МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Белорусский национальный технический университет

Кафедра «Высшая математика»

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

Лабораторный практикум

Минск
БНТУ
2021

УДК 519.6(076.5)
ББК 22.19я7
В94

Составители:
А. В. Грекова, А. В. Метельский, Е. А. Федосик, Н. И. Чепелев

Рецензенты:
В. В. Павлов, А. Н. Исаченко

В94 **Вычислительная** математика : лабораторный практикум / сост.: А. В. Грекова [и др.]. – Минск : БНТУ, 2021. – 127 с.
ISBN 978-985-583-244-8.

Лабораторный практикум разработан в соответствии с учебной программой курса «Вычислительная математика» ФИТР БНТУ. Он содержит восемнадцать лабораторных работ по четырем разделам: элементы теории множеств, основы теории графов, численные методы, элементы математической статистики. В начале каждой темы излагаются краткие теоретические сведения по рассматриваемым лабораторным работам, которые иллюстрируются решениями типовых задач. В конце каждой работы приводятся индивидуальные задания. Эти задания могут быть использованы и в качестве типовых расчетов. Лабораторный практикум может быть полезен для самостоятельного изучения вычислительной математики, особенно для заочных отделений вузов.

УДК 519.6(076.5)
ББК 22.19я7

ISBN 978-985-583-244-8

СОДЕРЖАНИЕ

1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ 5
Лабораторная работа № 1 5
Лабораторная работа № 2 6
2. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ГРАФОВ 7
Лабораторная работа № 3 7
Лабораторная работа № 4 14
Лабораторная работа № 5 20
Лабораторная работа № 6 25
3. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ 32
Лабораторная работа № 7 32
Лабораторная работа № 8 36
3.1. Метод простой одношаговой итерации 36
3.2. Метод Зейделя 40
Лабораторная работа № 9 41
3.3. Интерполяционный многочлен Лагранжа 42
Лабораторная работа № 10 47
3.4. Конечные разности 47
3.5. Первая интерполяционная формула Ньютона (для интерполирования вперед) 48
3.6. Вторая интерполяционная формула Ньютона (для интерполирования назад) 51
Лабораторная работа № 11 54
Лабораторная работа № 12 63
3.7. Метод средних прямоугольников 63
3.8. Формула трапеций 65
3.9. Формула Симпсона (метод параболических трапеций) ... 65
3.10. Формула Ньютона (правило трех восьмых) 66
3.11. Правило Рунге (двойной пересчет) 67
3.12. Квадратурные формулы наивысшей алгебраической степени точности (квадратурные формулы Гаусса) 68
Лабораторная работа № 13 75
3.13. Отделение корней 75
3.14. Метод половинного деления 76
3.15. Метод простой итерации (метод последовательных приближений) 77

3.16. Итерационные методы решения нелинейных уравнений. Метод Ньютона. Метод секущих. Метод хорд..... 81
Лабораторная работа № 14 86
3.17. Метод простой итерации для системы двух уравнений . 86
3.18. Метод Ньютона для системы двух уравнений 90
4. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ 95
Лабораторная работа № 15 95
Лабораторная работа № 16 99
ПРИЛОЖЕНИЕ 1 101
ПРИЛОЖЕНИЕ 2 102
Лабораторная работа № 17 112
Лабораторная работа № 18 119
ЗАКЛЮЧЕНИЕ 126
ЛИТЕРАТУРА 127

1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Лабораторная работа № 1

Тема: **Разбиения конечных множеств** [1].

Цель: изучение способов вычисления количества разбиений конечного множества.

Задание: написать программу, вычисляющую количество разбиений конечного множества мощности $n (n \le 10)$. Составить таблицу, аналогичную треугольнику Паскаля до $n = 10$.

Входные данные: n – мощность множества.

Результат работы: количество разбиений множества заданной мощности. Таблица для чисел S_n^m и B_n.

Необходимые теоретические сведения.

Под множеством в математике понимается любая совокупность каких-либо объектов.

Разбиением множества X называется такое представление $X = \bigcup_{i=1}^{n} X_i$, что $X_i \cap X_j = \varnothing \ \forall_i \ne j$.

Число разбиений n-элементного множества на m-блоков называется ***числом Стирлинга 2-го рода*** и обозначается S_n^m. По определению $S_0^0 = 1,\ S_n^n = 1,\ S_n^0 = 0,\ S_n^m = 0,$ если $m > n$.

Теорема. $S_n^m = S_{n-1}^{m-1} + m \cdot S_{n-1}^m$.

Число всех разбиений n-элементного множества называется ***числом Белла*** и обозначается B_n. По определению $B_0 = 1$. Для $n \ge 1$ $B_n = \sum_{m=1}^{n} S_n^m$.

Теорема. $B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k B_k$.

Лабораторная работа № 2

Тема: **Отношения частичного порядка. Диаграмма Хассе** [11].

Цель: изучение свойств отношения частичного порядка на примере отношения делимости на конечном подмножестве натуральных чисел.

Задание: построить диаграмму Хассе для отношения $aRb \Leftrightarrow b \vdots a$ на заданном конечном подмножестве натуральных чисел M.

Входные данные: множество M.

Результат работы: диаграмма Хассе заданного отношения.

Необходимые теоретические сведения.

Определения. Бинарное отношение R на множестве A называется ***отношением частичного порядка***, если оно рефлексивно, транзитивно и антисимметрично.

Если R – отношение частичного порядка и aRb, то вместо этого пишут $a \leq Rb$, или просто $a \leq b$. При этом говорят, что a меньше либо равно b. Если при этом дополнительно $b \neq a$, то пишут $a < b$ и говорят, что a строго меньше b. Говорят также, что a предшествует b.

Если для элементов $a, b \in A$ верно, что $a \leq b$ или $b \leq a$, то говорят, что элементы a и b сравнимы. Не всегда любые два элемента сравнимы.

Если $a < b$ и не существует элемента x, такого, что $a < x$ и $x < b$, то a называется непосредственно меньшим или непосредственно предшествующим элементу b.

Частично упорядоченные множества (точнее отношения порядка на них) удобно изображать в виде специальных графов, которые называются ***диаграммами Хассе***. Элементы данного множества a, b и т. д. изображаются при этом как вершины графа. Но ребрами (без стрелок) соединяются не все пары сравнимых элементов, а только непосредственно меньшие с непосредственно большими, причем, если, например, a меньше b, то вершина a изображается ниже, чем b.

Если элемент a множества A такой, что $\forall x \in A$ и/либо $x \leq a$, то a называется ***наибольшим***, а если $\forall x \in A$ и/либо $a \leq x$, то элемент a называется ***наименьшим***.

Элемент a называется ***максимальным***, если $\forall x \in A$ либо $x \leq a$, либо a и x несравнимы.

Элемент a называется ***минимальным***, если $\forall x \in A$ либо $a \leq x$, либо a и x несравнимы.

2. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ГРАФОВ

Лабораторная работа № 3

Тема: **Числовые характеристики графов. Расстояния. Простейшие алгоритмы на графах.**

Цель: изучение простейших алгоритмов на графах.

Варианты задания:

1) Алгоритм поиска в ширину ([3], с. 37).

Задание: написать программу, реализующую алгоритм поиска в ширину в простом графе.

Входные данные: n – порядок графа; граф порядка n (матрица смежности), номер вершины, с которой начинается поиск.

Результат работы: рисунок графа с пронумерованными вершинами и метками вершин, полученными в результате поиска.

2) Алгоритм Дейкстры поиска кратчайших путей ([4], с. 364).

Задание: написать программу, реализующую алгоритм Дейкстры поиска кратчайших путей в ориентированном взвешенном графе.

Входные данные: n – порядок графа; граф порядка n (матрица весов), номера вершин, кратчайший путь между которыми должен быть найден.

Результат работы: рисунок графа с пронумерованными вершинами и выделенным путем между заданными двумя вершинами, полученный в результате выполнения алгоритма.

3) Алгоритм Флойда поиска кратчайших путей между всеми парами вершин ([4], с. 366).

Задание: написать программу, реализующую алгоритм Флойда поиска кратчайших путей между всеми парами вершин в простом графе.

Входные данные: *n* – порядок графа; граф порядка *n* (матрица смежности).

Результат работы: рисунок графа с пронумерованными вершинами; пути между всеми парами вершин в заданной графе, полученные в результате выполнения алгоритма.

4) Поиск кратчайшего пути между двумя вершинами во взвешенном ориентированном графе ([3], с. 343).

Задание: написать программу, реализующую алгоритм поиска в ширину во взвешенном ориентированном графе.

Входные данные: *n* – порядок графа; граф порядка *n* (матрица весов), номера вершин, кратчайший путь между которыми должен быть найден.

Результат работы: рисунок графа с указанием номеров вершин, весов и ориентации дуг, а также выделенным путем между заданными двумя вершинами, полученный в результате выполнения алгоритма.

5) Алгоритм поиска кратчайшего пути между двумя вершинами во взвешенном неориентированном графе ([2], с. 19).

Задание: написать программу, реализующую алгоритм поиска в ширину во взвешенном неориентированном графе.

Входные данные: *n* – порядок графа; граф порядка *n* (матрица весов), номера вершин, кратчайший путь между которыми должен быть найден.

Результат работы: рисунок графа с указанием номеров вершин и весов ребер, а также выделенным путем между заданными двумя вершинами, полученный в результате выполнения алгоритма.

6) Отыскание радиуса, диаметра, центров неориентированного графа [3].

Задание: написать программу, решающую задачу определения числовых характеристик графа с использованием алгоритма поиска в ширину в простом графе.

Входные данные: *n* – порядок графа; граф порядка *n* (матрица смежности).

Результат работы: рисунок графа с указанием номеров вершин и выделением вершин, являющихся центрами заданного графа; значения радиуса и диаметра графа, список вершин, являющихся центрами.

7) Построение транзитивного замыкания ориентированного графа ([1], с. 223).

Задание: написать программу, решающую задачу построения транзитивного замыкания ориентированного графа с использованием алгоритма поиска в ширину в ориентированном графе.

Входные данные: *n* – порядок графа; граф порядка *n* (матрица смежности.

Результат работы: рисунки заданного графа и графа транзитивного замыкания с указанием номеров вершин и ориентации ребер.

8) Алгоритм поиска в ширину в ориентированном графе [4].

Задание: написать программу, реализующую алгоритм поиска в ширину в ориентированном графе.

Входные данные: *n* – порядок графа; граф порядка *n* (матрица смежности), номер вершины, с которой начинается поиск.

Результат работы: рисунок ориентированного графа с пронумерованными вершинами и метками вершин, полученными в результате поиска.

9) Алгоритм поиска в глубину ([3], с. 325).

Задание: написать программу, реализующую алгоритм поиска в глубину в простом графе.

Входные данные: *n* – порядок графа; граф порядка *n* (матрица смежности), номер вершины, с которой начинается поиск.

Результат работы: рисунок графа с пронумерованными вершинами, метками вершин, полученными в результате поиска, выделенными ребрами, получившими в результате поиска метку «прямое»; запись обхода графа.

10) Алгоритм нахождения множества вершин, достижимых из заданной ([3], с. 37).

Задание: написать программу, реализующую задачу нахождения множества вершин, достижимых из заданной в простом графе с использованием алгоритма поиска в ширину в простом графе.

Входные данные: *n* – порядок графа; граф порядка *n* (матрица смежности), номер вершины, достижимость из которой исследуется.

