. Проектирование тяговой рамы автогрейдера.
6. Проектирование стойки козлового крана.
7. Проектирование металлоконструкции стрелы манипулятора на базе автомобиля (или иного шасси).
8. Проектирование стрелы одноковшового экскаватора.
9. Проектирование рамы ковша фронтального погрузчика.
10. Проектирование плужного отвала на базе автомобиля.

# ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №1

## Образование и кинематический анализ систем

### Задача 1

Представлена схема экскаватора (рис.1.1.6,а), оборудованного обратной лопатой. Система состоит из шести дисков, обозначенных римскими цифрами, пять простых шарниров: А, В, С, D, E и пять стержней: 1-1', 2-2', 3-3', 4-4', 5-5'. В соответствии с формулой (1.1.5)  $I = 3 \cdot 6 - 15 - 3 = 0$ . Аналитическое условие геометрической неизменяемости выполнено:  $I = 0$ .

Проследим путь образования этой системы. К диску I при помощи шарнира А и стержня 1-1' присоединяется диск II, далее аналогично диски III, IV, V, VI. Следовательно, система неизменяема.

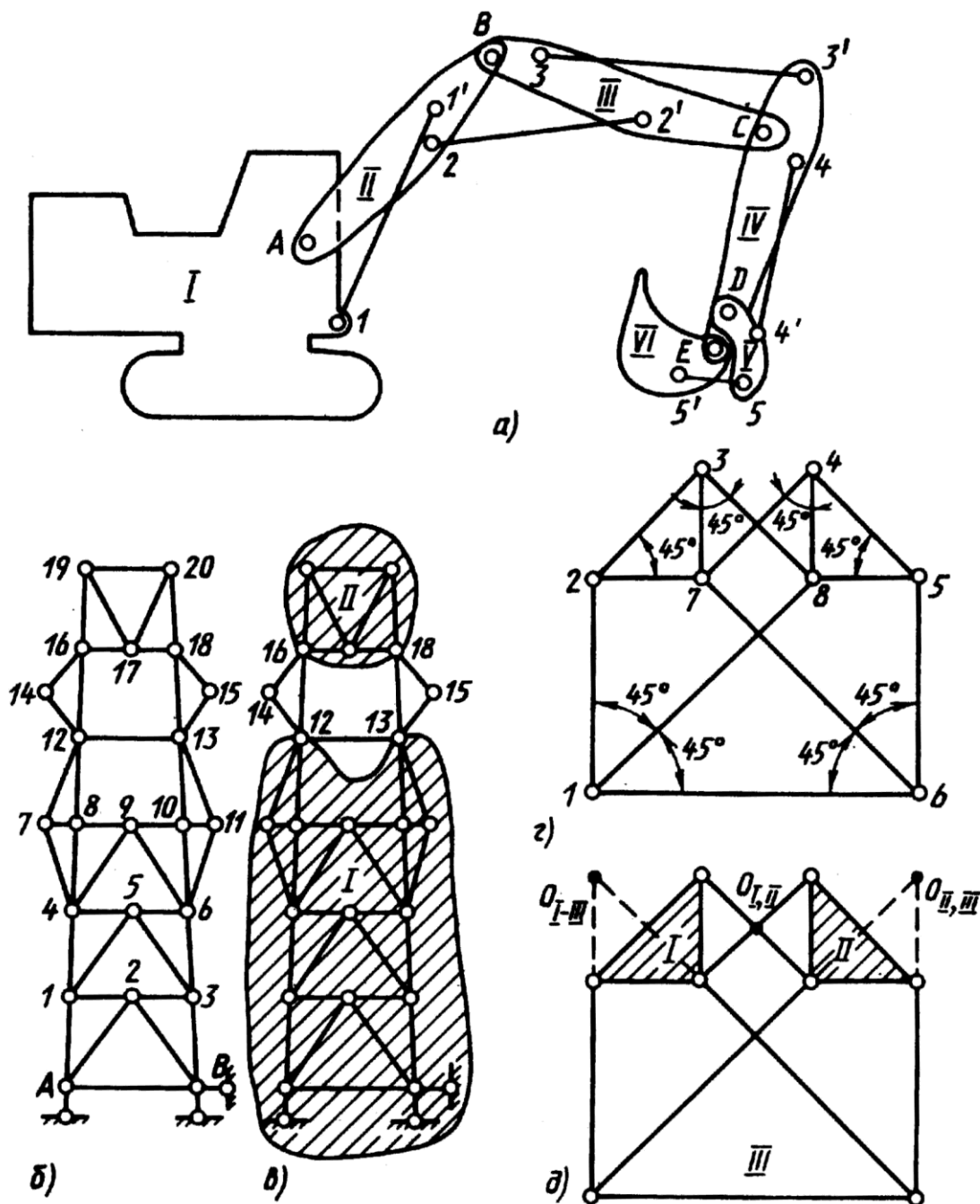


Рис.1.1.6

Если при демонтаже какой-либо части системы оставшаяся часть остается неизменяемой, то удаленная часть называется дополнительной (по отношению к оставшейся), а оставшаяся — главной частью системы.

В рассматриваемой системе диск VI по отношению к другим дискам представляет дополнительную часть, т.к. его удаление (вместе с шарниром E и стержнем 5-5') не влияет на неизменяемость оставшейся системы. Аналогично диск IV совместно с дисками V и VI являются дополнительной частью системы по отношению к главной части, состоящей из дисков I, II и III.

### *Задача 2*

Прикрепленная к земле система, изображенная на рис.1.1.6,б, имеет 22 узла и 44 линейные связи, включая опорные.

По формуле (1.1.3)  $I = 2 \cdot 22 - 44 = 0$ . Однако кинематический анализ показывает, что система изменяема.

Последовательное присоединение диад позволяет представить данную систему в виде двух дисков I и II (рис.1.1.6,в), соединенных между собой двумя связями-дисками (12-14-16 и 13-15-18). Для неизменяемой системы нужны три связи. Таким образом, вся система изменяема, несмотря на наличие стержня (12-13) в диске I.

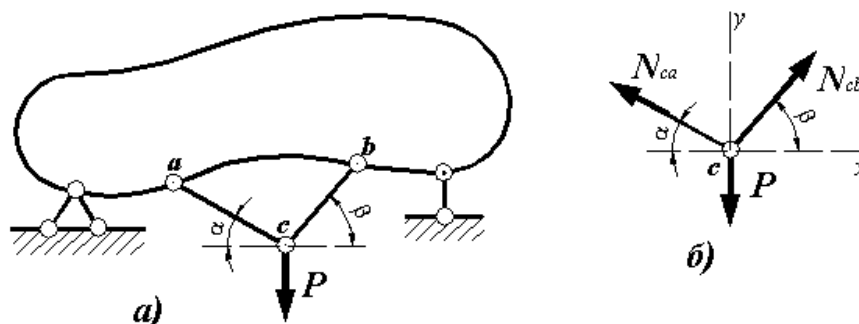
Достаточно этот стержень переставить в положение 12-18 или 13-16 и вся система станет неизменяемой.

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №2

### Исследование неизменяемых ферм

#### Задача 1

Имеем геометрически неизменяемую систему (рис.1.1.11), состоящую из диска, связанного тремя стержнями с землей, к которому присоединен узел  $c$  при помощи двух стержней  $ac$  и  $cb$ , не лежащих на одной прямой.



**Рис.1.1.11**

Приложим к узлу  $c$  силу  $P$  и определим усилия в стержнях  $ac$  и  $cb$ . Для этого составим уравнения равновесия:

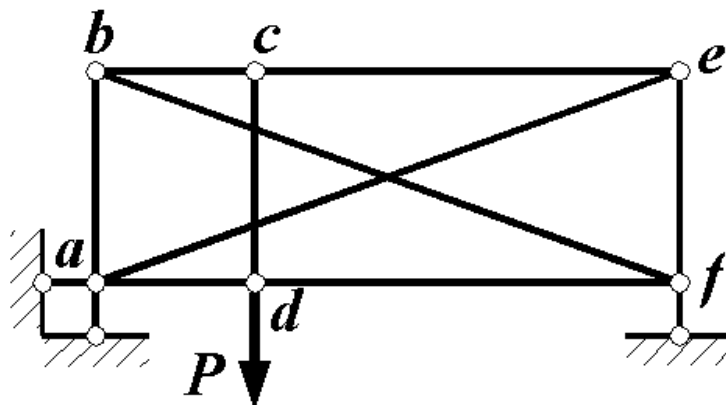
$$\begin{aligned} \sum X = 0; & \quad -N_{ca} \cos \alpha + N_{cb} \cos \alpha = 0; \\ \sum Y = 0; & \quad N_{ca} \sin \alpha + N_{cb} \sin \alpha - P = 0. \end{aligned}$$

Откуда  $N_{ca} = N_{cb} = \frac{P}{2 \sin \alpha}$ . Из решения следует, что при уменьшении угла  $\alpha$  до нуля, усилия

$N_{ca}$  и  $N_{cb}$  вырастут до бесконечности. Это служит признаком мгновенно изменяемой системы: стержни  $ac$  и  $cb$  располагаются на одной прямой.

