

Операторное решение термоупругой динамической задачи

Акимов А.А.

Белорусский национальный технический университет

Представим дифференциальные уравнения термоупругости в операторном виде

$$L_{ij}(u_j) + L_{i4}(\Theta) = -F_i, \quad L_{4i}(u_i) + L_{44}\Theta = -Q/\chi, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$L_{ij} \equiv \square \frac{2}{2} \delta_{ij} + a \partial_i \partial_j, \quad L_{i4} \equiv -\gamma_0 \partial_i, \quad L_{4i} \equiv -\eta \partial_i \partial_i, \quad L_{44} \equiv \square \frac{2}{3},$$

$$F_i \equiv X_i / \mu, \quad \gamma_0 \equiv \gamma / \mu, \quad a \equiv (\lambda + \mu) / \mu.$$

Введем четыре функции χ_i ($i = 1, 2, 3, 4$), связанные с перемещениями и температурой следующим образом:

$$u_1 = \begin{vmatrix} \chi_1 & L_{12} & L_{13} & L_{14} \\ \chi_2 & L_{22} & L_{23} & L_{24} \\ \chi_3 & L_{32} & L_{33} & L_{34} \\ \chi_3 & L_{42} & L_{43} & L_{44} \end{vmatrix}, \quad u_2 = \begin{vmatrix} L_{11} & \chi_1 & L_{13} & L_{14} \\ L_{21} & \chi_2 & L_{23} & L_{24} \\ L_{31} & \chi_3 & L_{33} & L_{34} \\ L_{41} & \chi_4 & L_{43} & L_{44} \end{vmatrix},$$

$$u_3 = \begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & \chi_1 & L_{14} \\ L_{21} & L_{22} & \chi_2 & L_{24} \\ L_{31} & L_{32} & \chi_3 & L_{34} \\ L_{41} & L_{42} & \chi_4 & L_{44} \end{vmatrix}, \quad \Theta = \begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & \chi_1 \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} & \chi_2 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & \chi_3 \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & \chi_4 \end{vmatrix}.$$

Найдем эти определители, рассматривая операторы, как числа. Это даст следующие соотношения между функциями $\varphi_i \equiv \square \frac{2}{2} \chi_i$, $i = 1, 2, 3, 4$:

$$u_1 = (\Omega - \partial_1^2 \Gamma) \varphi_1 - \partial_1 \partial_2 \Gamma \varphi_2 - \partial_1 \partial_3 \Gamma \varphi_3 + \gamma_0 \partial_1 \square \frac{2}{2} \varphi_4,$$

$$u_2 = -\partial_2 \partial_1 \Gamma \varphi_1 - (\Omega - \partial_2^2 \Gamma) \varphi_2 - \partial_2 \partial_3 \Gamma \varphi_3 + \gamma_0 \partial_2 \square \frac{2}{2} \varphi_4,$$

$$u_3 = -\partial_3 \partial_1 \Gamma \varphi_1 - \partial_3 \partial_2 \Gamma \varphi_2 - (\Omega - \partial_3^2 \Gamma) \varphi_3 + \gamma_0 \partial_3 \square \frac{2}{2} \varphi_4,$$

$$\Theta = \eta \partial_i \partial_i \square \frac{2}{2} \varphi_1 + \eta \partial_i \partial_2 \square \frac{2}{2} \varphi_2 + \eta \partial_i \partial_3 \square \frac{2}{2} \varphi_3 + (1 + a) \square \frac{2}{1} \square \frac{2}{2} \varphi_4.$$

Здесь

$$\Omega \equiv (1 + a) \square \frac{2}{1} \square \frac{2}{3} - \gamma_0 \eta \partial_i \nabla^2, \quad \Gamma \equiv a \square \frac{2}{3} - \gamma_0 \eta \partial_i.$$