Результат работы: рисунок графа с указанными номерами вершин, и выделенными вершинами, полученными в результате выполнения алгоритма.

11) Алгоритм построения минимального остова взвешенного неориентированного графа ([3], с. 337).

Задание: написать программу, реализующую алгоритм построения остова минимального веса взвешенного неориентированного графа.

Входные данные: *n* – порядок графа; граф порядка *n* (матрица весов).

Результат работы: рисунок графа с указанием номеров вершин и весов ребер, а также с выделением остова минимального веса, полученного в результате выполнения алгоритма.

Необходимые теоретические сведения.

Пусть G – связный граф и u, v – его вершины. Длина кратчайшего (u, v)-маршрута (понятно, что он является простой цепью) называется ***расстоянием*** между u и v и обозначается $d(u,v)$. По определению полагают, что $d(u,v)=0$ для всякой вершины u.

Удаленностью (или по-другому ***эксцентриситетом***) вершины v графа G называется наибольшее из расстояний от данной вершины до других вершин графа G: $e(v)=\max\limits_{u\in V(G)} d(v,u)$. ***Радиусом*** графа G называется наименьшая из удаленностей его вершин: $R(G)=$ $=\min\limits_{v\in V(G)} e(v)=\min\limits_{v\in V(G)}\max\limits_{u\in V(G)} d(v,u)$. ***Диаметром*** графа G называется наибольшая из удаленностей его вершин: $D(G)=\max\limits_{v\in V(G)} e(v)=$ $=\max\limits_{v\in V(G)}\max\limits_{u\in V(G)} d(v,u)$.

Вершина v графа G, удаленность которой минимальная (и значит, равна радиусу), называется ***центром*** графа G. Точно также, вершина, удаленность которой максимальная в графе (и значит, равна диаметру), называется ***периферийным центром***.

Метод поиска в ширину в простом графе.

Суть метода заключается в расстановке меток, которая осуществляется по следующему правилу. Предположим, нужно найти расстояние от вершины v_1 до других вершин. Присвоим вершине v_1 метку 0. Всем вершинам, смежным с v_1, присвоим метку 1. Затем всем вершинам, смежным с вершинами, имеющими метку 1 (которые еще не имеют метки), присвоим метку 2 и т. д., пока все вершины не получат метки. Легко видеть, что метка вершины будет равна расстоянию от v_1 до данной вершины, а наибольшая из меток равна удаленности вершины v_1. Так, в рассматриваемом примере $e(v_1)=4$.

Если ребрам поставлены в соответствие некоторые числа, то независимо от их конкретного смысла такие числа называются ***весами*** (вес ребра), а полученный граф называется ***взвешенным графом.***

Для взвешенных графов вместо матрицы смежности обычно рассматривается матрица весов, элементы которой $m_{ij}=$ вес ребра $\{i,j\}$.

Отсутствующим ребрам присваивается вес ∞ или 0, в зависимости от решаемой задачи.

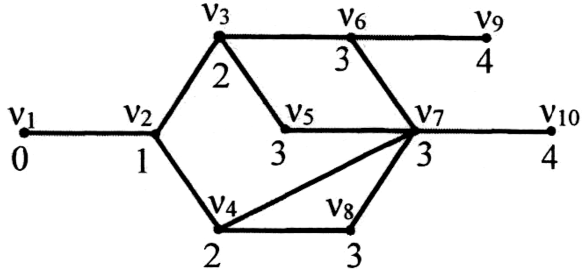

Рис. 1. Расстановка меток вершин

Метод поиска в ширину во взвешенном графе.

Суть метода заключается в расстановке меток, которая осуществляется по следующему правилу. Предположим, нужно найти расстояние от вершины v_1 до других вершин. Присвоим вершине v_1 метку 0. Каждой вершине v_i, смежной с v_1, присвоим метку, равную весу ребра (v_i, v_1). Затем для каждой помеченной вершины v_i с меткой M_i выполним следующие действия. Рассмотрим все смежные с v_i вершины. Возможны следующие варианты: 1) вершина метки не имеет, тогда присваиваем ей метку, равную $M_i + m_{ij}$ (m_{ij} – вес соответствующего ребра); 2) у вершины есть метка, тогда сравниваем ее с $M_i + m_{ij}$. В случае, если собственная метка вершины оказывается меньше числа $M_i + m_{ij}$, это значение становится новой меткой вершины и т. д., пока все вершины не получат метки. Легко видеть, что метка вершины будет равна расстоянию от v_1 до данной вершины.

Граф $\hat{G}$ называется ***графом достижимости*** графа G (или ***транзитивным замыканием*** графа G), если $V(\hat{G}) = V(G)$ и в графе $\hat{G}$ вершины v и u соединены ребром, тогда и только тогда, когда в G существует (u, v)-маршрут. Другими словами, в графе $\hat{G}$ v и u смежны, если $v \sim u$ в графе G (в смысле отношения эквивалентности, введенного выше).

Алгоритм поиска в глубину.

Пусть G – неориентированный связный граф. В процессе поиска в глубину вершинам графа G присваиваются номера, а ребра помечаются. Начинается поиск с произвольной вершины ν_0, которой присваивается номер «1» и выбирается произвольное ребро $\nu_0 w$, которое помечается как «прямое». Вершина w получает номер «2». После этого переходим в вершину w.

Пусть в результате выполнения нескольких шагов данного процесса пришли в вершину x и последний присвоенный ей номер k.

Далее действуем в зависимости от ситуации.

1. Пусть имеется непомеченное ребро (x, y):

а) если у вершины y уже есть номер, ребро (x, y) помечается как «обратное» и продолжается поиск непомеченного ребра, инцидентного вершине x;

б) если вершина y не имеет номера, то присваиваем ей номер «$k+1$», помечаем ребро (x, y) как «прямое» и переходим вершину y. Вершина y при этом считается получившей номер из вершины x. На следующем шаге будем просматривать ребра, инцидентные вершине y.

2. Все ребра, инцидентны вершине x, помечены. В этом случае возвращаемся к вершине, из которой x получила свой номер (по прямому ребру).

Процесс заканчивается, когда все ребра будут помечены и произойдет возвращение в вершину ν_0.

Прямые ребра образуют дерево путей из вершины ν_0 в другие вершины графа.

Деревом называется связный граф без циклов. Произвольный (необязательно связный) граф без циклов называется ***лесом***. Понятно, что лес состоит из деревьев, которые являются для него компонентами связности.

Подграф, являющийся лесом и имеющий столько же компонентов связности, как и исходный граф G, называется ***остовом*** графа G.

Во взвешенном графе ***весом*** какого-либо остова называется сумма весов всех ребер, составляющих данный остов.

Алгоритм Краскала.

1 шаг. Строим остовный подграф $T_1 = O_n \cup e_1$, где O_n – пустой граф порядка $n = |G|$, а e_1 – ребро графа минимального веса.

Далее, для $i = \overline{2, n-1}$.

2 шаг. Строим $T_i = T_{i-1} \cup e_i$, где ребро e_i имеет минимальный вес среди ребер, не входящих в T_{i-1}, и не составляет циклов с ребрами подграфа T_{i-1}.

Легко видеть, что граф T_{n-1} является искомым остовом.

Алгоритм Прима.

1 шаг. Строим $T_1 = e_1$ – ребро графа G минимального веса.

Далее, для $i = \overline{2, n-1}$.

2 шаг. Строим $T_i = T_{i-1} \cup e_i$, где e_i – ребро минимального веса, не входящее в T_{i-1} и инцидентное ровно одной вершине подграфа T_{i-1}.

Лабораторная работа № 4

Тема: **Эйлеровы, гамильтоновы графы. Паросочетания в двудольном графе. Сети.**

Цель: изучение алгоритмов, решающих специальные задачи на графах.

Варианты задания:

1) Алгоритм Флери отыскания эйлерова цикла в простом графе ([3], с. 195).

Задание: написать программу, реализующую алгоритм Флери отыскания эйлерова цикла с предварительным анализом связности графа.

Входные данные: n – порядок графа; граф порядка n (матрица смежности).

Результат работы: рисунок графа с указанными номерами вершин; запись эйлерова цикла (в случае его существования) или сообщение об его отсутствии.

2) Поиск эйлерова пути в связном ориентированном графе ([2], с. 22).

Задание: написать программу, реализующую алгоритм Флери отыскания эйлерова цикла с предварительным анализом связности графа.

Входные данные: n – порядок графа; граф порядка n (матрица смежности).

Результат работы: рисунок графа с указанными номерами вершин; запись эйлерова цикла (в случае его существования) или сообщение об его отсутствии.

3) Алгоритм с возвратом поиска гамильтоновых циклов в связном ориентированном графе ([4], с. 108).

Задание: написать программу, реализующую алгоритм с возвратом поиска гамильтоновых циклов в связном ориентированном графе.

Входные данные: n – порядок графа; граф порядка n (матрица смежности).

Результат работы: рисунок графа с указанием номеров вершин и ориентации дуг, а также с выделением гамильтонового цикла, полученного в результате выполнения алгоритма (в случае существования такого цикла), или же с приведением сообщения о его отсутствии.

4) Алгоритм построения наибольшего паросочетания в двудольном графе ([3], с. 357).

Задание: написать программу, реализующую алгоритм построения наибольшего паросочетания в двудольном графе.

Входные данные: n, m – мощности долей графа; граф (матрица смежности).

Результат работы: рисунок графа с указанием номеров вершин, а также с выделением наибольшего паросочетания, полученного в результате выполнения алгоритма.

5) Алгоритм построения совершенного паросочетания минимального веса в двудольном взвешенном графе (задача о назначениях) ([3], с. 359).

Задание: написать программу, реализующую алгоритм построения наибольшего паросочетания в двудольном графе.

Входные данные: *n* – мощности долей графа; граф (матрица весов).

Результат работы: рисунок графа с указанием номеров вершин, а также с выделением совершенного паросочетания минимального веса, полученного в результате выполнения алгоритма.

6) Алгоритм поиска двусвязных компонент в связном неориентированном графе ([3], с. 332).

Задание: написать программу, реализующую алгоритм поиска двусвязных компонент в связном неориентированном графе с предварительной проверкой связности графа.

Входные данные: *n* – мощность графа; граф (матрица смежности).

Результат работы: рисунок графа с указанием номеров вершин, а также с выделением двусвязных компонент, полученных в результате выполнения алгоритма (в случае их существования) или же с приведением сообщения об их отсутствии.

7) Алгоритм нахождения сильносвязных компонент ориентированного графа) ([4], с. 343).

Задание: написать программу, реализующую алгоритм поиска сильносвязных компонент в ориентированном графе.

Входные данные: *n* – мощность графа; граф (матрица смежности).

Результат работы: рисунок графа с указанием номеров вершин, а также с выделением сильносвязных компонент, полученных в результате выполнения алгоритма (в случае их существования) или же с приведением сообщения об их отсутствии.

8) Алгоритм Форда-Фалкерсона определения максимального потока в сети ([4], с. 410).

Задание: написать программу, реализующую алгоритм Форда-Фалкерсона определения максимального потока в сети.

Входные данные: *n* – количество узлов сети; сеть (матрица пропускных способностей).

Результат работы: рисунок сети с указанием номеров вершин, пропускных способностей дуг и потока, полученного в результате выполнения алгоритма.

9) Алгоритм построения совершенного паросочетания в двудольном графе ([4], с. 399).

