УДК 517.925

Использование числа вращения для оценки роста решений уравнений второго порядка

Веременюк В.В.
Белорусский национальный технический университет

Рассматривается линейное уравнение 2-го порядка

$$\ddot{x} + a(t)x = 0,\ t \in [0;+\infty), \qquad (1)$$

с ограниченным непрерывным на полупрямой коэффициентом $a(t)$. Через Λ_a обозначим старший показатель Ляпунова уравнения (1) (см., напр., [1]), который является оценкой сверху максимального роста его решений. При переходе в уравнении (1) в полярную систему координат $x = r\cos\varphi$, $\dot{x} = r\sin\varphi$ получим систему

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = -\sin^2\varphi - a(t)\cos^2\varphi \\ \dot{r} = r\cdot\big(1 - a(t)\big)\sin\varphi\cos\varphi \end{cases}. \qquad (2)$$

Значение предела $R_a = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{\varphi(t,\varphi_o)}{t}$ (если он существует), где $\varphi(t,\varphi_o)$ решение первого из уравнений системы (2) с начальным условием $\varphi(0,\varphi_o) = \varphi_o$, называется числом вращения уравнения (1). Нетрудно убедиться, что число вращения не зависит от φ_o. Известно, что если коэффициент $a(t)$ – периодическая или почти периодическая функция, то число вращения уравнения (1) существует.

Теорема. Если $R_a = 0$, то старший показатель Ляпунова Λ_a уравнения (1) удовлетворяет неравенству

$$\Lambda_a^2 \le \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t}\int_0^t a^-(s)ds, \qquad (3)$$

где $a^- = 0{,}5(|a| - a)$.

Легко видеть, что если $a(t) \equiv const \le 0$, то в (3) будем иметь равенство. Как следует из оценок числа нулей решений (1), указанных в [2], если $\overline{\lim\limits_{t\to\infty}} \frac{1}{t}\int_0^t a^+(s)ds = 0$ (здесь $a^+ = 0{,}5(|a| + a)$), то $R_a = 0$, и, значит, справедлива оценка (3).

Литература
1. Демидович, Б.П., Лекции по математ. теории устойчивости. М., 1967 г.
2. Хартман, Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 1970 г.