#### Задача 2

Еще один признак мгновенной изменяемости. На рис.1.1.12 представлена ферма, удовлетворяющая условию геометрической изменяемости ( $I = 2U - S - 3 = 0$ ).



**Рис.1.1.12**

Составляя поочередно условия равновесия для узлов  $c$  и  $d$  этой системы, приходим к противоречивым результатам:  $N_{cd} = 0$  и  $N_{cd} = P$ . Причиной этого противоречия является также мгновенная изменяемость системы.

Таким образом, статическими признаками мгновенной изменяемости системы, имеющей достаточное для геометрической неизменяемости связей, являются:

- 1) возникновение в отдельных стержнях системы бесконечно больших усилий;
- 2) неопределенность усилий в стержнях системы (в частности получение противоречивых результатов).

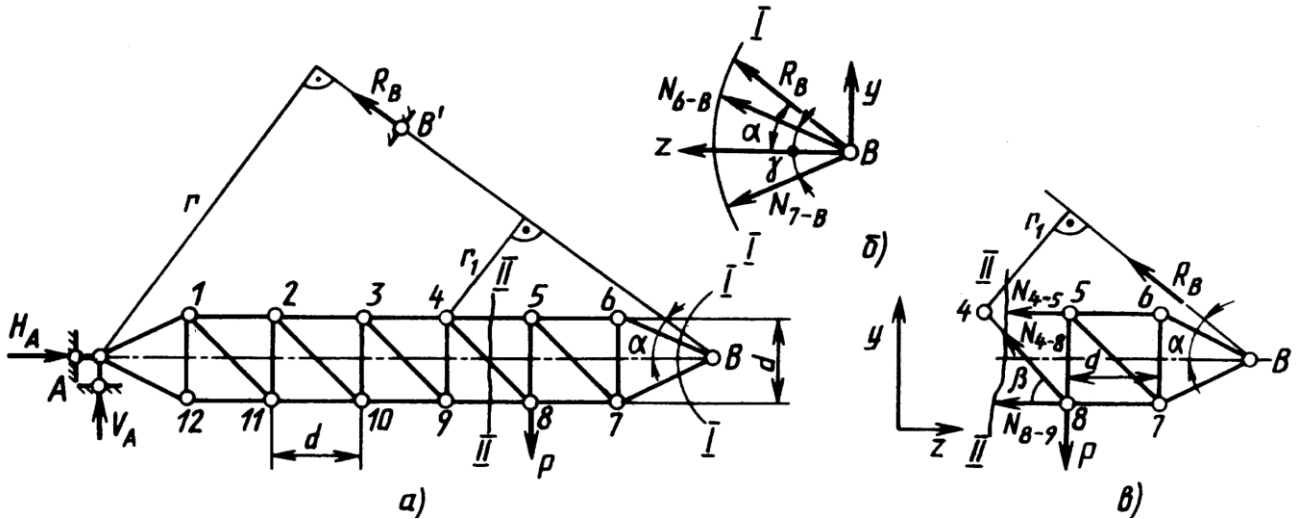


## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №3

### Статический метод: способ вырезания узлов, способ сечений, способ моментной точки и способ проекций

#### Задача 1

Рассмотрим ферму (рис.1.2.3,а).



**Рис.1.2.3**

1) Определение реакций опор (рис.1.2.3,а). Составляем три уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0; & \quad R_B r - F5d = 0; \\ \sum X = 0; & \quad H_A - R_B \cos \alpha = 0; \\ \sum Y = 0; & \quad V_A - F + R_B \sin \alpha = 0. \end{aligned}$$

2) Для определения усилий в стержнях 6-В и 7-В вырезаем узел В (сечение I-I) и составляем уравнения проекций (рис.1.2.3,а,б):

$$\begin{aligned} \sum X = 0; & \quad N_{6-B} \cos \gamma + N_{7-13} \cos \gamma + R_B \cos \alpha = 0; \\ \sum Y = 0; & \quad N_{6-B} \sin \gamma - N_{7-B} \sin \gamma + R_B \sin \alpha = 0. \end{aligned}$$

3) Для определения усилий в стержнях 4-5, 4-8 и 8-9 (рис.1.2.3,в) проводим сечение II-II и составляем уравнения моментов относительно моментных точек 4 и 8 и уравнение проекций на вертикальную ось:

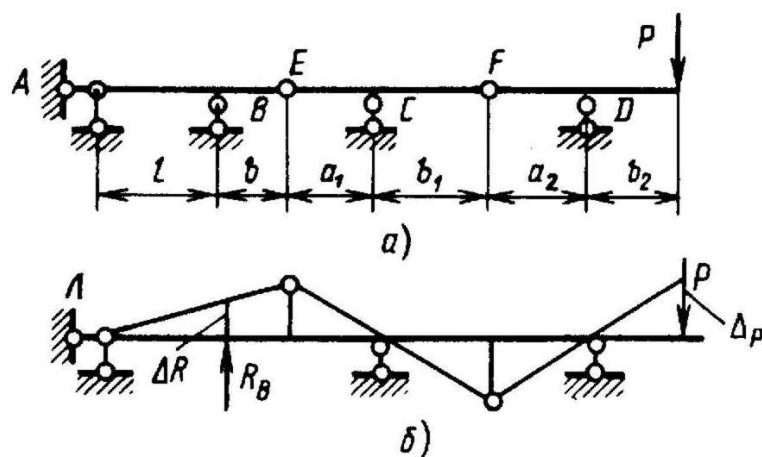
$$\begin{aligned} \sum M_4 = 0; & \quad R_B r_1 - Fd - N_{8-9} d = 0; \\ \sum M_8 = 0; & \quad N_{4-5} d + R_B \cos \alpha \frac{d}{2} + R_B \sin \alpha 2d = 0; \\ \sum Y = 0; & \quad N_{4-8} \sin \beta - F + R_B \sin \alpha = 0. \end{aligned}$$

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №4

### Основы кинематического метода

#### Задача 1

Определить реакцию опоры  $R_B$  (рис.1.2.4,а).



**Рис.1.2.4**

Удаляем опорную связь  $B$ , даем возможное перемещение системе (рис.1.2.4,б), получаем:

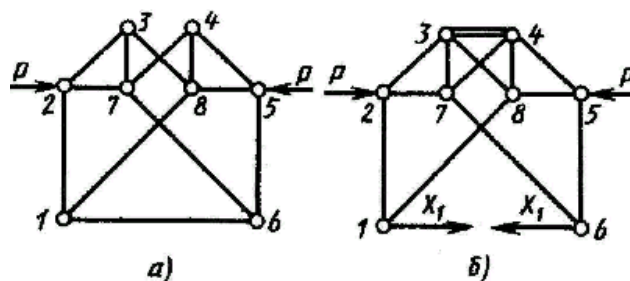
$$-P \Delta P + R_B \Delta R = 0.$$

Знак «-» в первом слагаемом говорит о том, что сила и перемещение направлены в противоположные стороны.

*Тема: Основы метода замены связей.*

#### Задача 2

Рассмотрим пример применения этого метода для уже известной системы (рис.1.2.5,а).



**Рис.1.2.5**

На рис.1.2.5,б показана преобразованная система, в которой удален стержень 1-6, а вместо него приложены неизвестные силы  $X_1$  и введен стержень 3-4. Вырезая последовательно узлы 1, 2, 7 и 3 и учитывая симметрию системы, получаем следующие ненулевые усилия в стержнях от внешней нагрузки  $P$ :

$$N_{2-7}^P = N_{5-8}^P = -P; \quad N_{4-7}^P = N_{3-8}^P = -\sqrt{2} P; \quad N_{3-7}^P = N_{4-8}^P = P; \quad N_{3-4}^P = R_{1P} = P.$$

Аналогично от действия силы  $\bar{X}_1 = 1$  находим:

$$\begin{aligned} \bar{N}_{1-6} &= 1; & \bar{N}_{1-8} &= \bar{N}_{6-7} = -\sqrt{2}; & \bar{N}_{1-2} &= \bar{N}_{5-6} = 1; & \bar{N}_{2-7} &= \bar{N}_{5-8} = -1; \\ \bar{N}_{2-3} &= \bar{N}_{4-5} = \sqrt{2}; & \bar{N}_{4-7} &= \bar{N}_{3-8} = 0; & \bar{N}_{3-7} &= \bar{N}_{4-8} = -1; & \bar{N}_{3-4} &= r_{11} = 1. \end{aligned}$$

Согласно выражению (1.2.4):

$$I X_I + P = 0 \text{ или } X_I = -P$$

Тогда по формуле (1.2.5):

$$N_{1-6} = N_{1-2} = N_{5-6} = -P; \quad N_{1-8} = N_{6-7} = \sqrt{2} P;$$

$$N_{2-7} = N_{5-8} = 0; \quad N_{2-3} = N_{4-5} = -\sqrt{2} P;$$

$$N_{4-7} = N_{3-8} = -\sqrt{2} P; \quad N_{3-7} = N_{4-8} = 2P$$

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №5

### Линии влияния изгибающих моментов и поперечных сил для однопролетных и консольных балок

#### Задача 1

Построить линию влияния изгибающего момента и поперечной силы для сечения  $m$  балки при движении груза  $P = 1$  по балке верхнего этажа (рис.1.3.6).