Задание: написать программу, реализующую алгоритм построения совершенного паросочетания в двудольном графе.

Входные данные: *n* – мощности долей графа; граф (матрица смежности).

Результат работы: рисунок графа с указанием номеров вершин, а также с выделением совершенного паросочетания, полученного в результате выполнения алгоритма, или же с приведением сообщения о его отсутствии.

10) Алгоритм нахождения критического пути в сети (задача сетевого планирования).

Задание: написать программу, реализующую задачу сетевого планирования.

Входные данные: *n* – количество узлов сети; сеть (матрица весов).

Результат работы: рисунок сети с указанием номеров вершин, ориентации и весов дуг, а также с выделением критического пути, полученного в результате выполнения алгоритма; список вершин-событий с рассчитанными поздним и ранним сроками и резервами времени.

Необходимые теоретические сведения.

Путь в графе называется ***эйлеровым***, если он содержит все ребра графа. Замкнутый эйлеров путь называется эйлеровым циклом. Граф, который имеет эйлеров цикл, также называется эйлеровым.

Теорема (Эйлер). Связный граф является эйлеровым тогда и только тогда, когда степени всех его вершин четные.

Путь (цикл) в графе называется ***гамильтоновым***, если он содержит каждую вершину графа, причем ровно один раз. Граф называется гамильтоновым, если он имеет гамильтонов цикл.

Теорема (Дирак). Если граф G имеет порядок $n \geq 3$ и для любой вершины ν графа G ее порядок $\deg \nu \geq n/2,$ то G является гамильтоновым.

Теорема (Оре). Если для любой пары несмежных вершин u и ν графа G порядка $n \geq 3$ сумма их степеней $\deg \nu + \deg u \geq n,$ то G гамильтонов.

Паросочетанием графа G называется любое множество попарно несмежных ребер. Паросочетание графа называется ***максимальным,*** если оно не содержится в паросочетании с большим числом ребер. Паросочетание называется ***наибольшим,*** если оно имеет наибольшее число ребер среди всех паросочетаний данного графа. Паросочетание называется ***совершенным***, если оно покрывает все вершины графа, т. е. если каждая вершина графа G инцидентна некоторому ребру данного паросочетания.

Задача о назначениях

Имеется множество исполнителей $V = \{\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_n\},$ каждый из которых может выполнить некоторые из работ множества $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}.$ Стоимость выполнения работы x_i исполнителем ϑj равна p_{ij}. Необходимо распределить исполнителей по работам так, чтобы выполнить все работы с минимальными затратами.

Под ***сетью*** будем понимать взвешенный ориентированный граф.

Лемма (о «рукопожатиях»). Сумма полустепеней исхода всех вершин сети равна сумме полустепеней захода.

В сети вершины, которые являются только началом дуг, называются ***источниками,*** а вершины, которые являются только концами дуг, – ***стоками*** (это полюса сети).

Для данной сети (G, p) ***потоком*** называется функция $\varphi(e)$, ставящая в соответствие каждой дуге e некоторое неотрицательное число, такое что:

1) $0 \le \varphi(e) \le p(e)$ (т. е. поток неотрицателен и не превосходит пропускной способности данной дуги);

2) для всякой вершины u, кроме источника и стока $\sum\limits_{e_k} \varphi(e_k) = \sum\limits_{e_n} \varphi(e_n)$, где первая сумма вычисляется по всем дугам e_k, для которых вершина u является концом, а вторая сумма по всем ребрам e_n, для которых u является началом (т. е. общий поток, втекающий в данную вершину, равен суммарному потоку, вытекающему из этой вершины).

Дуги, для которых поток равен пропускной способности: $\varphi(e) = p(e)$, называются ***насыщенными***; в противном случае, если $\varphi(e) < p(e)$, – ненасыщенными.

Из леммы о «рукопожатиях» и условия 2) следует, что суммарный поток, вытекающий из источника ν_0, равен суммарному потоку, втекающему в сток w_0. Эта величина называется величиной потока (ν_0, w_0)-сети.

Теорема (Форд-Фалкерсон). Величина максимального потока в (ν_0, w_0)-сети равна минимальной пропускной способности (ν_0, w_0)-разреза сети (пропускная способность разреза подсчитывается как сумма пропускных способностей всех ребер, составляющих данный разрез).

Теорема. Время, необходимое для выполнения всех работ проекта, равно длине критического пути соответствующей сети.

Работы, лежащие на критическом пути, также называются ***критическими***. Сокращение или увеличение сроков выполнения критических работ соответственно сокращает или увеличивает общую продолжительность выполнения проекта. Остальные работы называются некритическими и допускают некоторое запаздывание в их выполнении, которое не задерживает сроков реализации всего проекта.

Алгоритм поиска критического пути (простого пути от начала работ до их окончания, имеющий наибольшую длину).

Пусть дана сеть. Для каждого события i определим наиболее ***ранний срок*** его наступления $t_p(i)$ по следующему правилу:

1) $t_p(0)=0$;

2) для $i>0$ $t_p(i)$ равно продолжительности самого длинного $(0,i)$-пути.

Значение $t_р(i)$ определяют последовательно, переходя от источника к стоку.

Эти значения находятся из соотношения: $t_p(i)=\max\left\{t_p\left(k\right)+t_{ki}\right\}$, т. е. для всех дуг (k,i), для которых i является концом, необходимо вычислить $t_p\left(k\right)+t_{ki}$ и выбрать наибольшее значение.

Время выполнения проекта – t_p стока. Для получения критического пути нужно передвигаться в обратном направлении, от стока к источнику, по тем ребрам (k,i), которые определяли значения $t_p\left(i\right)$, т. е. для которых выполняется равенство $t_p\left(i\right)-t_{ki}=t_p\left(k\right)$.

Резервом времени события i называется время $\tau\left(i\right)$, на которое можно отложить наступление события i так, что это не увеличит времени выполнения всего проекта. ***Поздним сроком*** наступления события i, называется время $t_{п}\left(i\right)=t_p\left(i\right)+\tau\left(i\right)$.

Поздние сроки наступления событий определяются последовательно, передвигаясь от стока к источнику. Сразу отметим, что для стока $t_{п}=t_p$, как и для всех других событий на критическом пути, которые не имеют резерва времени.

Лабораторная работа № 5

Тема: **Задача коммивояжера ([6], с. 189–198).**

Цель: изучение метода ветвей и границ на примере алгоритма Литтла для задачи коммивояжера.

Задание: найти маршрут коммивояжера, который должен посетить один и только один раз каждый из n городов и вернуться в исходный пункт. Его маршрут должен минимизировать суммарную длину пройденного пути.

<u>Варианты задания</u>:

1. $\begin{vmatrix} \infty & 27 & 26 & 23 & 25 \\ 29 & \infty & 31 & 32 & 28 \\ 22 & 34 & \infty & 22 & 31 \\ 29 & 20 & 26 & \infty & 23 \\ 28 & 43 & 32 & 26 & \infty \end{vmatrix}$ **2.** $\begin{vmatrix} \infty & 42 & 49 & 33 & 45 \\ 39 & \infty & 38 & 38 & 41 \\ 46 & 54 & \infty & 42 & 38 \\ 58 & 53 & 45 & \infty & 55 \\ 45 & 54 & 61 & 60 & \infty \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} \infty & 34 & 33 & 25 & 28 \\ 28 & \infty & 25 & 27 & 22 \\ 37 & 28 & \infty & 30 & 31 \\ 30 & 29 & 28 & \infty & 34 \\ 39 & 38 & 41 & 40 & \infty \end{vmatrix}$ **4.** $\begin{vmatrix} \infty & 29 & 29 & 33 & 40 \\ 32 & \infty & 30 & 40 & 37 \\ 44 & 28 & \infty & 32 & 26 \\ 47 & 38 & 44 & \infty & 47 \\ 44 & 37 & 33 & 32 & \infty \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} \infty & 52 & 46 & 52 & 43 \\ 48 & \infty & 44 & 53 & 43 \\ 53 & 59 & \infty & 54 & 48 \\ 52 & 44 & 55 & \infty & 42 \\ 54 & 57 & 57 & 51 & \infty \end{vmatrix}$ **6.** $\begin{vmatrix} \infty & 19 & 22 & 18 & 21 \\ 22 & \infty & 22 & 22 & 21 \\ 24 & 19 & \infty & 24 & 27 \\ 23 & 27 & 23 & \infty & 22 \\ 23 & 30 & 25 & 29 & \infty \end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} \infty & 57 & 38 & 38 & 50 \\ 55 & \infty & 45 & 52 & 32 \\ 35 & 43 & \infty & 48 & 57 \\ 37 & 47 & 56 & \infty & 37 \\ 46 & 35 & 61 & 61 & \infty \end{vmatrix}$ **8.** $\begin{vmatrix} \infty & 43 & 49 & 32 & 31 \\ 31 & \infty & 41 & 52 & 42 \\ 42 & 50 & \infty & 28 & 51 \\ 32 & 39 & 30 & \infty & 39 \\ 36 & 54 & 42 & 53 & \infty \end{vmatrix}$

9. $\begin{vmatrix} \infty & 32 & 32 & 36 & 38 \\ 45 & \infty & 29 & 38 & 39 \\ 34 & 31 & \infty & 35 & 36 \\ 32 & 34 & 42 & \infty & 28 \\ 37 & 48 & 41 & 34 & \infty \end{vmatrix}$ **10.** $\begin{vmatrix} \infty & 30 & 24 & 27 & 21 \\ 28 & \infty & 26 & 20 & 29 \\ 23 & 32 & \infty & 25 & 38 \\ 24 & 22 & 24 & \infty & 34 \\ 31 & 28 & 35 & 36 & \infty \end{vmatrix}$

11. $$\begin{vmatrix} \infty & 14 & 23 & 24 & 16 \\ 22 & \infty & 12 & 19 & 22 \\ 16 & 24 & \infty & 17 & 21 \\ 23 & 15 & 29 & \infty & 15 \\ 21 & 23 & 23 & 19 & \infty \end{vmatrix}$$

12. $$\begin{vmatrix} \infty & 48 & 44 & 38 & 46 \\ 46 & \infty & 51 & 43 & 30 \\ 40 & 39 & \infty & 45 & 34 \\ 56 & 50 & 53 & \infty & 49 \\ 51 & 41 & 50 & 54 & \infty \end{vmatrix}$$

13. $$\begin{vmatrix} \infty & 26 & 25 & 33 & 32 \\ 36 & \infty & 36 & 24 & 29 \\ 42 & 33 & \infty & 37 & 39 \\ 24 & 41 & 42 & \infty & 36 \\ 37 & 27 & 38 & 41 & \infty \end{vmatrix}$$

14. $$\begin{vmatrix} \infty & 16 & 18 & 23 & 19 \\ 14 & \infty & 28 & 22 & 16 \\ 15 & 20 & \infty & 24 & 25 \\ 26 & 19 & 25 & \infty & 17 \\ 27 & 29 & 21 & 20 & \infty \end{vmatrix}$$

15. $$\begin{vmatrix} \infty & 19 & 10 & 26 & 29 \\ 18 & \infty & 14 & 21 & 27 \\ 14 & 19 & \infty & 10 & 12 \\ 13 & 21 & 25 & \infty & 12 \\ 13 & 13 & 15 & 17 & \infty \end{vmatrix}$$

