УДК 53(07.07)

Энергетический метод исследования колебаний

Драпезо Л.И.

Белорусский национальный технический университет

Одна из главных задач теории колебаний – найти период малых колебаний механической системы около положения равновесия. В некоторых случаях очень сложно записать уравнение движения систем. Например, системам состоящим одновременно из пружинного и математического маятников.

Задачи такого типа решаются применением закона сохранения энергии. Этот метод состоит в сопоставлении энергии колебательной системы с энергией простого маятника. Выражение механической энергии системы приводим к виду. $E = Ax^2 + B\vartheta^2$, т.к. $\vartheta = x'$, то (1), $E = Ax^2 + B(x')^2 = const.$ $E(t) = 0; \Rightarrow 2Ax + 2Bx'' = 0$. $x'' = -(A/B)\cdot x \Rightarrow$ система совершает гармонические колебания с циклической частотой $\omega = \sqrt{A/B}$. Задача. Определить период малых колебаний (рис.1).

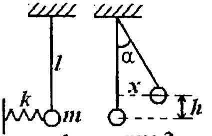

рис. 1 рис.2

Решение. Отклоним грузик на $x << l$, т.е. на угол $\alpha \approx 0$. Закон сохранения энергии для нашей системы имеет вид:

$$(2) E = \frac{kx^2}{2} + mgh + \frac{m(x')^2}{2}.$$

Определим зависимость высоты h от x. Из. рис.2 $h = l(1-\cos\alpha)$.

$\left(\frac{1-\cos\alpha}{2} = \sin^2\frac{\alpha}{2}\right) \Rightarrow h = l\cdot 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$, но угол α в радианах равен:

$\alpha = x/l; \Rightarrow h = \frac{x^2}{2l}$ (3). Подставив (3) в (2).

$$E = \underbrace{\left(\frac{k}{2} + \frac{mg}{2l}\right)}_{A} x^2 + \underbrace{\frac{m}{2}}_{B}(x')^2$$. Имеем вид уравнения (1).

$\omega\sqrt{A/B}$; тогда искомый период равен $T = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{kl+mg}}$.