Построим сначала линию влияния опорной реакции  $R_A$ . Величина реакции  $R_A$  при положении груза  $P = 1$  на балке верхнего этажа, жестко связанного с балкой  $AB$  при помощи вертикальной балочки равна  $R_A = (l - z)/l$ . (Из уравнения равновесия

$$\sum M_B = 0; R_A l - 1 \cdot (l - z) = 0).$$

Линию влияния  $R_A$  строим по двум точкам: при  $z = 0$   $R_A = 1$ ; при  $z = l$   $R_A = 0$ .

Изгибающий момент при расположении груза на балке верхнего этажа равен  $M_m = R_A a$ . Следовательно, линия влияния  $M_m$  имеет вид л.в.  $R_A$ , все ординаты которой умножены на постоянный коэффициент  $a$ . Подобным образом строится л.в.  $Q_m$ . Она ничем не отличается от л.в.  $R_A$ , т.к.  $Q_m = R_A$ .

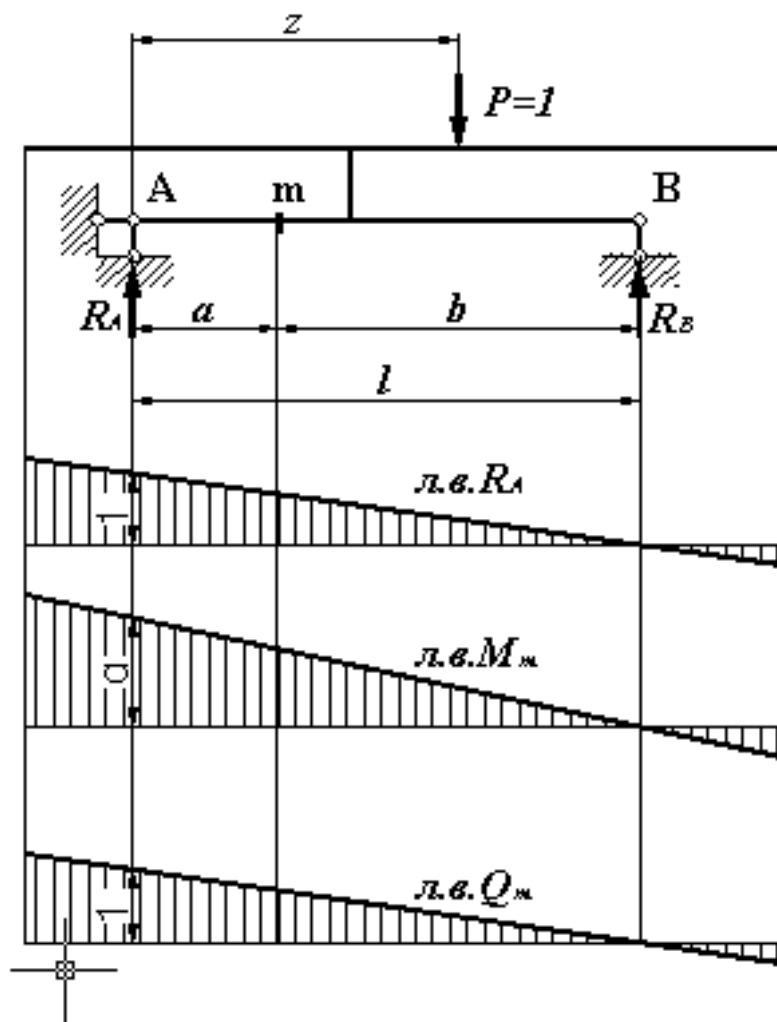


Рис. 1.3.6.

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №6

### Построение линий влияния усилий в стержнях простейших ферм

#### Задача 1

Рассмотрим способ построения л.в. плоской фермы (рис. 1.3.14).

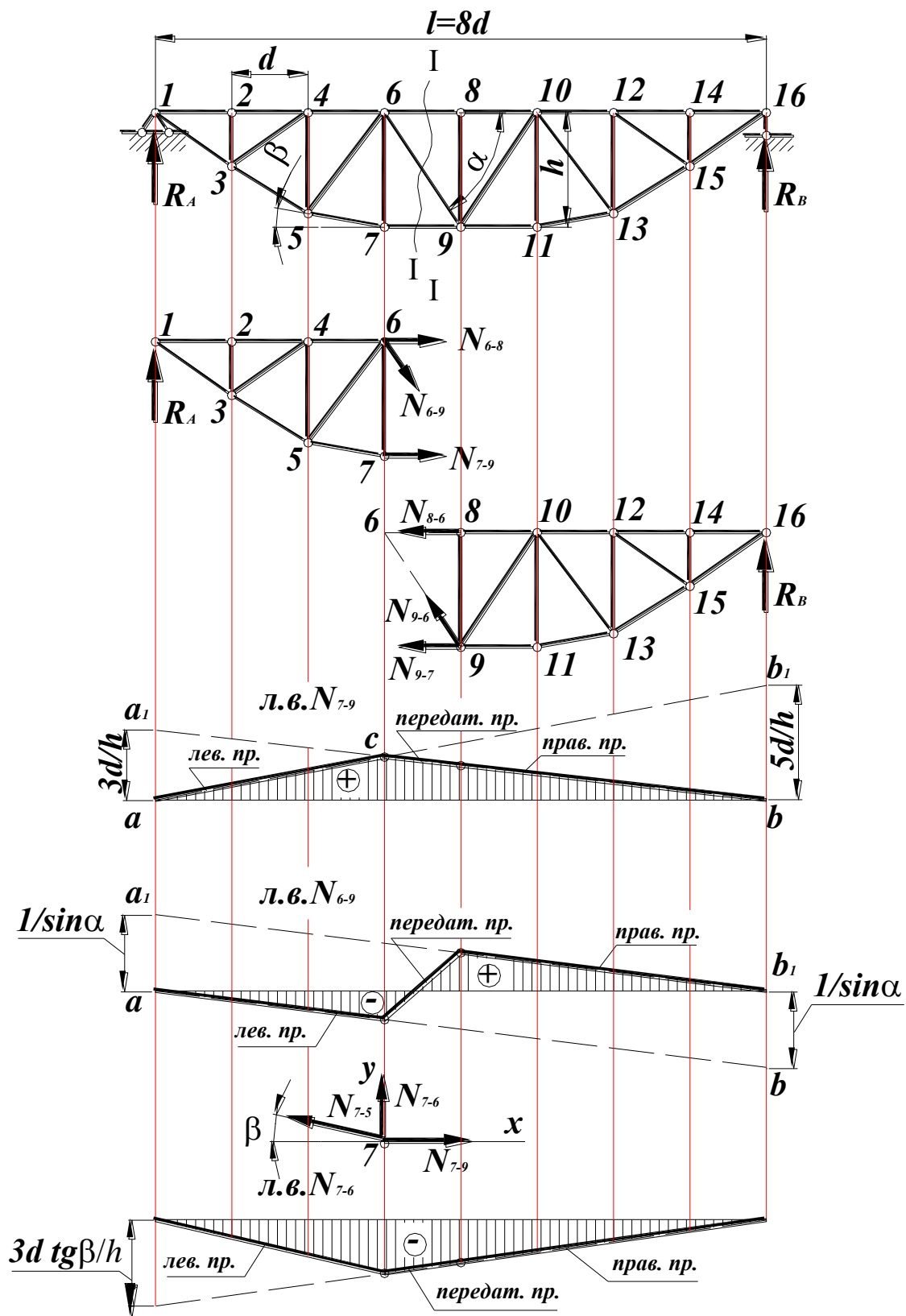


Рис.1.3.14

**Способ проекций.** Построим л.в. усилия в раскосе фермы 6-9. Когда груз  $P=I$  расположен между узлами 8 и 16 (движение происходит по верхнему поясу), рассматриваем равновесие левой отсечённой части фермы. Составим уравнение проекций всех сил на вертикальную ось:

$$\sum Y = 0;$$

$$R_A - N_{6-9} \cdot \sin \alpha = 0.$$

$$\text{Откуда } N_{6-9} = \frac{R_A}{\sin \alpha}.$$

При грузе, расположенном между узлами 1 и 6, рассматриваем условие равновесия правой части фермы.

$$\sum Y = 0;$$

$$R_B + N_{6-9} \cdot \sin \alpha = 0.$$

$$\text{Откуда } N_{6-9} = -\frac{R_B}{\sin \alpha}.$$

Формулы для усилия  $N_{6-9}$  показывает, что пока груз расположен на правой части фермы, л.в.  $N_{6-9}$  может быть получена умножением ординат л.в.  $R_A$  на  $1/\sin \alpha$ ; когда же груз находится в пределах левой части фермы, то  $N_{6-9}$  равна опорной реакции  $R_B$ , умноженной на  $-\frac{1}{\sin \alpha}$ .

