УДК 51(07.07)

Применение классических неравенств при решении задач по математике

Кленовская И.С.
Белорусский национальный технический университет

В школьных учебниках в разделах, посвященных решению неравенств, приведены задачи, которые позволяют учащимся усвоить свойства неравенств, но недостаточно рассмотрены вопросы применения численных неравенств, за исключением неравенства Коши. Однако многие математические задачи, особенно задачи повышенной сложности, часто эффективно решаются с применением неравенств Коши, Бернулли, Коши-Буняковского.

Например, для решения систем уравнений и нахождения наибольшего и наименьшего значений функций помимо традиционных методов можно использовать неравенство Коши-Буняковского.

Теорема. Для любых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n$ выполняется неравенство $\sqrt{\left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2\right)} \geq |a_1 b_1| + |a_2 b_2| + \ldots + |a_n b_n|$.

Пример 1. Решить систему уравнений $\begin{cases} x^4 + y^4 + z^4 = 1, \\ x^2 + y^2 + 2z^2 = \sqrt{7} \end{cases}$.

Решение. Воспользуемся неравенством Коши-Буняковского, считая $n = 3, a_1 = 1, a_2 = 1, b_1 = x^2, b_2 = y^2, b_3 = z^2$, получим

$\sqrt{7} = 1 \cdot x^2 + 1 \cdot y^2 + 1 \cdot z^2 \leq \sqrt{(1 + 1 + 4)\left(x^4 + y^4 + z^4\right)} = \sqrt{6}$. Неравенство $\sqrt{7} \leq \sqrt{6}$ неверно, поэтому исходная система уравнений решений не имеет.

Пример 2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x,y) = 6\sin x \cos y + 2\sin x \sin y + 3\cos x$.

Решение. Из неравенства Коши-Буняковского при $n = 3$ получим

$$f(x,y) \leq |f(x,y)| \leq \sqrt{\left(6^2 + 2^2 + 3^2\right)\left(\sin^2 x \cdot \cos^2 y + \sin^2 x \cdot \sin^2 y + \cos^2 x\right)} =$$

$$= \sqrt{49\left(\sin^2 x(\cos^2 y + \sin^2 y) + \cos^2 x\right)} = 7.$$

Отсюда видно, что $-7 \leq f(x,y) \leq 7$.