16. $$\begin{vmatrix} \infty & 24 & 18 & 12 & 19 \\ 23 & \infty & 38 & 22 & 26 \\ 35 & 42 & \infty & 24 & 15 \\ 24 & 24 & 28 & \infty & 27 \\ 26 & 27 & 21 & 20 & \infty \end{vmatrix}$$

17. $$\begin{vmatrix} \infty & 18 & 16 & 16 & 10 \\ 18 & \infty & 20 & 23 & 28 \\ 21 & 25 & \infty & 10 & 18 \\ 13 & 19 & 29 & \infty & 12 \\ 24 & 13 & 15 & 17 & \infty \end{vmatrix}$$

18. $$\begin{vmatrix} \infty & 30 & 27 & 13 & 16 \\ 14 & \infty & 18 & 22 & 17 \\ 25 & 42 & \infty & 34 & 25 \\ 20 & 21 & 26 & \infty & 37 \\ 21 & 27 & 21 & 19 & \infty \end{vmatrix}$$

19. $$\begin{vmatrix} \infty & 21 & 25 & 26 & 26 \\ 22 & \infty & 30 & 35 & 32 \\ 26 & 35 & \infty & 25 & 35 \\ 31 & 24 & 25 & \infty & 27 \\ 26 & 37 & 29 & 29 & \infty \end{vmatrix}$$

20. $$\begin{vmatrix} \infty & 44 & 52 & 32 & 49 \\ 40 & \infty & 41 & 37 & 45 \\ 47 & 56 & \infty & 51 & 42 \\ 59 & 55 & 48 & \infty & 59 \\ 46 & 57 & 54 & 59 & \infty \end{vmatrix}$$

21. $$\begin{vmatrix} \infty & 27 & 32 & 28 & 46 \\ 30 & \infty & 44 & 30 & 26 \\ 39 & 31 & \infty & 33 & 35 \\ 32 & 38 & 27 & \infty & 38 \\ 41 & 33 & 40 & 31 & \infty \end{vmatrix}$$

22. $$\begin{vmatrix} \infty & 30 & 31 & 32 & 44 \\ 32 & \infty & 33 & 41 & 43 \\ 44 & 28 & \infty & 38 & 32 \\ 47 & 35 & 47 & \infty & 51 \\ 43 & 39 & 36 & 31 & \infty \end{vmatrix}$$

23. $\begin{vmatrix} \infty & 51 & 49 & 55 & 43 \\ 50 & \infty & 43 & 56 & 47 \\ 65 & 62 & \infty & 57 & 52 \\ 64 & 46 & 54 & \infty & 46 \\ 56 & 60 & 56 & 54 & \infty \end{vmatrix}$ **24.** $\begin{vmatrix} \infty & 27 & 25 & 37 & 25 \\ 28 & \infty & 25 & 21 & 35 \\ 35 & 31 & \infty & 23 & 31 \\ 34 & 29 & 26 & \infty & 26 \\ 28 & 32 & 28 & 28 & \infty \end{vmatrix}$

25. $\begin{vmatrix} \infty & 60 & 37 & 41 & 54 \\ 57 & \infty & 44 & 65 & 36 \\ 37 & 46 & \infty & 51 & 66 \\ 39 & 50 & 65 & \infty & 41 \\ 48 & 38 & 60 & 64 & \infty \end{vmatrix}$ **26.** $\begin{vmatrix} \infty & 45 & 52 & 31 & 35 \\ 32 & \infty & 44 & 51 & 46 \\ 43 & 52 & \infty & 27 & 54 \\ 33 & 41 & 33 & \infty & 43 \\ 37 & 53 & 45 & 52 & \infty \end{vmatrix}$

27. $\begin{vmatrix} \infty & 35 & 31 & 39 & 42 \\ 44 & \infty & 38 & 31 & 45 \\ 36 & 39 & \infty & 38 & 40 \\ 34 & 47 & 41 & \infty & 32 \\ 39 & 47 & 40 & 37 & \infty \end{vmatrix}$ **28.** $\begin{vmatrix} \infty & 32 & 27 & 26 & 25 \\ 29 & \infty & 29 & 32 & 23 \\ 24 & 34 & \infty & 24 & 22 \\ 25 & 24 & 30 & \infty & 38 \\ 32 & 30 & 38 & 37 & \infty \end{vmatrix}$

29. $\begin{vmatrix} \infty & 17 & 11 & 17 & 20 \\ 24 & \infty & 11 & 15 & 26 \\ 18 & 17 & \infty & 20 & 25 \\ 25 & 18 & 22 & \infty & 19 \\ 23 & 26 & 22 & 22 & \infty \end{vmatrix}$ **30.** $\begin{vmatrix} \infty & 30 & 47 & 37 & 50 \\ 37 & \infty & 54 & 42 & 34 \\ 41 & 31 & \infty & 44 & 38 \\ 57 & 56 & 56 & \infty & 53 \\ 52 & 43 & 53 & 54 & \infty \end{vmatrix}$

Необходимые теоретические сведения.

Если считать города вершинами графа, а коммуникации (i, j) – его дугами, то требование нахождения минимального пути, проходящего один и только один раз через каждый город, и возвращения обратно можно рассматривать как нахождение на графе контура минимальной длины. Замкнутый контур, проходящий один и только один раз через каждую вершину графа, называется ***гамильтоновым контуром***. Таким образом, задача коммивояжера состоит в нахождении на графе гамильтонова контура минимальной длины.

Рассмотрим ***алгоритм Литтла*** для нахождения минимального гамильтонова контура на графе с n-вершинами. Если между вершинами i и j нет дуги, то ставится символ ∞. Этот же символ ставится по главной диагонали, что означает запрет на возвращение в вершину, через которую уже проходит контур. Основная идея метода состоит в том, что вначале строят нижнюю границу длин множества гамильтоновых контуров Ω^0. Затем множество контуров Ω^0 разбивается на два подмножества таким образом, чтобы первое подмножество $\Omega^1{}_{ij}$ состояло из гамильтоновых контуров, содержащих некоторую дугу (i, j), а другое подмножество $\Omega^1{}_{\bar{i}\bar{j}}$ не содержало этой дуги. Для каждого из подмножеств определяются нижние границы по тому же правилу, что и для первоначального множества гамильтоновых контуров. Полученные нижние границы подмножеств $\Omega^1{}_{ij}$ и $\Omega^1{}_{\bar{i}\bar{j}}$ оказываются не меньше нижней границы для всего множества гамильтоновых контуров, т. е.

$$\varphi\left(\Omega^0\right) \le \varphi\left(\Omega_{ij}{}^1\right) \equiv \varphi_{ij}{}^1, \varphi\left(\Omega^0\right) \le \varphi\left(\Omega_{\bar{i}\bar{j}}{}^1\right) \equiv \varphi_{\bar{i}\bar{j}}{}^1.$$

Сравнивая нижние границы $\varphi^1{}_{ij}$ и $\varphi_{\bar{i}\bar{j}}{}^1$ подмножеств $\Omega^1{}_{ij}$ и $\Omega^1{}_{\bar{i}\bar{j}}$, можно выделить среди них то, которое с большей вероятностью содержит гамильтонов контур минимальной длины. Затем одно из подмножеств $\Omega_{ij}{}^1$ или $\Omega^1{}_{\bar{i}\bar{j}}$ по аналогичному правилу разбивается на два новых $\Omega_{ij}{}^2$ и $\Omega^2{}_{\bar{i}\bar{j}}$. Для них снова отыскиваются нижние границы $\varphi^2{}_{ij}$ и $\varphi_{\bar{i}\bar{j}}{}^2$ и т. д. Процесс ветвления продолжается до тех пор, пока не отыщется единственный гамильтонов контур. Его называют ***первым рекордом.*** Затем просматривают оборванные ветви. Если их нижние границы больше длины первого рекорда, то задача решена, если же есть такие, для которых нижние границы меньше, чем длина первого рекорда, то подмножество с наименьшей нижней границей подвергается дальнейшему ветвлению, пока не убеждаются, что оно не содержит лучшего гамильтонова контура. Если же такой найдется, то анализ оборванных ветвей продолжается относительно нового значения длины контура. Его называют ***вторым рекордом***. Процесс решения заканчивается, когда будут проанализированы все подмножества.

Лабораторная работа № 6

Тема: **Свойства графов** [2], [3], [4], [7].

Цель: изучение характеристик и свойств различных типов графов.

Задание: ответить на заданные вопросы.

Граф G задан матрицей смежности.

1. Построить рисунок графа G.
2. Записать степенную последовательность графа G. Является ли граф G регулярным?
3. Является ли граф G связным? Чему равна его вершинная и реберная связность?
4. Осуществить поиск в ширину, начав с вершины 2.
5. Найти удаленности всех вершин.
6. Найти радиус и диаметр графа G; указать центры и периферийные центры.
7. Осуществить поиск в глубину, начав с вершины 3. Записать соответствующий обход и построить дерево путей.
8. Найти циклический ранг и ранг разрезов графа G.
9. Построить остов T графа G с максимально возможным числом концевых вершин.
10. Изобразить остов T как корневое дерево, выбрав в качестве корня центр T. Записать код полученного корневого дерева.
11. Построить фундаментальную систему циклов графа G, ассоциированную с остовом T. Какова мощность пространства циклов графа G?
12. Построить фундаментальную систему разрезов графа G, ассоциированную с остовом T. Какова мощность пространства разрезов графа G?
13. Является ли граф G двудольным? Если является, то укажите доли.
14. Является ли граф G эйлеровым? Если является, то укажите эйлеров цикл. Если нет, то определите, содержит ли G эйлерову цепь (укажите ее).
15. Является ли граф G гамильтоновым? Если является, то укажите гамильтонов цикл. Если нет, то определите, содержит ли G гамильтонову цепь (укажите ее).

16. Является ли граф G планарным? Если является, то постройте изоморфный плоский граф. Сколько граней он содержит?

17. Найдите хроматическое и реберно-хроматическое число графа G. Приведите соответствующие раскраски.

18. Найдите наибольшее паросочетание графа G. Является ли оно совершенным?