Для построения правой прямой откладываем от оси отсчёта на левой опорной вертикали ординату  $1/\sin \alpha$  и соединяем её вершину с нулевой точкой правой опорной вертикали (прямая  $a_1b$ ). На построенную прямую сносим узлы 8, 10, ..., 16.

Для построения левой прямой от оси отсчёта на левой опорной вертикали откладываем вниз ординату  $1/\sin \alpha$  и соединяем её вершину с нулевой точкой правой опорной вертикали. На построенную левую прямую (прямая  $ab_1$ ) сносим левые узлы 1, 2, 4 и 6.

Передаточная прямая соединяет вершины узловых ординат расчётной панели.

Заметим, что и в этом случае правая прямая пересекается с левой под моментной точкой (которая находится в бесконечности, т.к. прямые параллельны между собой).

Л.в.  $N_{6-9}$  имеет участки с положительными и отрицательными значениями ординат. Следовательно, при движении груза по ферме стержень может быть сжат или растянут.

Построим теперь л.в. усилия  $N_{6-7}$  в стойке. В этом случае способ моментной точки не применим, т.к. приходится рассекать ферму сечением, в которое попадают четыре стержня.

В этом случае лучше воспользоваться способом вырезания узлов. Вырезав узел 7, составим для него уравнение равновесия:

$$\sum Y = 0;$$

$$N_{7-6} + N_{7-5} \cdot \sin \beta = 0.$$

$$\text{Откуда } N_{7-6} = -N_{7-5} \cdot \sin \beta.$$

Так как груз  $P=I$  к узлу 7 непосредственно не прикладывается (он движется по верху фермы), то полученная зависимость между усилиями  $N_{7-6}$  и  $N_{7-5}$  сохраняется при любом положении груза в пределах пролёта фермы. Поэтому л.в.  $N_{7-6}$  может быть получена из л.в.  $N_{7-5}$  умножением всех её ординат ( $-\sin \beta$ ). Но усилие  $N_{7-5}$  пока неизвестно. Для его определения спроецируем силы, действующие на узел 7, на горизонтальную ось:

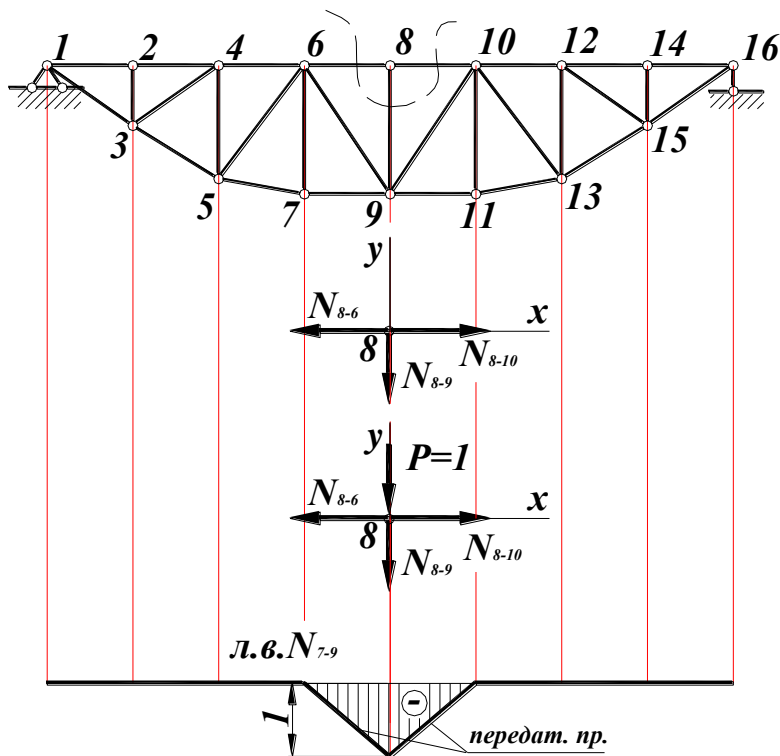
$$\sum X = 0;$$

$$N_{7-9} - N_{7-5} \cdot \cos \beta = 0.$$

$$\text{Откуда } N_{7-5} = \frac{N_{7-9}}{\cos \beta}.$$

$$\text{Поэтому } N_{7-6} = -N_{7-5} \cdot \sin \beta = -N_{7-9} \cdot \operatorname{tg} \beta.$$

Т.о., л.в.  $N_{7-6}$  может быть получена из построенной ранее способом моментной точки л.в.  $N_{7-9}$ , умножением всех её ординат на  $(-\text{tg}\beta)$ .



**Рис.1.3.15**

Построим л.в. для стойки 8-9. Здесь так же как и в предыдущем случае, нельзя провести разрез, пересекающий только три стержня. Поэтому воспользуемся способом вырезания узлов (рис.1.3.15). Вырежем узел 8 и рассмотрим его равновесие:

1) при нагрузке в любом узле, кроме 8,

$$\sum Y = 0, \quad -N_{8-9} = 0;$$

2) при нагрузке в узле 8

$$\sum Y = 0, \quad -P - N_{8-9} = 0, \quad N_{8-9} = -P = -1.$$

Следовательно, когда груз  $P=1$  приложен в узлах 1, 2, 4, 6, 10, 12, 14 и 16  $N_{8-9} = 0$ ; когда же груз  $P=1$  приложен в узле 8  $N_{8-9} = -1$ .

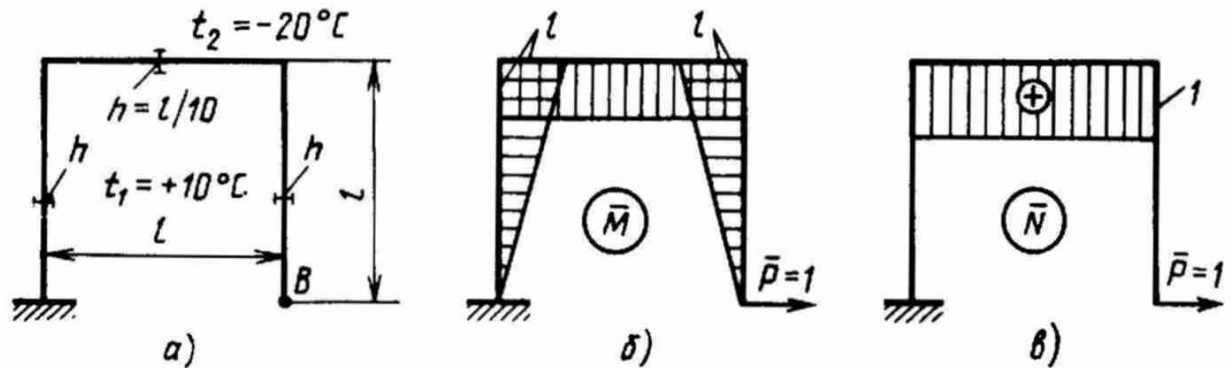
Найдя ординаты в узловых точках и соединив вершины их прямыми, получим л.в.  $N_{8-9}$ . Она имеет вид треугольника с наибольшей ординатой, равной единице. Все значения отрицательны (на участке между узлами 6-8-10). Это говорит о том, что стержень работает на сжатие.

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №7

### Определение перемещений от температурных и дислокационных воздействий

#### Задача 1

**Пример.** На рис.1.4.7,а изображена рама, у которой волокна стержней внутри нагреты на  $t_1 = +10^\circ\text{C}$ , а снаружи охлаждены на  $t_2 = -20^\circ\text{C}$ . Определить горизонтальные перемещения точки В.



