

Использование тригонометрической подстановки при решении алгебраических задач

Егорова Л.В.

Белорусский национальный технический университет

Тригонометрическая подстановка применяется при решении таких алгебраических задач, которые своими средствами не решаются или решаются очень сложно.

Тригонометрическая подстановка является одним из способов реализации метода замены переменной и используется в тех случаях, когда область определения исходной задачи совпадает с областью значений тригонометрической функции или включается в эту область.

Решения задач, связанных с поиском наибольшего и наименьшего значений функции, сопряжены со значительными техническими трудностями. Избавится от громоздких выкладок удаётся избавиться с помощью тригонометрической подстановки.

Пример.

Найти наибольшее и наименьшее значения выражения $x + y$, если $x^2 + 4x + y^2 + 3 = 0$.

Решение. Уравнение $x^2 + 4x + y^2 + 3 = 0$ преобразуем так, чтобы в левой части получилась сумма квадратов: $(x+2)^2 + y^2 = 1$. Следовательно, каждое из выражений $x+2$ и y по модулю не превосходит единицы и их можно рассматривать как синус и косинус некоторого угла. Положим $x+2 = \sin \alpha$, $y = \cos \alpha$, $\alpha \in [0; 2\pi)$. Выразим $x + y$ через одну величину α :

$$\begin{aligned} x + y &= \sin \alpha + \cos \alpha - 2 = \\ &= \sqrt{2} \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) - 2 \in [-2 - \sqrt{2}; -2 + \sqrt{2}]. \end{aligned}$$

Ответ: наибольшее значение равно $-2 + \sqrt{2}$,

наименьшее значение равно $-\sqrt{2} - 2$.