1. $\begin{bmatrix} 0&0&0&1&1&1&0&1&0&1\\ 0&0&1&0&0&1&0&0&1&1\\ 0&1&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 1&0&0&0&1&1&1&0&0&0\\ 1&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 1&1&0&1&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&1&0&1\\ 1&0&1&0&0&0&1&0&1&0\\ 0&1&0&0&0&1&0&1&0&1\\ 1&1&0&0&0&0&1&0&1&0 \end{bmatrix}$ **2**. $\begin{bmatrix} 0&0&1&0&0&0&1&1&0&1\\ 0&0&1&0&0&1&0&0&0&0\\ 1&1&0&0&0&0&0&1&0&1\\ 0&0&0&0&1&1&1&0&1&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&1\\ 0&1&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&1&0&0&0&1&0&1\\ 1&0&1&0&0&0&1&0&1&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&1&0&0\\ 1&0&1&0&1&0&1&0&0&0 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 0&1&0&1&1&0&0&1&0&1\\ 1&0&1&0&0&1&0&0&1&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 1&0&0&0&1&0&1&0&0&0\\ 1&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&1&1&1\\ 1&0&1&0&0&0&1&0&1&0\\ 0&1&0&0&0&1&1&1&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&1&0&0&0 \end{bmatrix}$ **4**. $\begin{bmatrix} 0&1&1&0&0&1&0&1&0&0\\ 1&0&1&0&1&1&0&0&0&0\\ 1&1&0&0&0&0&0&1&0&1\\ 0&0&0&0&1&1&1&0&1&0\\ 0&1&0&1&0&0&0&0&1&1\\ 1&1&0&1&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&1&1&1\\ 1&0&1&0&0&1&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&1&0&1&0&0&1\\ 0&0&1&0&1&0&1&0&1&0 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 0&1&0&1&1&0&0&1&1&1\\ 1&0&0&0&0&1&1&0&1&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&1&0&0\\ 1&0&1&0&1&0&1&0&0&0\\ 1&0&0&1&0&0&0&1&0&1\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&1&0&1&0&0&0&1&0&1\\ 1&0&1&0&1&0&1&0&0&0\\ 1&1&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&1&0&1&0&0&0 \end{bmatrix}$ **6**. $\begin{bmatrix} 0&1&1&0&1&1&0&1&0&1\\ 1&0&1&0&1&1&0&0&0&0\\ 1&1&0&0&0&0&1&0&1&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&1&0\\ 1&1&0&1&0&0&0&1&1&1\\ 1&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&1&1&1\\ 1&0&0&0&1&0&1&0&0&0\\ 0&0&1&1&1&0&1&0&0&1\\ 1&0&0&0&1&0&1&0&1&0 \end{bmatrix}$

7. $$\begin{bmatrix} 0&0&1&1&1&1&0&1&0&1\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&1&0\\ 1&1&0&0&0&0&1&1&0&0\\ 1&0&0&0&1&1&1&0&0&0\\ 1&0&0&1&0&0&0&0&1&1\\ 1&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&1&0&0&0&0&1&1\\ 1&0&1&0&0&0&0&0&1&1\\ 0&1&0&0&1&0&1&1&0&0\\ 1&0&0&0&1&0&1&1&0&0 \end{bmatrix}$$

8. $$\begin{bmatrix} 0&0&1&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&1&0&0&1&0&1&1&0\\ 1&1&0&0&0&0&0&1&0&1\\ 0&0&0&0&1&1&1&0&1&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&1&0&1\\ 0&1&0&1&0&0&0&1&1&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&1&0&1\\ 0&1&1&0&1&1&1&0&1&0\\ 0&1&0&1&0&1&0&1&0&0\\ 1&0&1&0&1&0&1&0&0&0 \end{bmatrix}$$

9. $$\begin{bmatrix} 0&0&0&1&1&1&0&1&0&1\\ 0&0&1&0&0&1&0&0&1&1\\ 0&1&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 1&0&0&0&1&1&1&0&0&0\\ 1&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 1&1&0&1&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&1&0&1\\ 1&0&1&0&0&0&1&0&1&0\\ 0&1&0&0&0&1&0&1&0&1\\ 1&1&0&0&0&0&1&0&1&0 \end{bmatrix}$$

10. $$\begin{bmatrix} 0&0&1&0&0&0&1&1&0&0\\ 0&0&1&1&0&1&0&0&1&0\\ 1&1&0&0&0&0&0&1&0&1\\ 0&1&0&0&1&0&1&0&1&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&1\\ 0&1&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 1&0&0&1&0&0&0&1&0&1\\ 1&0&1&0&0&1&1&0&1&1\\ 0&1&0&1&0&0&0&1&0&1\\ 0&0&1&0&1&0&1&1&1&0 \end{bmatrix}$$

11. $$\begin{bmatrix} 0&1&1&1&0&0&0&1&0&0\\ 1&0&1&0&0&1&0&0&1&0\\ 1&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&1&1&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&1&0&0\\ 0&1&0&1&0&0&1&0&1&0\\ 0&0&0&1&0&1&0&1&0&1\\ 1&0&0&0&1&0&1&0&1&0\\ 0&1&0&0&0&1&0&1&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&1&0 \end{bmatrix}$$

12. $$\begin{bmatrix} 0&0&1&0&1&0&1&1&0&0\\ 0&0&1&1&0&1&0&0&1&0\\ 1&1&0&0&0&0&1&0&1&0\\ 0&1&0&0&1&0&1&0&1&0\\ 1&0&0&1&0&0&0&1&0&1\\ 0&1&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 1&0&1&1&0&0&0&1&1&1\\ 1&0&0&0&1&1&1&0&0&0\\ 0&1&1&1&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&1&0&0&0 \end{bmatrix}$$

13. $\begin{bmatrix} 0&0&0&1&1&0&0&1&1&1\\ 0&0&1&0&0&1&1&0&1&0\\ 0&1&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&1&0&1&0&1&0&1&1\\ 1&0&0&1&0&0&0&1&0&1\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&1&0&1&0&0&0&1&0&1\\ 1&0&0&0&1&0&1&0&0&0\\ 1&1&0&1&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&1&0&1&0&0&0 \end{bmatrix}$ **14.** $\begin{bmatrix} 0&0&1&0&1&1&0&0&0&1\\ 0&0&1&0&1&1&1&0&0&0\\ 1&1&0&0&0&0&1&0&1&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&1&0\\ 1&1&0&1&0&0&0&1&1&1\\ 1&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&1&0&0&0&0&1&0&1\\ 0&0&0&0&1&0&1&0&0&0\\ 0&0&1&1&1&0&0&0&0&1\\ 1&0&0&0&1&0&1&0&1&0 \end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix} 0&0&1&1&1&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&1&0&0\\ 1&1&0&0&0&1&1&0&0&0\\ 1&0&0&0&1&1&1&0&1&1\\ 1&0&0&1&0&0&0&0&1&1\\ 1&0&1&1&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&1&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&1&0&0&1&1\\ 0&0&0&1&1&0&0&1&0&1\\ 0&0&0&1&1&0&0&1&1&0 \end{bmatrix}$ **16.** $\begin{bmatrix} 0&0&1&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&1&0&0&1&0&1&1&0\\ 1&1&0&0&0&0&0&1&0&1\\ 0&0&0&0&1&1&1&0&1&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&1&1&1\\ 0&1&0&1&0&0&0&1&1&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&1&0&0\\ 0&1&1&0&1&1&1&0&0&1\\ 0&1&0&1&1&1&0&0&0&0\\ 1&0&1&0&1&0&0&1&0&0 \end{bmatrix}$

17. $\begin{bmatrix} 0&1&0&1&1&0&0&1&0&1\\ 1&0&1&0&0&1&0&0&1&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 1&0&0&0&1&0&1&0&0&0\\ 1&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&1&1&1\\ 1&0&1&0&0&0&1&0&1&0\\ 0&1&0&0&0&1&1&1&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&1&0&0&0 \end{bmatrix}$ **18.** $\begin{bmatrix} 0&1&1&0&0&1&0&1&0&0\\ 1&0&1&0&1&1&0&0&0&0\\ 1&1&0&0&0&0&0&1&0&1\\ 0&0&0&0&1&1&1&0&1&0\\ 0&1&0&1&0&0&0&0&1&1\\ 1&1&0&1&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&1&1&1\\ 1&0&1&0&0&1&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&1&0&1&0&0&1\\ 0&0&1&0&1&0&1&0&1&0 \end{bmatrix}$

19. $\begin{bmatrix} 0&1&0&1&1&0&0&1&1&1\\ 1&0&0&0&0&1&1&0&1&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&1&0&0\\ 1&0&1&0&1&0&1&0&0&0\\ 1&0&0&1&0&0&0&1&0&1\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&1&0&1&0&0&0&1&0&1\\ 1&0&1&0&1&0&1&0&0&0\\ 1&1&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&1&0&1&0&0&0 \end{bmatrix}$ **20**. $\begin{bmatrix} 0&1&1&0&1&1&0&1&0&1\\ 1&0&1&0&1&1&0&0&0&0\\ 1&1&0&0&0&0&1&0&1&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&1&0\\ 1&1&0&1&0&0&0&1&1&1\\ 1&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&1&1&1\\ 1&0&0&0&1&0&1&0&0&0\\ 0&0&1&1&1&0&1&0&0&1\\ 1&0&0&0&1&0&1&0&1&0 \end{bmatrix}$

21. $\begin{bmatrix} 0&0&1&1&1&1&0&1&0&1\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&1&0\\ 1&1&0&0&0&0&1&1&0&0\\ 1&0&0&0&1&1&1&0&0&0\\ 1&0&0&1&0&0&0&0&1&1\\ 1&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&1&0&0&0&0&1&1\\ 1&0&1&0&0&0&0&0&1&1\\ 0&1&0&0&1&0&1&1&0&0\\ 1&0&0&0&1&0&1&1&0&0 \end{bmatrix}$ **22**. $\begin{bmatrix} 0&0&1&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&1&0&0&1&0&1&1&0\\ 1&1&0&0&0&0&0&1&0&1\\ 0&0&0&0&1&1&1&0&1&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&1&0&1\\ 0&1&0&1&0&0&0&1&1&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&1&0&1\\ 0&1&1&0&1&1&1&0&1&0\\ 0&1&0&1&0&1&0&1&0&0\\ 1&0&1&0&1&0&1&0&0&0 \end{bmatrix}$

23. $\begin{bmatrix} 0&0&0&1&1&1&0&1&0&1\\ 0&0&1&0&0&1&0&0&1&1\\ 0&1&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 1&0&0&0&1&1&1&0&0&0\\ 1&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 1&1&0&1&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&1&0&1\\ 1&0&1&0&0&0&1&0&1&0\\ 0&1&0&0&0&1&0&1&0&1\\ 1&1&0&0&0&0&1&0&1&0 \end{bmatrix}$ **24**. $\begin{bmatrix} 0&0&1&0&0&0&1&1&0&0\\ 0&0&1&1&0&1&0&0&1&0\\ 1&1&0&0&0&0&0&1&0&1\\ 0&1&0&0&1&0&1&0&1&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&1\\ 0&1&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 1&0&0&1&0&0&0&1&0&1\\ 1&0&1&0&0&1&1&0&1&1\\ 0&1&0&1&0&0&0&1&0&1\\ 0&0&1&0&1&0&1&1&1&0 \end{bmatrix}$

25. $\begin{bmatrix} 0&1&1&1&0&0&0&1&0&0\\ 1&0&1&0&0&1&0&0&1&0\\ 1&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&1&1&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&1&0&0\\ 0&1&0&1&0&0&1&0&1&0\\ 0&0&0&1&0&1&0&1&0&1\\ 1&0&0&0&1&0&1&0&1&0\\ 0&1&0&0&0&1&0&1&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&1&0 \end{bmatrix}$ **26.** $\begin{bmatrix} 0&0&1&0&1&0&1&1&0&0\\ 0&0&1&1&0&1&0&0&1&0\\ 1&1&0&0&0&0&1&0&1&0\\ 0&1&0&0&1&0&1&0&1&0\\ 1&0&0&1&0&0&0&1&0&1\\ 0&1&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 1&0&1&1&0&0&0&1&1&1\\ 1&0&0&0&1&1&1&0&0&0\\ 0&1&1&1&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&1&0&0&0 \end{bmatrix}$

27. $\begin{bmatrix} 0&0&0&1&1&0&0&1&1&1\\ 0&0&1&0&0&1&1&0&1&0\\ 0&1&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&1&0&1&0&1&0&1&1\\ 1&0&0&1&0&0&0&1&0&1\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&1&0&1&0&0&0&1&0&1\\ 1&0&0&0&1&0&1&0&0&0\\ 1&1&0&1&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&1&0&1&0&0&0 \end{bmatrix}$ **28.** $\begin{bmatrix} 0&0&1&0&1&1&0&0&0&1\\ 0&0&1&0&1&1&1&0&0&0\\ 1&1&0&0&0&0&1&0&1&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&1&0\\ 1&1&0&1&0&0&0&1&1&1\\ 1&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&1&0&0&0&0&1&0&1\\ 0&0&0&0&1&0&1&0&0&0\\ 0&0&1&1&1&0&0&0&0&1\\ 1&0&0&0&1&0&1&0&1&0 \end{bmatrix}$

29. $\begin{bmatrix} 0&0&1&1&1&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&1&0&0\\ 1&1&0&0&0&1&1&0&0&0\\ 1&0&0&0&1&1&1&0&1&1\\ 1&0&0&1&0&0&0&0&1&1\\ 1&0&1&1&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&1&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&1&0&0&1&1\\ 0&0&0&1&1&0&0&1&0&1\\ 0&0&0&1&1&0&0&1&1&0 \end{bmatrix}$ **30.** $\begin{bmatrix} 0&0&1&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&1&0&0&1&0&1&1&0\\ 1&1&0&0&0&0&0&1&0&1\\ 0&0&0&0&1&1&1&0&1&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&1&1&1\\ 0&1&0&1&0&0&0&1&1&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&1&0&0\\ 0&1&1&0&1&1&1&0&0&1\\ 0&1&0&1&1&1&0&0&0&0\\ 1&0&1&0&1&0&0&1&0&0 \end{bmatrix}$

3. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Лабораторная работа № 7

Тема: **Прямые методы решения систем линейных алгебраических уравнений [8, 9, 10, 11].**

Цель: изучение алгоритмов прямых методов решения СЛАУ.