**Рис.1.4.7**

Приложив силу  $\bar{P}_1=1$  в точке В по искомому направлению и построив эпюры  $\bar{M}$  и  $\bar{N}$  (рис.1.4.7,б,в), найдем в соответствии с формулой (1.4.32):

$$\Delta_{kt} = \alpha \left[ -5l + 30 \frac{10}{l} \left( 2 \circ \frac{1}{2} l^2 + l^2 \right) \right] = 595 \alpha l.$$

Формулу для определения перемещений точек системы от дислокаций получим на основе теоремы о взаимности реакций и перемещений (1.4.20):

$$M_{mk} d_m = -P_k \Delta_{km}.$$

Разделив обе части этого уравнения на  $P_k$  и заменив индекс m на d, получим:

$$\Delta_{kd} = -r_{dk} d. \quad (1.4.33)$$

Если заданна не одна дислокация, а несколько, то

$$\Delta_{kd} = -\sum_{i=1}^n r_{di} d_i. \quad (1.4.34)$$

Таким образом, для определения перемещений  $\Delta_{kd}$  от дислокаций  $d_i$  надо в точке К приложить соответствующую единичную силу и от ее действия реакции  $r_i$  во всех i-х связях. При перемножении этих реакций с дислокациями берется положительный знак, если реакции и перемещения имеют одно направление.

#### Задача 2

**Пример.** Определить вертикальное перемещение  $\Delta_{kA}$  точки К рамы (рис.1.4.8,а), основание которой одновременно переместилось вертикально на  $d_A$  и повернулось на угол  $\varphi_A$ .



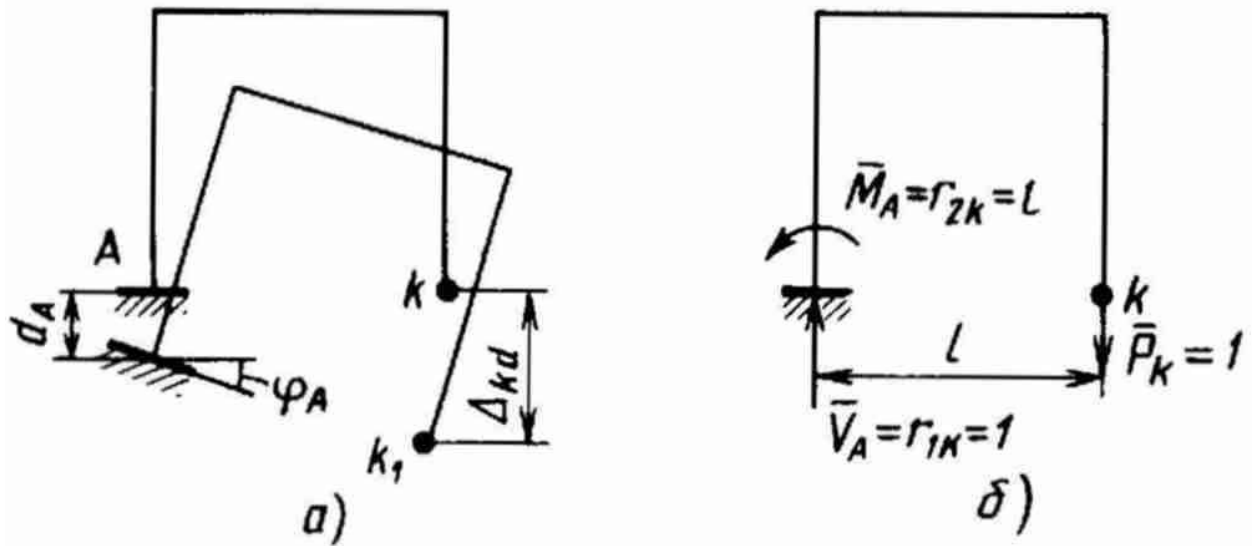


Рис.1.4.8

Для этого определим в заделке А (в связи, которая получила перемещение) реакции от силы  $\bar{P}_k = 1$ , приложенной по направлению искомого перемещения (рис.1.4.8,б). В соответствии с формулой (1.4.34) получим:

$$\Delta_{kd} = -(-1d_A - l\varphi_A) = d_A + l\varphi_A.$$

# ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №8

## Метод сил

### Задача 1

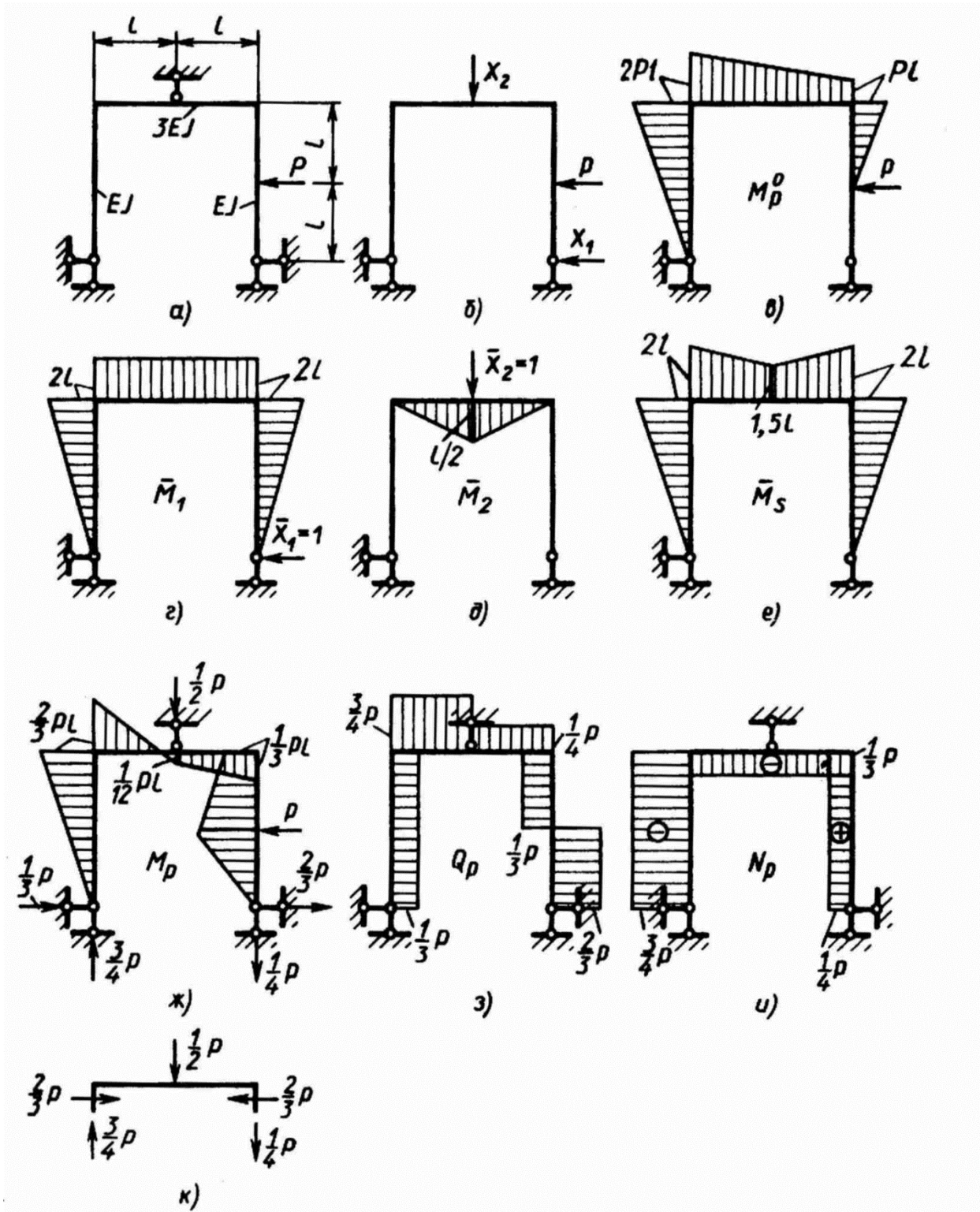


Рис.1.5.2

**Порядок расчета** плоской рамы (рис.1.5.2,а).

- 1) Определяем степень статической неопределимости системы. Здесь две лишние связи. Следовательно,  $n = 2$ .
- 2) Выбираем основную систему (рис.1.5.2,б).

- 3) Строим грузовую и единичные эпюры от соответствующих воздействий на основную систему (рис.1.5.2,в-д).
- 4) Вычисляем единичные коэффициенты и свободные члены системы канонических уравнений по формуле Мора:

$$\delta_{11} = \frac{8\ell^3}{EI}; \quad \delta_{12} = \frac{\ell^3}{3EI}; \quad \delta_{22} = \frac{\ell^3}{18EI}; \quad \Delta_{1p} = \frac{5,5P\ell^3}{EI}; \quad \Delta_{2p} = -\frac{0,25P\ell^3}{EI}.$$

- 5) Строим суммарную единичную эпюру  $\bar{M}_s = \bar{M}_1 + \bar{M}_2$  (рис.1.5.2,е).

