УДК 517.4

От производной до рядов Фурье

Гахович А.С.
Белорусский национальный технический университет

Ряды Фурье – важнейший и единственный аппарат передачи электромагнитных сигналов в современном мире, т.е. являются базой развитой цивилизации. Производная функции является отправной точкой логической цепочки, приведшей к универсальному, с практической точки зрения, математическому аппарату. Этапы развития в этом направлении выглядят следующим образом:

1. Производная $f'(x)$ позволяет ввести $df(x)$ как предельно локальное приращение функции, вызванное предельно локальным приращением аргумента, а $\int_a^b df(x)$ – как предельно локальное суммирование указанных приращений, что приводит к формуле Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b df(x) = f(b) - f(a) .$$

2. Полученный результат при многократном его использовании приводит к рядам Тейлора,которые являются частным случаем степенных рядов.

$$f(x) \approx f(x_0) + \int_{x_0}^{x} df(t) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)dt = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} \left[f(x_0) + \int_{x_0}^{t} df'(t_1) \right] dt =$$

$$= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \int_{x_0}^{x} dt \int_{x_0}^{t} f''(t_1)dt_1 = \ldots = \sum_0^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k .$$

3. Изучение свойств сходимости степенных рядов в R, а затем и в C наводит на мысль «улучшения» этих свойств за счет замены переменной $z_0 = e^{it}$ и получения тригонометрических рядов в C:

$$\sum_0^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt), \quad a_k, b_k \in C . \tag{1}$$

4. Желание получить подобные «универсальные» ряды в действительном анализе (в реальном мире) заставило ввести в рассмотрении на предыдущем этапе вместо «обычных» степенных рядов ряды Лорана.

Итогом проделанной работы стали тригонометрические ряды (1) с действительными коэффициентами, которые и носят название рядов Фурье