Необходимые теоретические сведения.

К прямым методам решения СЛАУ относятся алгоритмы, которые в предположении, что вычисления ведутся без округлений, позволяют получить точное решение системы за конечное число арифметических действий. Это матричный метод, формулы Крамера, метод Гаусса последовательного исключения неизвестных с различными схемами-модификациями.

Пусть система задана в виде

$$A\vec{x} = \vec{b}, \tag{3.1}$$

где A – заданная матрица размера $n \times n$;

$\vec{b}$ – заданный вектор-столбец с n-координатами;

$\vec{x}$ – вектор с n-координатами, который и подлежит определению.

Если матрица A является невырожденной, то решение системы (3.1) матричным методом можно представить в виде:

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b}, \tag{3.2}$$

где A^{-1} – матрица, обратная к A.

Формулы Крамера для вычисления неизвестных $x_i\,(i = \overline{1,n})$ имеют вид:

$$x_i = \Delta_n^{(i)} / \Delta_n, \ \ (i = \overline{1,n}), \tag{3.3}$$

где $\Delta_n = \det A$, а $\Delta_n^{(i)}$ являются определителями n-го порядка, которые получаются из Δ_n путем замены в нем i-го столбца столбцом $\vec{b}$ свободных членов исходной системы (3.1).

Метод Гаусса (последовательного исключения неизвестных) состоит из прямого хода – приведения системы (3.1) к треугольному виду и обратного хода – последовательного нахождения в обратном порядке неизвестных $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1$ из полученной ранее системы треугольного вида.

Пример. Найти решение системы линейных алгебраических уравнений $\begin{cases} 3{,}1x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + 3{,}5x_2 + x_3 = 4{,}5 \\ x_1 + x_2 + 4{,}1x_3 = 5 \end{cases}$ методом Гаусса с точностью до 10^{-3}. Результат проверить подстановкой.

Решение. Вычисления будем проводить с округлением до пяти знаков после запятой. Используем алгоритм метода Гаусса с выбором главного элемента. Без ограничения общности, для удобства, при записи расширенной матрицы системы переставим местами первую и третью строки:

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4{,}1 & 5 \\ 3{,}1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3{,}5 & 1 & 4{,}5 \end{array}\right).$$

На первом шаге, чтобы исключить x_1 из второго и третьего уравнений, сначала первую строку умножим на –3,1 и сложим со второй строкой, затем первую строку умножим на –1 и сложим с третьей. Получим

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4{,}1 & 5 \\ 0 & -2{,}1 & -11{,}71 & -11{,}5 \\ 0 & 2{,}5 & -3{,}1 & -0{,}5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4{,}1 & 5 \\ 0 & 2{,}1 & 11{,}71 & 11{,}5 \\ 0 & -2{,}5 & 3{,}1 & 0{,}5 \end{array}\right).$$

Вторую строку умножим на 2,5, третью на 2,1; результат запишем в третью строку:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4{,}1 & 5 \\ 0 & 2{,}1 & 11{,}71 & 11{,}5 \\ 0 & 0 & 35{,}785 & 29{,}8 \end{array}\right).$$

Обратный ход метода Гаусса. Из третьей строки $35,785x_3 = 29,8$; $x_3 = 0,83275$. Из второй $2,1x_2 + 11,71 \cdot 0,83275 = 11,5 \Rightarrow x_2 = 0,83262$. Из первой $x_1 + 0,83262 + 4,1 \cdot 0,83275 = 5 \Rightarrow x_1 = 0,75311$. Округляя до четырех знаков, проведем проверку подстановкой:

$$\begin{cases} 3,1 \cdot 0,7530 + 0,8326 + 0,8328 = 3,9997, \\ 0,7530 + 3,5 \cdot 0,8326 + 0,8328 = 4,4999, \\ 0,7530 + 0,8326 + 4,1 \cdot 0,8328 = 5,00008. \end{cases}$$

Абсолютные величины разностей между свободными членами исходной системы и результатами подстановки в уравнения системы найденных значений неизвестных не превосходят 0,0003, т. е. абсолютная погрешность вычислений в данном примере $\Delta \le 0,0005$, что вполне допустимо, а значит, три знака после запятой в записи полученных значений неизвестных являются верными значащими цифрами.

Ответ: $x_1 = 0,753$; $x_2 = 0,833$; $x_1 = 0,833$.

Задания. Исследовать данную систему $A\vec{x} = \vec{b}$. В случае совместности решить матричным методом, по формулам Крамера, методом Гаусса. Вычисления выполнять с точностью до пяти знаков после запятой. Результат проверить подстановкой.

В вариантах 1–15 $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,8 \\ 0,2 \end{pmatrix}$, в вариантах 16–30 $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4,5 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Матрицы A заданы:

1. $\begin{pmatrix} 1,1 & -0,2 & 0,1 \\ -0,1 & 1,1 & -0,1 \\ -0,3 & 0,2 & -0,9 \end{pmatrix}$ **2**. $\begin{pmatrix} 1,2 & -0,2 & 0,1 \\ -0,1 & 1,2 & -0,1 \\ -0,3 & 0,2 & -0,8 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 1,3 & -0,2 & 0,1 \\ -0,1 & 1,3 & -0,1 \\ -0,3 & 0,2 & -0,7 \end{pmatrix}$ **4**. $\begin{pmatrix} 1,4 & -0,2 & 0,1 \\ -0,1 & 1,4 & -0,1 \\ -0,3 & 0,2 & -0,6 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 1,5 & -0,2 & 0,1 \\ -0,1 & 1,5 & -0,1 \\ -0,3 & 0,2 & -0,5 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 1,6 & -0,2 & 0,1 \\ -0,1 & 1,6 & -0,1 \\ -0,3 & 0,2 & -0,4 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 1,7 & -0,2 & 0,1 \\ -0,1 & 1,7 & -0,1 \\ -0,3 & 0,2 & -0,3 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} 1,8 & -0,2 & 0,1 \\ -0,1 & 1,8 & -0,1 \\ -0,3 & 0,2 & -0,2 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} 1,9 & -0,2 & 0,1 \\ -0,1 & 1,9 & -0,1 \\ -0,3 & 0,2 & -0,1 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} 2 & -0,2 & 0,1 \\ -0,1 & 2 & -0,1 \\ -0,3 & 0,2 & 0 \end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix} 2,1 & -0,2 & 0,1 \\ -0,1 & 2,1 & -0,1 \\ -0,3 & 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}$

12. $\begin{pmatrix} 2,2 & -0,2 & 0,1 \\ -0,1 & 2,2 & -0,1 \\ -0,3 & 0,2 & 0,2 \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} 2,3 & -0,2 & 0,1 \\ -0,1 & 2,3 & -0,1 \\ -0,3 & 0,2 & 0,3 \end{pmatrix}$

14. $\begin{pmatrix} 2,4 & -0,2 & 0,1 \\ -0,1 & 2,4 & -0,1 \\ -0,3 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 2,5 & -0,2 & 0,1 \\ -0,1 & 2,5 & -0,1 \\ -0,3 & 0,2 & 0,5 \end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} 2,1 & 1 & 1 \\ 1 & 2,6 & 1 \\ 1 & 1 & 3,1 \end{pmatrix}$

17. $\begin{pmatrix} 2,2 & 1 & 1 \\ 1 & 2,7 & 1 \\ 1 & 1 & 3,2 \end{pmatrix}$

18. $\begin{pmatrix} 2,3 & 1 & 1 \\ 1 & 2,8 & 1 \\ 1 & 1 & 3,3 \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} 2,4 & 1 & 1 \\ 1 & 2,9 & 1 \\ 1 & 1 & 3,4 \end{pmatrix}$

20. $\begin{pmatrix} 2,5 & 1 & 1 \\ 1 & 3,0 & 1 \\ 1 & 1 & 3,5 \end{pmatrix}$

21. $\begin{pmatrix} 2,6 & 1 & 1 \\ 1 & 3,1 & 1 \\ 1 & 1 & 3,6 \end{pmatrix}$

22. $\begin{pmatrix} 2,7 & 1 & 1 \\ 1 & 3,2 & 1 \\ 1 & 1 & 3,7 \end{pmatrix}$

23. $\begin{pmatrix} 2,8 & 1 & 1 \\ 1 & 3,2 & 1 \\ 1 & 1 & 3,8 \end{pmatrix}$ **24**. $\begin{pmatrix} 2,9 & 1 & 1 \\ 1 & 3,3 & 1 \\ 1 & 1 & 3,9 \end{pmatrix}$

25. $\begin{pmatrix} 3,0 & 1 & 1 \\ 1 & 3,4 & 1 \\ 1 & 1 & 4,0 \end{pmatrix}$ **26**. $\begin{pmatrix} 3,1 & 1 & 1 \\ 1 & 3,5 & 1 \\ 1 & 1 & 4,1 \end{pmatrix}$

27. $\begin{pmatrix} 3,2 & 1 & 1 \\ 1 & 3,6 & 1 \\ 1 & 1 & 4,2 \end{pmatrix}$ **28**. $\begin{pmatrix} 3,3 & 1 & 1 \\ 1 & 3,7 & 1 \\ 1 & 1 & 4,3 \end{pmatrix}$

29. $\begin{pmatrix} 3,4 & 1 & 1 \\ 1 & 3,2 & 1 \\ 1 & 1 & 4,3 \end{pmatrix}$ **30**. $\begin{pmatrix} 3,5 & 1 & 1 \\ 1 & 3,3 & 1 \\ 1 & 1 & 4,4 \end{pmatrix}$

Ответы.