Проверяем правильность вычисления коэффициентов и свободных членов по формулам (1.5.16).

- 6) Записываем систему канонических уравнений (1.5.10) в численном виде. После упрощений получаем

$$\begin{aligned} 8X_1 - \frac{1}{3}X_2 + \frac{11}{2}P &= 0; \\ -\frac{1}{3}X_1 + \frac{1}{18}X_2 - \frac{1}{4}P &= 0. \end{aligned}$$

- 7) Решая систему, находим основные неизвестные:

$$X_1 = -\frac{2P}{3}, \quad X_2 = \frac{P}{2}.$$

- 8) Строим по формуле (1.5.8) суммарную (результатирующую) эпюру моментов  $M_p$  в заданной системе. Здесь  $M_p = M_p^0 + \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2$  (рис.1.5.2,ж).

- 9) Выполняем универсальный контроль по формуле (1.5.17) путем умножения эпюры  $M_p$  на любую из эпюр  $\bar{M}_1, \bar{M}_2$  или  $\bar{M}_s$ .

- 10) Строим эпюру поперечных сил  $Q_p$  в заданной системе в соответствии с формулой (1.5.8):  $Q_j = Q_{j1}X_1 + Q_{j2}X_2 + Q_{jp}^0$  или непосредственно путем дифференцирования эпюры  $M_p$ . Поскольку  $Q = \frac{dM}{dz}$ , на каждом участке рамы длиной  $d$

$$Q = \frac{M_n - M_l}{d} + q\left(\frac{d}{2} - z\right), \quad (1.5.19)$$

где  $M_n$  и  $M_l$  – значения моментов на правом и левом концах участка;  $q$  – интенсивность равномерно распределенной нагрузки на участке (если она есть);  $z$  – текущая координата сечения с началом на левом конце участка.

Эпюра  $Q_p$  показана на рис.1.5.2,з.

- 11) Строим эпюру нормальных сил  $N_p$  в соответствии с формулой (1.5.8) или способом вырезания узлов (рис.1.5.2,и).

- 12) Проверяем правильность построения эпюры  $Q_p$  и  $N_p$ , рассматривая равновесие любой отсеченной части (рис.1.5.2,к).

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №9

### Расчет усталостной долговечности

#### Задача 1

**Исходные данные.** На долговечность в металлоконструкциях строительных и дорожных машин рассчитываются сварные узлы. Именно они определяют долговечность металлоконструкции в целом.

Для расчета усталостной долговечности необходимо иметь следующие исходные данные: марку стали сварного узла и ее характеристики  $\sigma_T, \sigma_{-1}, \psi$ ; конструктивную схему сварного узла, его размеры и параметры  $K_\sigma, \sigma_{ос.н}$ ;

метод технологической упрочняющей обработки сварного узла и коэффициенты корректировки  $\sigma_T, \sigma_{-1}, \psi, K_\sigma, \sigma_{ос.н}$ ;

планируемый срок службы сварного узла  $T$ , ч;

параметры, характеризующие условия эксплуатации (режим нагружения).

**Формирование расчетных режимов нагружения.** Для анализа усталостной долговечности конструкций используют схематизацию процессов, целью которой является получение функции распределения амплитуд напряжений, эквивалентных данному случайному процессу по степени вносимого усталостного повреждения. Схематизацию случайного процесса производят на основе следующих предположений:

1) характер изменения напряжения между смежными экстремальными значениями не влияет на сопротивление усталости материала, поэтому различные формы циклов рассматривают как эквивалентные;

2) изменение частоты нагружения в достаточно широких пределах не влияет на сопротивление усталости;

3) произвольное, в том числе случайное, чередование циклов напряжений с различной амплитудой и асимметрией можно заменить упорядоченным чередованием циклов, эквивалентным по степени повреждения.

Существует несколько методов схематизации процессов нагружения, к которым относятся методы максимумов, экстремумов, размахов, полных циклов.

При расчете вновь проектируемых узлов металлоконструкций для формирования расчетных режимов нагружения пользуются законом распределения амплитуд напряжений для подобных машин с последующим пересчетом нагрузок. При отсутствии каких-либо экспериментальных данных нагрузки рассчитывают по теоретическим зависимостям с учетом динамических процессов неустановившихся режимов движения и вероятностных характеристик параметров среды.

**Порядок расчета.** При проектировании металлоконструкций строительных и дорожных машин расчет на усталостную долговечность может производиться с целью проверки способности металлоконструкции не разрушаться в течение заданного интервала времени при восприятии переменных нагрузок или для оценки вероятного срока службы изделия при восприятии нагрузок, изменяющихся во времени по заданному закону.

В первом случае расчет сводится к сопоставлению максимального напряжения блока нагружения с предельным напряжением материала конструкции:

$$\sigma \leq \gamma[\sigma], \quad (2.3.15)$$

где  $\gamma$  - коэффициент, учитывающий снижение допускаемого напряжения при усталостном разрушении конструкции. Во втором случае расчета усталостной долговечности сопоставляют вероятный срок службы  $T_p$  изделия по чистому времени работы с заданной вероятностью неразрушения  $P$  с экономически обоснованным сроком службы  $[T]$ , то есть

$$T_p \leq [T]. \quad (2.3.16)$$

Вероятный срок службы  $T_p$  изделия определяют через вероятную циклическую долговечность  $N_p$  при известном числе повреждающих циклов  $n$  и длительности реализации  $t_{\sigma}$  блока нагружения:

$$T_p = \frac{N_p}{n} t_{\sigma}. \quad (2.3.17)$$

Циклическую долговечность сварного узла при заданной вероятности  $P$  в условиях восприятия переменных нагрузок находят из зависимости

$$\ln N_p = M(\ln N) - U_p S(\ln N), \quad (2.3.18)$$

где  $M(\ln N)$  - математическое ожидание логарифма циклической долговечности изделия при заданном режиме нагружения, выраженной через количество циклов блока нагружения:

$$M(\ln N) = \ln \frac{N_{\sigma} \sigma_{-1K}^m}{\sum \sigma_{-1npi}^m n_i} \quad (2.3.19)$$

и определяемый по математическим ожиданиям величин  $\sigma_{-1}$ ,  $K_{\sigma}$  и  $\sigma_T$ .

Среднее квадратичное отклонение логарифма циклической долговечности

$$S(\ln N) = \frac{m \sigma_{-1}}{K_{\sigma} \sigma_{-1K}} (\alpha' V_{K\sigma}^2 + \beta)^{1/2}; \quad (2.3.20)$$

здесь  $V_{K\sigma}$  - коэффициент вариации эффективного коэффициента концентрации;  $\alpha'$  и  $\beta$  - коэффициенты, определяемые по таблицам в зависимости от группы стали и вида напряженного состояния.

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №10

### Болтовые соединения

#### Задача 1

Для болтовых соединений металлоконструкций применяют либо чистые болты, устанавливаемые в отверстия соединяемых деталей без зазора, либо высокопрочные болты, устанавливаемые с зазором. Соединение чистыми болтами рассчитывают на срез и смятие теми же методами, что и заклепочное.

Высокопрочные болты, устанавливаемые с зазором, более технологичны, так как не требуют большой точности совпадения отверстий сопрягаемых деталей. Неподвижность соединения высокопрочными болтами обеспечивается за счет сил трения, создаваемых затяжкой болтов. Поэтому болты необходимо проверять на разрыв от силы затяжки  $P$ :

$$\sigma_p = \frac{4P}{\pi d_1^2} \leq k_y R_p, \quad (2.4.19)$$

где  $d_1$  - диаметр болта по внутренней поверхности резьбы;  $R_p$  - расчетное сопротивление растяжению. Сила затяжки  $P = 0,7\sigma_B A$ . Здесь  $\sigma_B$  - временное сопротивление;  $A$  - площадь сечения болта по резьбе.

В металлоконструкциях строительных и дорожных машин применяются монтажные стыки. Такие соединения выполняются при помощи высокопрочных болтов. Для обеспечения точности используются штифты, устанавливаемые без зазора. При расчете болтовых соединений монтажных стыков считают, что все детали, кроме болтов, не деформируются, то есть являются абсолютно жесткими.

Рассмотрим монтажный стык, воспринимающий внешние нагрузки  $P_1$  и  $P_2$  (рис.2.4.7,а). Выполнив приведение всех сил к центру  $O$  в плоскости стыка, получим продольную силу  $N = P_1$ , поперечную силу  $T = P_2$  и изгибающий момент  $M = P_2 H$  (рис.2.4.7,б).

