УДК 51(07.07)

Метод оценки при нахождении области значений алгебраических дробей

Чернявская С.В., Ревтович В.Н.
Белорусский национальный технический университет

Задачи на нахождение области значений функций (или их наибольших -наименьших значений) представляют определенную трудность, поскольку не существует единой методики решения. Все зависит от конкретного вида функции. Выражения, содержащие алгебраические дроби, сложны в исследовании, особенно если оно проводится без использования средств мат.анализа. В вариантах централизованного тестирования даже самые простые из них находятся в части Б. Рассмотрим один из подходов к нахождению области значений алгебраических дробей, основанный на методе оценки.

Для оценки можно применять известные неравенства, например:

1. $a+b\ge 2\sqrt{ab}$, $a\ge 0, b\ge 0$; 2. $\dfrac{2}{1/a+1/b}\le\sqrt{ab}$, $a>0, b>0$.

Пример 1. Найти наименьшее значение функции $f(x)=\left(5x^2+4x+20\right)/2x$ при x>0.

Решение. Разделив дробь почленно, получим: $f(x)=\dfrac{5x}{2}+\dfrac{10}{x}+2$. Согласно неравенству (1), $\dfrac{5x}{2}+\dfrac{10}{x}\ge 2\sqrt{\dfrac{5x}{2}\cdot\dfrac{10}{x}}=10$ при x>0. Следовательно $f(x)\ge 10+2$. Поэтому $f_{наим}=12$. Ответ:12.

Пример 2. Найти наибольшее значение функции $f(x)=\dfrac{x}{x^2+25}$ при x>0.

Решение. Разделим числитель и знаменатель дроби на x: $f(x)=\dfrac{1}{x+\frac{25}{x}}$.

Согласно неравенству (2) при x>0 получим $\dfrac{1}{x+\dfrac{25}{x}}=\dfrac{2}{2x+\dfrac{50}{x}}\le\sqrt{\dfrac{1}{2x}\cdot\dfrac{x}{50}}=\dfrac{1}{10}$. Следовательно, $f(x)\le 0{,}1$. Поэтому $f_{наиб}=0{,}1$. Ответ: 0,1.

Отметим, что если числитель или знаменатель дроби может принимать отрицательные значения, следует применить другой метод, например, метод введения параметра.