№	x_1	x_2	x_3	№	x_1	x_2	x_3
1	0,52148	0,75391	–0,22852	16	0,96980	0,97924	0,98418
2	0,46863	0,68450	–0,25461	17	0,94205	0,95910	0,96839
3	0,42626	0,62590	–0,28957	18	0,91637	0,93960	0,95273
4	0,39201	0,57532	–0,33757	19	0,89248	0,92077	0,93728
5	0,36450	0,53053	–0,40649	20	0,87013	0,90260	0,92208
6	0,34322	0,48941	–0,51271	21	0,84914	0,88506	0,90717
7	0,32908	0,44898	–0,69643	22	0,82937	0,86815	0,89256
8	0,32740	0,40214	–1,08900	23	0,81067	0,85183	0,87829
9	0,37500	0,30882	–2,50740	24	0,79295	0,83609	0,86435
10	–0,13043	0,80435	8,21740	25	0,77612	0,82090	0,85075
11	0,16045	0,46269	1,55600	26	0,76009	0,80623	0,83748
12	1,18011	0,41088	0,85929	27	0,74481	0,79206	0,82455
13	0,18128	0,38152	0,59360	28	0,73020	0,77838	0,81196
14	0,17774	0,35963	0,45349	29	0,71622	0,76515	0,79969
15	0,17265	0,34158	0,36696	30	0,70283	0,75236	0,78774

Лабораторная работа № 8

Тема: **Итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений [8, 9, 10, 11].**

Цель: изучение итерационных методов решения СЛАУ.

Необходимые теоретические сведения.

Итерационные методы дают возможность найти решение системы как предел бесконечного вычислительного процесса, в котором по уже найденным приближениям к решению строится следующее, более точное приближение. Это метод простой итерации, его модификация – метод Зейделя.

Преимуществом итерационных перед точными методами является их самоисправляемость. Если в точных методах ошибка в вычислениях, когда она случайно не компенсируется другими ошибками, неизбежно ведет к ошибкам в результате, то в случае сходящегося итерационного процесса ошибка в каком-то приближении может считаться новым начальным вектором и для ее исправления требуется, как правило, несколько лишних шагов единообразных вычислений.

Метод итераций очень выгоден по сравнению с прямыми методами при решении систем, у которых значительное число коэффициентов равно нулю. Такие системы появляются, например, при решении уравнений в частных производных. В итерационных методах выполняются однообразные операции, и поэтому они сравнительно легко программируются.

3.1. Метод простой одношаговой итерации

Пусть система линейных алгебраических уравнений (3.1) какимлибо образом приведена к виду

$$\vec{x} = C\vec{x} + \vec{f}, \tag{3.4}$$

где C – некоторая матрица;

$\vec{f}$ – вектор-столбец.

Исходя из произвольного вектора $\vec{x}^{(0)} = \left(x_1^{(0)},\ x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)^T$, строим итерационный процесс:

$$\vec{x}^{(k+1)} = C\vec{x}^{(k)} + \vec{f}, \quad (k = 0,\ 1,\ 2, \ldots), \tag{3.5}$$

или в развернутом виде:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = C_{11}x_1^{(k)} + C_{12}x_2^{(k)} + \ldots + C_{1n}x_n^{(k)} + f_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n^{(k+1)} = C_{n1}x_1^{(k)} + C_{n2}x_2^{(k)} + \ldots + C_{nn}x_n^{(k)} + f_n. \end{cases}$$

Начальный вектор $\vec{x}^{(0)}$ может быть выбран произвольно (часто берут $\vec{x}^{(0)} = \vec{f}$), однако наиболее целесообразно в качестве $\vec{x}^{(0)}$ взять приближенное значение, полученное грубой прикидкой.

Если элементы матрицы C удовлетворяют одному из условий:

$$\sum_{j=1}^{n} \left|C_{ij}\right| \le \alpha < 1 \quad (i = 1,\ 2, \ldots, n) \tag{3.6}$$

или

$$\sum_{i=1}^{n} \left|C_{ij}\right| \le \beta < 1 \quad (j = 1,\ 2, \ldots, n), \tag{3.7}$$

то процесс итерации сходится к точному решению $\vec{x}$ при любом начальном векторе $\vec{x}^{(0)}$, то есть

$$\vec{x} = \lim_{k \to \infty} \vec{x}^{(k)}.$$

На практике итерационный процесс заканчивают, когда $\max\limits_{1 \le i \le n} \left|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}\right| \le \varepsilon,$ где ε – заданная точность.

Неравенства (3.6), (3.7) будут выполнены, если диагональные элементы матрицы A удовлетворяют условию

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

то есть, если модули диагональных коэффициентов для каждого уравнения системы больше суммы модулей всех остальных коэффициентов (не считая свободных членов).

Пример. Решить систему

$$\begin{cases} 1{,}02x_1 - 0{,}05x_2 - 0{,}10x_3 = 0{,}795; \\ -0{,}11x_1 + 1{,}03x_2 - 0{,}05x_3 = 0{,}849; \\ -0{,}11x_1 - 0{,}12x_2 + 1{,}04x_3 = 1{,}398, \end{cases}$$

проведя три итерации. Указать погрешность полученного результата.

Решение. Матрица данной системы имеет диагональное преобладание, т. к. диагональные элементы больше (хотя и незначительно) единицы. Поэтому для применения метода простой одношаговой итерации естественно записать исходную систему в виде:

$$\begin{cases} x_1 = 0{,}795 - 0{,}02x_1 + 0{,}05x_2 + 0{,}10x_3; \\ x_2 = 0{,}849 + 0{,}11x_1 - 0{,}03x_2 + 0{,}05x_3; \\ x_3 = 1{,}398 + 0{,}11x_1 + 0{,}12x_2 - 0{,}04x_3. \end{cases}$$

Условия сходимости (3.6) выполнены:

$$\sum_{j=1}^{3} |C_{1j}| = 0{,}02 + 0{,}05 + 0{,}10 = 0{,}17 < 1,$$

$$\sum_{j=1}^{3} |C_{2j}| = 0{,}11 + 0{,}03 + 0{,}05 = 0{,}19 < 1,$$

$$\sum_{j=1}^{3} |C_{3j}| = 0{,}11 + 0{,}12 + 0{,}04 = 0{,}27 < 1.$$

Можно взять в качестве начального вектора $\vec{x}^{(0)}$ столбец свободных членов, округлив его элементы до двух знаков после запятой: $\vec{x}^{(0)} = (0,80; 0,85; 1,40)^T$.

Далее последовательно находим: при $k = 1$

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 0,795 - 0,016 + 0,0425 + 0,140 = 0,9615 \approx 0,962, \\ x_2^{(1)} = 0,849 + 0,088 - 0,0255 + 0,070 = 0,9815 \approx 0,982, \\ x_3^{(1)} = 1,398 + 0,088 + 0,1020 - 0,056 = 1,532; \end{cases}$$

при $k = 2$

$$x_1^{(2)} = 0,97806 \approx 0,978, \;\; x_2^{(2)} = 1,00196 \approx 1,002, \;\; x_3^{(2)} = 1,56038 \approx 1,560;$$

при $k = 3$

$$x_1^{(3)} = 0,980, \;\; x_2^{(3)} = 1,004, \;\; x_3^{(3)} = 1,563.$$

Значения неизвестных при $k = 2$ и $k = 3$ отличаются не более чем на $3 \cdot 10^{-3}$, поэтому если в качестве приближенных значений неизвестных взять $x_1 \approx 0,980$, $x_2 \approx 1,004$, $x_3 \approx 1,563$, то погрешность этих приближенных значений не превысит $1,1 \cdot 10^{-3}$.

Задания.

Методом простой итерации с точностью до $\varepsilon = 10^{-3}$ найти решение системы $A\vec{x} = \vec{b}$, где

$$A = \begin{pmatrix} 24,21+\alpha & 2,42 & 3,85 \\ 2,31 & 31,49 & 1,52 \\ 3,49 & 4,85 & 28,72 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 30,24 \\ 40,95-\beta \\ 42,81 \end{pmatrix}.$$

Результат проверить подстановкой.

Ответы

№	α	β	x_1	x_2	x_3
1	0	0	0,944	1,174	1,178
2	0	0,2	0,945	1,168	1,179
3	0	0,4	0,945	1,161	1,180
4	0	0,6	0,946	1,155	1,181
5	0	0,8	0,946	1,149	1,182
6	0	1	0,947	1,142	1,183
7	0,2	0	0,938	1,175	1,170
8	0,2	0,2	0,938	1,169	1,171
9	0,2	0,4	0,939	1,162	1,172
10	0,2	0,6	0,939	1,159	1,173
11	0,2	0,8	0,940	1,149	1,174
12	0,2	1	0,940	1,143	1,175
13	0,4	0	0,931	1,176	1,163
14	0,4	0,2	0,932	1,170	1,164
15	0,4	0,4	0,932	1,163	1,165
16	0,4	0,6	0,933	1,157	1,168
17	0,4	0,8	0,933	1,150	1,167
18	0,4	1	0,934	1,144	1,168
19	0,6	0	0,925	1,179	1,155
20	0,6	0,2	0,925	1,170	1,156
21	0,6	0,4	0,926	1,164	1,157
22	0,6	0,6	0,926	1,158	1,158
23	0,6	0,8	0,927	1,151	1,158
24	0,6	1	0,927	1,145	1,160

3.2. Метод Зейделя

Метод Зейделя является модификацией метода простой итерации. Он заключается в том, что при вычислении $(k+1)$-го приближения неизвестного x_i при $i>1$ используются уже вычисленные ранее $(k+1)$-е приближения неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}$. Для системы (3.4) вычисления по методу Зейделя ведутся по формулам

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = C_{11}x_1^{(k)} + C_{12}x_2^{(k)} + \ldots + C_{1n}x_n^{(k)} + f_1, \\ x_2^{(k+1)} = C_{21}x_1^{(k+1)} + C_{22}x_2^{(k)} + \ldots + C_{2n}x_n^{(k)} + f_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n^{(k+1)} = C_{n1}x_1^{(k+1)} + C_{n2}x_2^{(k+1)} + \ldots + C_{n,n-1}x_{n-1}^{(k+1)} + C_{nn}x_n^{(k)} + f_n. \end{cases}$$

Условия сходимости для метода простой итерации остаются верными и для метода Зейделя. Рекомендации к применению метода Зейделя остаются теми же, что и для метода простой итерации.

Задания.

Найти решения соответствующих вариантов задач из раздела 3.1 для метода простой одношаговой итерации методом Зейделя. Сравнить скорости сходимости итераций.

Лабораторная работа № 9

Тема: **Интерполирование алгебраическими многочленами. Интерполяционный многочлен Лагранжа [8, 9, 10, 11].**

Цель: изучение построения и применения интерполяционного многочлена Лагранжа.

Необходимые теоретические сведения.

Постановка задачи

Предположим, что при изучении некоторого процесса установлено существование функциональной зависимости между величинами *x* и *y*; при этом функция $y = f(x)$ остается неизвестной, но на основании эксперимента известны ее значения в точках $x_0, x_1, \ldots, x_n$, принадлежащих отрезку $[a,b]$. Естественно попытаться найти такую функцию, которая приближенно представляла бы неизвестную функцию $y = f(x)$ на отрезке $[a,b]$. Часто в качестве приближающих функций берутся многочлены. Многочлены являются функциями простой природы: для вычисления их значений нужно выполнить конечное число арифметических операций, производная и неопределенный интеграл от многочлена сами являются многочленами.

Существуют различные способы приближения функций многочленами. Одним из таких методов является метод интерполяции, который сводится к следующему.

