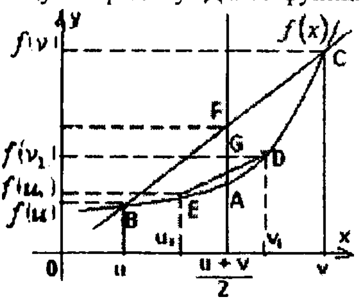
УДК 51(07.07)

Выпуклые функции и уравнения

Юрковец Л.В.
Белорусский национальный технический университет.

Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке X. Она называется строго выпуклой вниз (вверх) на X, если для любых u и v из X, $u \neq v$ и $0 < \lambda < 1$ справедливо неравенство $f(\lambda u + (1-\lambda)v) < \lambda f(u) + (1-\lambda) f(v)$ (соответственно, $f(\lambda u + (1-\lambda)v) > \lambda f(u) + (1-\lambda) f(v)$)

Геометрически это означает, что любая точка хорда BC лежит выше (ниже) точки A графика функции $f(x)$, соответствующей тому же значению аргумента. Отметим также, что условие $u + v = u_1 + v_1$ означает, что сегменты числовой прямой с концами в точках u, v и u_1, v_1 имеют общую середину. Далее функции, строго выпуклые вверх и вниз, будем называть строго выпуклыми.



Справедливо следующее утверждение

Теорема 1. Пусть функция $f(x)$ является строго выпуклой вниз на промежутке X, $u, v \in X$, $u < u_1 < v_1 < v$ и $u + v = u_1 + v_1$. Тогда справедливо неравенство $f(u_1) + f(v_1) < f(u) + f(v)$.

Геометрически смысл предыдущей теоремы очевиден. Если выполнены условия теоремы, то середина отрезка BC - точка F лежит выше середины отрезка ED, ибо ордината F равна половине $f(u) + f(v)$, ордината G половине $f(u_1) + f(v_1)$.

Из теоремы 1 вытекает следующее утверждение, касающееся уравнения $f(u_1) + f(v_1) = f(u) + f(v)$.

Теорема 2. Если функция $f(x)$ является строго выпуклой на промежутке X, функции $u = u(x)$, $v = v(x)$, $u_1 = u_1(x)$, $v_1 = v_1(x)$ такие, что при всех x из ОДЗ уравнения $f(u_1) + f(v_1) = f(u) + f(v)$ (1) их значения $u(x), v(x), u_1(x), v_1(x)$ содержатся в X и выполнено условие $u + v = u_1 + v_1$ (2) то уравнение (1) на ОДЗ равносильно совокупности уравнений $\left[\begin{array}{l} u(x) = u_1(x) \\ u(x) = v_1(x) \end{array}\right.$