УДК 539.8

Изучение потери устойчивости системы «кость-имплантат» с учетом первоначальной кривизны

Куриленко А.В.
Белорусский национальный технический университет

Рассматриваем задачу изгиба кости, которая имеет первоначальную малую кривизну и находится в плоскости ее искривления. Обозначим через v – перемещение сечения, а через u – перемещение по касательной в направлении положительного отсчета s. С целью упрощения дифференциального уравнения, пренебрегаем влиянием продольных усилий и учитываем лишь одни деформации изгиба, поскольку в большинстве случаев это не вносит существенной погрешности. Это допущение приводит к соотношению $u' = v$, где штрихом обозначена производная по угловой координате дуги стержня. При $\rho = R = const \quad \gamma \le \varphi \le \gamma$, т. е. для стержня, изогнутого по дуге круга можно записать для прогибов следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^6u}{d\varphi^6} + 2\frac{d^4u}{d\varphi^4} + \frac{d^2u}{d\varphi^2} - p = 0 . \tag{1}$$

Решение данного уравнения можно представить в виде: $u = u_ч + u_н$,где

$$\begin{gathered} u_r = \frac{1}{2}p\varphi^2 + C_1 + C_3\cos\varphi + C_5(\varphi\sin\varphi + 2\cos\varphi), \\ u_ч = p\varphi + C_2\varphi + C_4\sin\varphi + C_6(\varphi\cos\varphi - 2\sin\varphi) . \end{gathered} \tag{2}$$

Шестой порядок уравнения соответствует шести граничным условиям на обоих концах стержня. В нашем случае эти условия имеют вид

$$u\big|_{\varphi=\pm\gamma} = u'\big|_{\varphi=\pm\gamma} = u'''\big|_{\varphi=\pm\gamma} = 0 . \tag{3}$$

На основании (2) и (3) получаем следующую систему уравнений для нахождения неизвестных коэффициентов C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6:

$$\begin{cases} C_1 + C_3\cos\gamma + C_5(\gamma\sin\gamma + 2\cos\gamma) = -\dfrac{1}{2}p\gamma^2 \\ -C_3\sin\gamma + C_5(\gamma\cos\gamma - \sin\gamma) = -p\gamma \\ C_3\sin\gamma + C_5(\gamma\cos\gamma + \sin\gamma) = 0 \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} C_2\gamma + C_4\sin\gamma + C_6(\gamma\cos\gamma - 2\sin\gamma) = -p\gamma \\ C_2 + C_4\cos\gamma - C_6(\gamma\sin\gamma + \cos\gamma) = -p \\ C_4\cos\gamma - C_6(\gamma\sin\gamma - \cos\gamma) = 0 . \end{cases} \tag{5}$$

Определив эти коэффициенты из системы уравнений (4) и (5), получим окончательное решение исходной задачи.