УДК 593.9

Операторный метод задач теории упругости как абстрактное обобщение общих решений типа Папковича и Градского

Акимов В.А.
Белорусский национальный технический университет

Классические уравнения изотропной пространственной задачи теории упругости в форме уравнений Ламе имеют вид

$$\nabla U_i^2 + (\gamma - 1)\partial_i \Theta = 0, \qquad i = 1,2,3 \qquad (1)$$

Где $U_1 = U$, $U_2 = V$, $U_3 = W$; $\partial_1 = \partial/\partial x$, $\partial_2 = \partial/\partial y$, $\partial_3 = \partial/\partial z$; $\Theta = \partial_1 U + \partial_2 V + \partial_3 W$.

Полагая в операторном методе решения [1] $\sin(z\Delta) * f(x,y) = F_1$ и $A = h\Delta ctg(h\Delta)$, получим

$$\begin{cases} U_i = \partial_1[\gamma F_i + (\gamma - 1)(zF'_{iz} - AF_i] \\ V_i = \partial_2[\gamma F_i + (\gamma - 1)(zF'_{iz} - AF_i] \\ W_i = \partial_3[-\gamma F_i + (\gamma - 1)(zF'_{iz} - AF_i] \end{cases} \qquad (1)$$

Придавая i последовательно значения 1,2,3 и осуществляя циклическую замену переменных $\partial_1, \partial_2, \partial_3$ и x, y, z на основании (1), получим три таких системы соотношений. Затем сложим и, введя обозначения $\psi_0 = F_1 + F_2 + F_3$, $F'_{1z} = -\psi_3$, $F'_{2y} = -\psi_2$, $F'_{3x} = -\psi_1$ (штрихи здесь означают производные по указанным в нижних индексах переменным), запишем $\psi = x\psi_1 + y\psi_2 + z\psi_3$, окончательно запишем

$$(1-2\nu)U = 2(1-\nu)\psi_1 - \frac{1}{2}\partial_1\psi + B_1\psi_0, \quad (1-2\nu)V = 2(1-\nu)\psi_2 - \frac{1}{2}\partial_2\psi + B_2\psi_0,$$

$$(1-2\nu)W = 2(1-\nu)\psi_3 - \frac{1}{2}\partial_3\psi + B_3\psi_0.$$

Здесь $B_i = \partial_i(1 - \frac{A}{2})$, $i = 1,2,3$ - операторные коэффициенты.

Итак, полученное решение совпадает с решением Папковича и Градского с точностью до дополнительной гармонической функции ψ_0. С учетом того обстоятельства, что до сегодняшнего дня не закрыт вопрос о количестве гармонических функций входящих в решение, данный результат представляет несомненный интерес.

Литература

1. Акимов, В.А. Операторный метод решения задач теории упругости: Монография.– Минск: УП «Технопринт», 2003.– 101с.