УДК 51(07.07)

Методика нахождения наибольшего и наименьшего значений алгебраических выражений с несколькими переменными

Чернявская С.В.
Белорусский национальный технический университет

Данный тип задач относится к нестандартным и практически не рассматривается в курсе математики средней школы. Однако при решении подобных задач не требуется знаний, выходящих за рамки школьного курса, а овладение методиками их решения развивает способность логически мыслить и творчески применять полученные на уроках математики знания.

Пример 1. Найти наибольшее z, для которого существуют x, y такие, что $x^2+2y^2+z^2+xy+yz-zx=3$. *Решение*. Решим данное уравнение как квадратное по переменной x. $x^2+(y-z)x+2y^2+$ $+z^2+yz-3=0$. Для существования решений этого уравнения необходимо выполнение условия $D\geq 0$, то есть $7y^2+6yz+ +3z^2-12\leq 0$. Последнее неравенство как квадратное по y, имеет решение при аналогичном условии: $D=9z^2-7\left(3z^2-12\right)\geq 0,$ откуда следует $3z^2-7z^2+28\geq 0$ или $4z^2\leq 28$, т.е. $|z|\leq\sqrt{7}$. Значит, $z_{\text{наиб}}=\sqrt{7}$. Найдем соответствующие значения $y=-3/\sqrt{7}$ и $x=5/\sqrt{7}$, то есть при найденном z существуют x, y удовлетворяющие условиям задачи.

Пример 2. Найти наибольшее и наименьшее значение выражения $x+y$, если $x^2+y^2-4x\leq 0$. *Решение.* Пусть $x+y=t, t\in R$. Построив в одной системе координат круг $(x-2)^2+y^2\leq 4$ и семейство параллельных прямых $y=t-x$, определим, что $t_{\max}$ и $t_{\min}$ получаются в случаях касания прямой и окружности. Следовательно, уравнение $2x^2-2x(t+2)+t^2=0$ должно иметь единственное решение. Откуда $D=t^2-4t-4=0$ и $t_{\max}=2+2\sqrt{2};$ $t_{\min}=2-\sqrt{2}$.