Будем считать, что продольная сила  $N$  равномерно распределяется между всеми  $n$  болтами. Тогда напряжение от действия этой силы

$$\sigma_N = N/(nA), \quad (2.4.20)$$

где  $A$  - минимальная площадь сечения болта (по резьбе).

Сила предварительной затяжки болтов должна обеспечивать условие нераскрытия стыка при действии внешней нагрузки. При этом поперечная сила  $T$  должна уравниваться силами трения фланцев и не передаваться на болты. Изгибающий момент нагружает болты неравномерно. При принятых допущениях напряжения в болтах увеличиваются с увеличением расстояния  $x'_i$  болтов от оси  $y'$ :

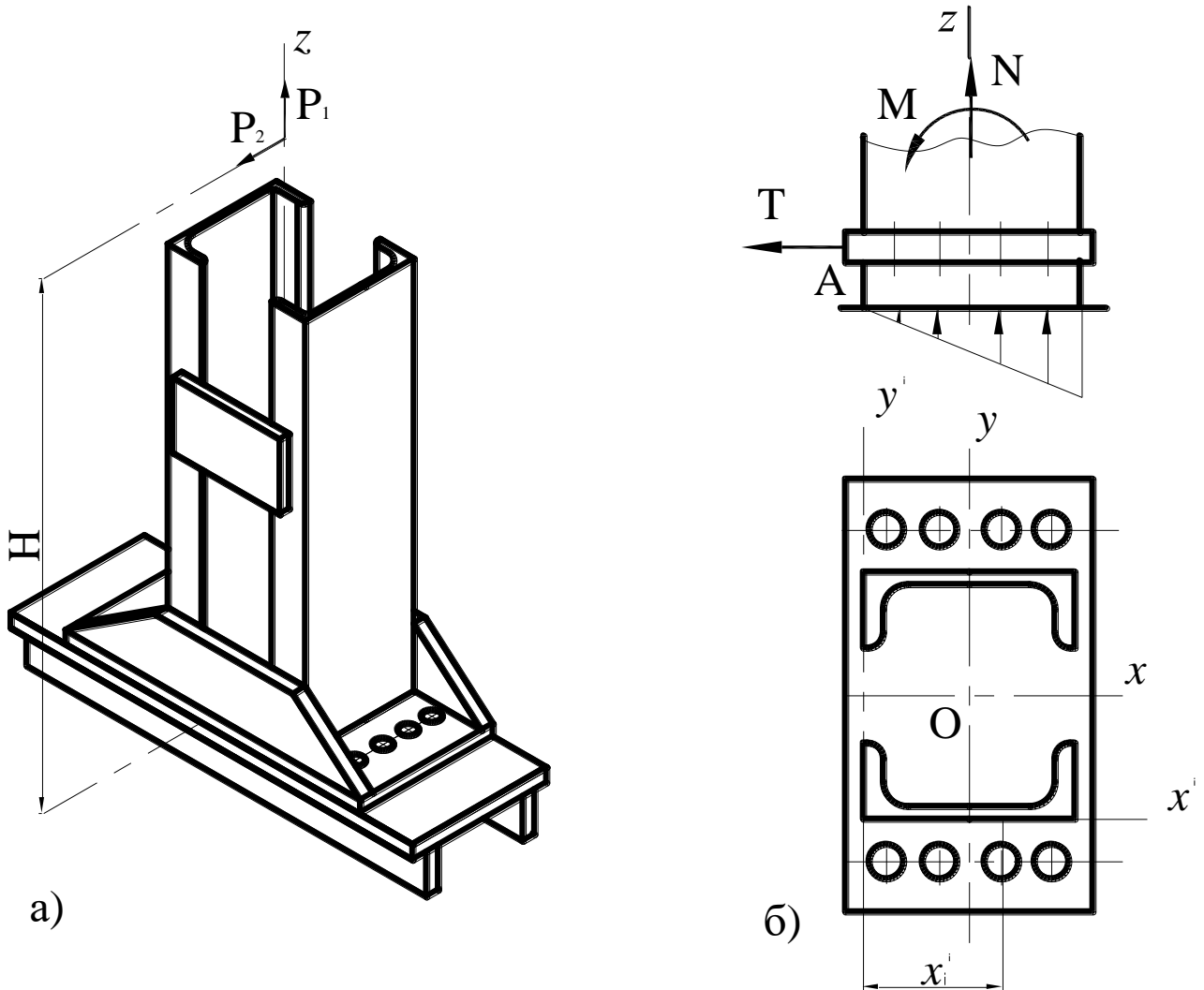
$$\sigma_M = Mx'_i / \sum_{i=1}^n A(x'_i)^2, \quad (2.4.21)$$

где  $\sigma_M$  - напряжение от действия момента  $M$ ;  $\sum_{i=1}^n A(x'_i)^2$  - момент инерции сечений всех болтов относительно оси  $y'$ .

При нагружении соединения двумя моментами  $M_y$  и  $M_x$ , действующими в двух взаимно перпендикулярных плоскостях  $zOx$  и  $zOy$

$$\sigma_M = M_y x'_i / \sum_{i=1}^n A(x'_i)^2 + M_x y'_i / \sum_{i=1}^n A(y'_i)^2, \quad (2.4.22)$$

где  $\sum_{i=1}^n A(y'_i)^2$  - момент инерции сечений всех болтов относительно оси  $x'$ .



**Рис.2.4.7**

Наиболее нагруженными будут болты, для которых  $x'_i$  и  $y'_i$  имеют наибольшие значения. Это болты, расположенные в углах фланцев.

Результирующее напряжение находят как алгебраическую сумму напряжений  $\sigma_N$  и  $\sigma_M$ . С учетом дополнительных напряжений от предварительной затяжки болтов суммарное напряжение увеличивают в 1,3...1,5 раза:

$$\sigma = k_1 (\sigma_N + \sigma_M), \quad (2.4.23)$$

где  $k_1 = 1,3...1,5$ .

Если сила  $N$  направлена в сторону фланцев, то  $\sigma_N = 0$ .

# ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №11

## Расчет коробчатых балок

### Задача 1

Коробчатые балки дорожно-строительных машин работают, как правило, в условиях сложного сопротивления. В этом случае в поперечных сечениях действуют все шесть внутренних силовых факторов: продольная сила  $N$ , поперечные силы  $Q_x$  и  $Q_y$ ; изгибающие моменты  $M_x$  и  $M_y$ ; крутящий момент  $M_{кр}$  (рис.2.5.1).

