УДК 51(07.07)

Уравнения и обратные функции

Павлович В.А.
Белорусский национальный технический университет

Пусть функция $f(x)$ определена, непрерывна и монотонна на множестве X ($X \in R$), причем множество значений этой функции Y. Тогда существует функция $g(x)$, обратная $f(x)$, область определения которой Y, область значений X, которая непрерывна и монотонна (с тем же, что и $f(x)$, направлением монотонности).

Задача-теорема 1. Доказать, что уравнение $f(x) = g(x)$ и $f(x) = x$ равносильны, если $f(x)$ возрастает, и уравнение $f(x) = g(x)$ является следствием уравнения $f(x) = x$, если $f(x)$ убывает.

Доказательство. Пусть x_0 — корень уравнения $f(x) = x$, т.е.$X_0 = f(x_0)$. Тогда $x_0 \in X$. Но $f(x_0) \in Y$, а значит, $x_0 \in Y$.

В таком случае x_0 и $f(x_0)$ попадают в область определения функции g, значит, $g(x_0) = g(f(x_0))$. Но $g(f(x_0)) = x_0$, а $x_0 = f(x_0)$, итак, $g(x_0) = f(x_0)$. Пусть теперь $f(x)$ возрастает, и $f(x_0) = g(x_0)$ (т.е. x_0—корень уравнения $f(x) = g(x)$) тогда $x_0 \in X$; но и $g(x_0) \in X$, значит, $f(x_0) \in X$. В таком случае $f(x_0)$ и $g(x_0)$ попадают в область определения функции f, значит, $f(f(x_0))=f(g(x_0))=x_0$ (*)

Если $f(x_0) > x_0$, то, поскольку обе части неравенства попадают в область определения функции f, то, учитывая ее возрастание, имеем $f(f(x_0)) > f(x_0)$, откуда $f(f(x_0)) > x_0$, что противоречит (*).

Аналогично доказывается невозможность случая $f(x_0) < x_0$, итак, остается единственное решение: $f(x_0) = x_0$.

В дальнейшем через f и g будем обозначать взаимно-обратные функции.

Задача 2. Решить уравнение: $1 + \cos^6 x = 2\sqrt[3]{\cos 2x}$.

Решение. Преобразуем уравнение $1 + \cos^6 x = 2\sqrt[3]{2\cos^2 x - 1}$. Обозначим $\cos^2 x = k$, тогда наше уравнение запишется так: $1 + k^3 = \sqrt[3]{2k-1}$. Положим $f = \frac{1+k^3}{2}$, тогда $k = \sqrt[3]{2f-1}$, т.е. $g = \sqrt[3]{2k-1}$. Имеем уравнение вида $f(k) = g(k)$, которое равносильно уравнению $f(k) = k$. Итак, $\frac{1+k^3}{2} = k$; $(k-1)(k^2+k-1) = 0$;

$k_1 = 1$; $k_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$; ($k_3 = \frac{-\sqrt{5}-1}{2}$ не подходит, поскольку $k = \cos^2 x \geq 0$). Итак

$$\left[\begin{array}{l}\cos^2 x = 1;\\ \cos^2 x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.\end{array}\right. \left[\begin{array}{l}\sin^2 x = 0;\\ \cos x = \pm t.\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}x = \pi n, n \in Z;\\ x = \pi n \pm \arccos(t), \text{ где } t = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}.\end{array}\right.$$