УДК 51(077)

Интегрирование и дифференцирование асимптотических соотношений и отношений порядка

Бахмат Г.Л.
Белорусский национальный технический университет

В задачи математического анализа входит исследование асимптотических свойств функций. Однако асимптотика до сих пор остается слабым местом вузовского курса анализа в его традиционном построении. Мы уже писали о том, какие элемент асимптотики следует включать в материал теоретического курса и практических занятий по математике в технических вузах. В этой же работе исследованы вопросы законности интегрирования и дифференцирования асимптотических соотношений и отношений порядка.

Асимптотические соотношения и отношения порядка можно, как правило, интегрировать при условии, что справедливы некоторые очевидные ограничения, касающиеся сходимости интегралов. Так, предполагая, например, что $f(x)$ – интегрируемая функция действительной переменной и причем $f(x) \sim x^{\nu}$ при $x \to \infty$, где ν – действительная (или комплексная) постоянная, нетрудно доказать, что

$$\int_x^\infty f(t)dt \sim -\frac{x^{\nu+1}}{\nu+1}, \quad \int_a^\infty f(x)dt \sim \begin{cases} c & \nu < -1, \\ \ln x, \nu = -1 & при \;\; x \to \infty. \end{cases}$$

Нетрудно показать также, что если функция $f(x)$ непрерывна и $f(x) = o\{\varphi(x)\}$ *при* $x \to \infty$, где $\varphi(x)$ - положительная неубывающая функция x, то $\int_a^x f(x)dt = o\{x\varphi(x)\}$.

Эти формулы непосредственно обобщаются и на интегралы в комплексной области.

Дифференцирование же асимптотических соотношений и отношений порядка не всегда допустимо. Для того, чтобы это было возможным, необходимы дополнительные условия, сформулированные в терминах монотонности производной.

В частности доказано, что если $f(x)$ – непрерывно-дифференцируемая функция и $f(x) \sim x^{\rho}$ при $x \to \infty$, где $\rho \geq 1$, и если $f'(x)$ неубывающая функция при больших x, то $f'(x) \sim \rho x^{\rho-\lambda}$.