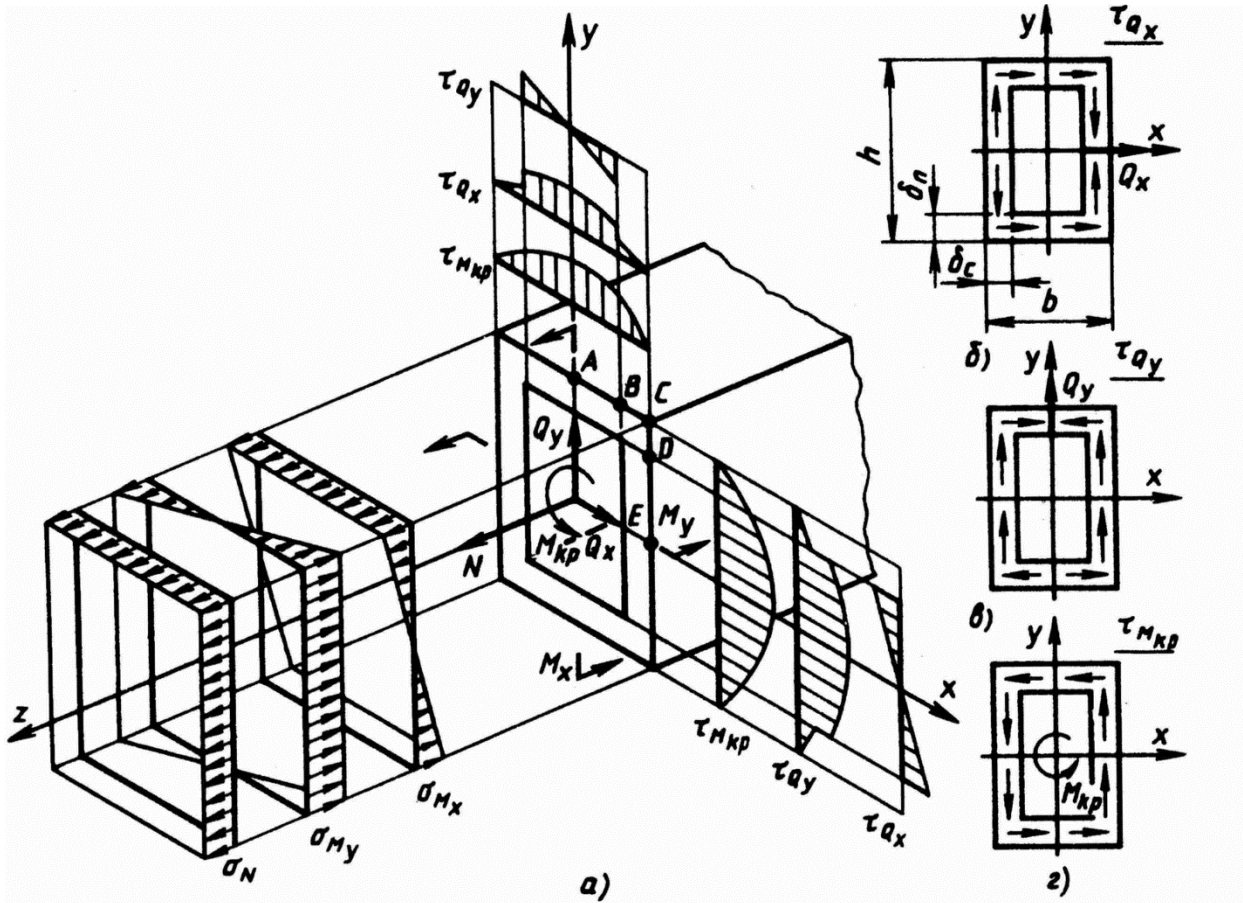


Рис.2.5.1

При этом в сечениях возникают нормальные  $\sigma_N, \sigma_{M_x}, \sigma_{M_y}$  и касательные  $\tau_{Q_x}, \tau_{Q_y}, \tau_{M_{кр}}$  напряжения (рис.2.5.1,а). Наибольшие напряжения имеют место в точках внешнего контура сечения. Поскольку нормальные напряжения перпендикулярны плоскости сечения, а касательные – лежат в этой плоскости, прочность оценивают по эквивалентному напряжению (по гипотезе удельной энергии формоизменения):

$$\sigma_{экр} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}, \quad (2.5.6)$$

где  $\sigma$  - суммарное нормальное напряжение:

$$\sigma = \pm \frac{N}{A} \pm \frac{M_x y}{J_x} \pm \frac{M_y x}{J_y}; \quad (2.5.7)$$

суммарное касательное напряжение:

$$\tau = \pm \tau_{Q_x} \pm \tau_{Q_y} \pm \tau_{M_{кр}}. \quad (2.5.8)$$



Касательные напряжения в точках внешнего контура сечения, расположенных на вертикальных стенках, вычисляются по формулам:

$$\tau_{Q_y} = \frac{Q_y S_x}{J_x b_x}; \quad (2.5.9)$$

$$\tau_{M_{кр}} = \frac{M_{кр}}{2\delta_c(b-\delta_c)(h-\delta_n)} [1 - (2y/h)^2], \quad (2.5.10)$$

при  $|y| \geq (h - 2\delta_n)/2$

$$S_x \geq \frac{b}{2} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right); \quad b_x = b; \quad \tau_{Q_x} = 0; \quad (2.5.11)$$

при  $|y| \leq (h - 2\delta_n)/2$

$$S_x \geq \frac{b}{2} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right) - \frac{(b - 2\delta_c)}{2} \left[ \frac{(h - 2\delta_n)^2}{4} - y^2 \right]; \quad b_x = 2\delta_c; \quad \tau_{Q_x} = \frac{Q_x(b - \delta_c)y}{2J_y} \quad (2.5.12)$$

где  $y$  - координата рассматриваемой точки контура сечения;  $S_x$  - статический момент относительно оси  $x$  части сечения, расположенной выше рассматриваемой точки;  $b_x$  - ширина сечения на уровне рассматриваемой точки; остальные обозначения даны на рис.2.5.1.

напряжения в точках внешнего контура, расположенных на горизонтальных полках сечения, определяют по аналогичным формулам, которые нетрудно получить, повернув мысленно сечение на  $90^\circ$ .

Знаки напряжений в формуле (2.5.8) зависят от направлений  $Q_x, Q_y, M_{кр}$  и координат  $x, y$  рассматриваемой точки контура сечения (рис.2.5.1, б-г).

Желательно выполнить вычисления  $\sigma_{экр}$  для множества точек с привлечением ЭВМ. Как минимум вычислить  $\sigma_{экр}$  в точках  $A, B, C, D, E$  (рис.2.5.1, а) или в других точках, где составляющие напряжения имеют одинаковые направления.

Приведенные формулы справедливы для коробчатых сечений при условии, что отношения  $b/\delta_n$  и  $h/\delta_c$  находятся в пределах от 5...10 до 55...70. При более тонких стенках или полках требуется проверка их местной устойчивости.

## **III КОНТРОЛЬ ЗНАНИЙ**

### **3.1 Вопросы для самоконтроля**

1. Сформулируйте общие задачи строительной механики.
2. Принципы образования систем, их кинематический анализ.
3. Общие методы определения сил в связях плоских систем. Основные предпосылки к расчётам.
4. Статический метод: способ вырезания узлов, способ сечений, способ моментной точки и способ проекций.
5. Основы кинематического метода.
6. Основы метода замены связей.
7. Общие методы расчета пространственных ферм.
8. Расчет сетчатых ферм путем разложения их на плоские фермы.
9. Особенности расчета пространственных ферм на кручение.
10. Теория линий влияния. Основные понятия.
11. Линии влияния опорных реакций.
12. Линии влияния изгибающих моментов и поперечных сил для однопролетных и консольных балок.
13. Линии влияния для шарнирных балок.
14. Линии влияния при узловой передаче нагрузки.
15. Кинематический метод построения линий влияния.
16. Определение невыгоднейшего нагружения линий влияния.
17. Построение линий влияния усилий в стержнях простейших ферм.
18. Теория окружностей влияния. Основные понятия.
19. Определение усилий и напряжений по окружностям влияния.
20. Основные понятия. Обобщенная сила и обобщенное перемещение.
21. Действительная работа внешних и внутренних сил. Потенциальная энергия деформации.
22. Возможная работа внешних и внутренних сил.
23. Теоремы о взаимности работ и взаимности перемещений.
24. Теорема о взаимности реакций.
25. Теорема о взаимности реакций и перемещений.

26. Общая формула для определения перемещений плоской стержневой системы (метод Мора).
27. Вычисление интегралов Мора
28. Определение перемещений от температурных и дислокационных воздействий.
29. Статистически неопределимые системы.
30. Общие предпосылки методов расчета статистически неопределимых систем.
31. Определение коэффициентов и свободных членов канонических уравнений.
32. Требования к материалу металлических конструкций и их характеристики.
33. Рекомендации по выбору стали с учетом условий эксплуатации
34. Сортамент проката. Гнутые профили.
35. Механизм усталостного разрушения.
36. Факторы, влияющие на усталостную долговечность.
37. Расчет усталостной долговечности.
38. Общая характеристика балок.
39. Расчет балок из проката.
40. Расчет коробчатых балок.
41. Решетчатые конструкции дорожно-строительных машин.
42. Классификация решетчатых конструкций.
43. Рекомендации по проектированию решетчатых конструкций.

## **IV ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЙ РАЗДЕЛ (ЛИТЕРАТУРА)**

### **4.1 Основная литература**

1. Варывдин В.В. Расчет деталей и механизмов подъемно-транспортных машин с элементами САПР: учебное пособие для самостоятельной работы студентов./ В.В. Варывдин, Н.А. Романеев, В.В. Никитин. - Брянск: Издательство Брянской ГСХА, 2013.- 131 с.
2. А.И. Шейн. Курс строительной механики: учебник / - Пенза: ПГУАС, 2014.- 312 с.
3. Живейнов И.Н., Карасев Г.Н., Цвей И.Ю. Строительная механика и металлоконструкции строительных и дорожных машин: Учебник для вузов по специальности «Строительные и дорожные машины и оборудование». М.: Машиностроение, 1988. - 280с.
4. Дарков А.В., Шапошников Н.Н. Строительная механика: Учеб. для строит, спец. вузов.- Санкт-Петербург: Лань, 2004. - 656с.
5. Анохин Н.Н. Строительная механика в примерах и задачах. Ч. I. Статически определимые системы: Учеб. пос. - М.: Изд-во АСВ, 1999. -335 с.

### **4.2 Дополнительная литература**

6. Вершинский А.В., Гохберг М.М., Семенов В.П. Строительная механика и металлические конструкции. - М.: Машиностроение, 1984. - 230с.
7. Гохберг М.М. Металлические конструкции подъемно-транспортных машин. - М.: Машиностроение, 1976. - 454с.
8. Николаев Г.А., Куркин С.А., Винокуров В.А. Сварные конструкции. - М.: Высшая школа, 1982.-272с.