Требуется построить многочлен $L_n(x)$ степени не выше n, который в $n+1$ заданных точках $x_0, x_1, \ldots, x_n$, называемых узлами интерполяции, принимал бы заданные значения $y_0, y_1, \ldots, y_n$, то есть искомый многочлен $L_n(x)$ должен удовлетворять равенствам $L_n(x_i) = y_i$, $i = \overline{0, n}$. В указанной постановке задача интерполирования всегда имеет единственное решение.

3.3. Интерполяционный многочлен Лагранжа

Искомым многочленом является многочлен Лагранжа:

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)\cdot\ldots\cdot(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdot\ldots\cdot(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdot\ldots\cdot(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdot\ldots\cdot(x_k-x_n)}\cdot y_k =$$
$$= y_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdot\ldots\cdot(x_0-x_n)} + y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdot\ldots\cdot(x_1-x_n)} +$$
$$+ y_n\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\cdot\ldots\cdot(x_n-x_{n-1})}.$$

Коэффициенты многочлена Лагранжа имеют степень ровно n, обращаются в 1 при $x = x_k$ и в 0 во всех других узлах $x_i (i \neq k)$.

Интерполяционный многочлен Лагранжа можно записать в более компактной форме, если ввести обозначение:

$$\omega(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_n).$$

Так как

$$\omega'(x) = \sum_{i=0}^{n}(x-x_0)\cdot\ldots\cdot(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x-x_n),$$

а

$$\omega'(x_k) = (x_k-x_0)\cdot\ldots\cdot(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdot\ldots\cdot(x_k-x_n),$$

то

$$L_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x_k)}\cdot y_k.$$

Практическое применение интерполирования состоит в том, что интерполяционные формулы обычно используются при нахождении неизвестных значений $f(x)$ для промежуточных значений аргумента. При этом различают интерполирование в узком смысле, когда x находится между x_0 и x_n, и экстраполирование, когда x находится вне отрезка $[x_0, x_n]$.

В узлах интерполирования значения функции $f(x)$ и интерполяционного многочлена Лагранжа совпадают. Если же значение x не совпадает ни с одним из узлов интерполяции, то возникает вопрос о величине разности $f(x)-L_n(x)=R_n(x)$, то есть о погрешности, которую мы допускаем, заменяя $f(x)$ на $L_n(x)$ в точках, отличных от узлов интерполяции. Справедлива оценка для любых $x\in[a,b]$

$$R_n(x)\le\frac{|\omega(x)|}{(n+1)!}M_{n+1},$$

где $M_{n+1}=\max\limits_{[a,b]}\left|f^{(n+1)}(x)\right|$.

В оценку входит величина M_{n+1}. Вычисление ее на практике бывает сложным или вовсе невозможным, если функция $f(x)$ задана таблично. Трудность этой задачи увеличивается с возрастанием n.

При оценке погрешности результатов должны учитываться как погрешность метода интерполяции (остаточный член), так и погрешности округления при вычислениях.

Пример. Дана таблица значений функции $f(x)$. Найти интерполяционный многочлен Лагранжа наименьшей степени, принимающий в данных точках заданные значения. Провести проверку результата. Найти значение таблично заданной функции $f(x)$ в данной точке x_0, отличной от узлов интерполяции.

x	x_0	x_1	x_2	
	1,45	1,36	1,14	$x_0 = 1{,}25$
y	y_0	y_1	y_2	
	3,14	4,15	5,65	

Решение. Таким многочленом является интерполяционный многочлен Лагранжа второй степени:

$$L_2(x) = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + \\ + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}.$$

Здесь

$$L_2(x) = 3{,}14 \frac{(x-1{,}36)(x-1{,}14)}{(1{,}45-1{,}36)(1{,}45-1{,}14)} + \\ +4{,}15 \frac{(x-1{,}45)(x-1{,}14)}{(1{,}36-1{,}45)(1{,}36-1{,}14)} + 5{,}65 \frac{(x-1{,}45)(x-1{,}36)}{(1{,}14-1{,}45)(1{,}14-1{,}36)} = \\ = -14{,}206581x^2 + 28{,}698273x - 8{,}6031606.$$

Таким образом,

$$L_2(x) = -14{,}206581x^2 + 28{,}698273x - 8{,}6031606.$$

Проведем проверку результата в узлах интерполирования:

$$L_2(1{,}45) = -29{,}869336 + 41{,}612495 - 8{,}6031606 = 3{,}139999,$$

$$L_2(1{,}36) = -26{,}276492 + 39{,}029651 - 8{,}6031606 = 4{,}149999,$$

$$L_2(1{,}14) = -18{,}462872 + 32{,}716031 - 8{,}6031606 = 5{,}649999.$$

Погрешность округления при вычислениях составляет 0,000001.

$$f(1{,}25) \approx L_2(1{,}25) = -14{,}206581 \cdot 1{,}25^2 +$$
$$+\ 28{,}698273 \cdot 1{,}25 - 8{,}6031606 = -22{,}197782 +$$
$$+\ 35{,}872841 - 8{,}6031606 = 5{,}071899 \approx 5{,}07.$$

<u>Задания.</u> Дана таблица значений функции $f(x)$. Построить интерполяционный многочлен Лагранжа $L_2(x)$ и найти значение таблично заданной функции $f(x)$ в данной точке x_0.

Ответы

1	x	0	1,1	2,4	$x_0 = 1{,}5$	$x^2 + 3x + 4;\ 10{,}75$
	y	4	8,51	16,96		
2	x	0	1/6	1/2	$x_0 = 1/3$	$\frac{7}{2}x - 3x^2;\ \frac{5}{6}$
	y	0	1/2	1		
3	x	0	1	8	$x_0 = 1{,}4$	$\frac{1}{28}(-3x^2 + 31x);\ 1{,}34$
	y	0	1	2		
4	x	1	2,1	4,1	$x_0 = 3$	$2x^2 + 3x + 4;\ 31$
	y	9	19,12	49,92		
5	x	1,2	2,2	3,1	$x_0 = 2{,}5$	$x^2 - 5x + 6;\ -025$
	y	1,44	–0,16	0,11		
6	x	1,1	2,3	3,1	$x_0 = 1{,}4$	$4x^2 + 2x + 5;\ 15{,}64$
	y	12,04	30,76	49,64		
7	x	1,3	2,1	4,2	$x_0 = 3{,}2$	$5x^2 + 3x + 1;\ 61{,}8$
	y	13,35	29,35	101,8		
8	x	1,4	2,6	3,4	$x_0 = 1{,}9$	$x^2 + 2x + 1;\ 8{,}41$
	y	5,76	12,96	19,36		
9	x	1,1	2,1	3,3	$x_0 = 2$	$x^2 + 3x + 2;\ 12$
	y	6,51	12,71	22,79		
10	x	1,2	2,4	3,1	$x_0 = 1{,}5$	$x^2 + 4x + 6;\ 14{,}25$
	y	12,24	21,36	28,01		
11	x	1,3	2,5	3	$x_0 = 2$	$2x^2 + 3x + 7;\ 21$
	y	14,28	27,0	34		
12	x	1,0	2,6	3,1	$x_0 = 2{,}1$	$x^2 + 5x + 3;\ 17{,}91$
	y	9,0	22,76	28,1		

13	x	1,1	2,2	3,0	$x_0 = 2$	$x^2 + 7x + 4;\ 22$
	y	12,91	24,24	34		
14	x	1,2	2,5	3,2	$x_0 = 2{,}2$	$x^2 + 6x + 2;\ 20{,}04$
	y	10,64	23,25	31,44		
15	x	1,4	2,1	3,1	$x_0 = 2{,}5$	$3x^2 + x + 5;\ 26{,}25$
	y	12,98	20,33	36,93		
16	x	1,2	2,2	3,0	$x_0 = 2$	$4x^2 + x + 7;\ 25{,}0$
	y	13,96	28,56	46,0		
17	x	1,1	2,0	3,2	$x_0 = 1{,}9$	$5x^2 + x + 6;\ 25{,}95$
	y	13,15	28,0	60,4		
18	x	1,3	1,9	3,1	$x_0 = 2$	$2x^2 + x + 4;\ 14{,}0$
	y	8,68	13,12	26,32		
19	x	1,3	2,1	3,0	$x_0 = 2$	$3x^2 + x + 8;\ 22{,}0$
	y	14,37	23,33	38,0		
20	x	1,1	2,2	2,9	$x_0 = 2{,}1$	$6x^2 + x + 5;\ 33{,}56$
	y	13,36	36,24	58,36		
21	x	1,2	1,9	3,1	$x_0 = 2$	$2x^2 + 2x + 5;\ 17{,}0$
	y	10,28	16,02	30,42		
22	x	1,3	2,0	2,9	$x_0 = 2{,}1$	$3x^2 + 2x + 4;\ 21{,}43$
	y	11,67	20,0	35,03		
23	x	1,1	1,8	3,1	$x_0 = 2$	$4x^2 + x + 2;\ 20{,}0$
	y	7,94	16,76	43,54		
24	x	1,2	2,2	2,9	$x_0 = 2$	$3x^2 + 6x + 5;\ 29{,}0$
	y	16,52	32,72	47,63		
25	x	1,1	1,9	2,9	$x_0 = 2$	$x^2 + 2x + 5;\ 13{,}0$
	y	8,41	12,41	19,21		
26	x	1,3	2,2	3,0	$x_0 = 2{,}1$	$x^2 + 4x + 6;\ 18{,}81$
	y	12,89	19,64	27,0		
27	x	1,4	2,1	3,2	$x_0 = 2$	$2x^2 + 10x + 3;\ 31{,}0$
	y	20,92	32,82	55,48		
28	x	1,0	1,9	2,9	$x_0 = 1{,}8$	$x^2 + 10x + 5;\ 26{,}24$
	y	16,0	27,61	42,41		
29	x	1,2	1,9	3,2	$x_0 = 2$	$3x^2 + 10x + 4;\ 26{,}0$
	y	20,32	33,83	66,72		
30	x	1,1	2,2	2,9	$x_0 = 2{,}1$	$4x^2 + 6x - 2;\ 17{,}74$
	y	3,94	19,56	34,54		

Лабораторная работа № 10

Тема: **Итерационный многочлен Ньютона [8, 9, 10, 11].**

Цель: изучение построения и применения интерполяционного многочлена Ньютона.

Необходимые теоретические сведения.

3.4. Конечные разности

Пусть даны равноотстоящие точки $x_0, x_1 = x_0 + h,\ \ x_2 = x_0 + 2h, ...,$ $x_n = x_0 + nh,$ где $h = \text{const} > 0,$ и заданы соответствующие значения функции $y = f(x): y_0,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n.$

Определение. Разность $y_{k+1} - y_k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$ называется ***конечной разностью первого порядка*** и обозначается $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k.$

Отсюда, в частности, $\Delta y_0 = y_1 - y_0,$ $\Delta y_1 = y_2 - y_1.$ Разности второго порядка определяются $\Delta^2 y_k = \Delta y_{k+1} - \Delta y_k,$ третьего $\Delta^3 y_k =$ $= \Delta^2 y_{k+1} - \Delta^2 y_k,$ разность m-го порядка определяется как разность разностей $(m-1)$ -го порядка:

$$\Delta^m y_k = \Delta^{m-1} y_{k+1} - \Delta^{m-1} y_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Для вычисления разностей удобно использовать горизонтальную таблицу. Например, при $n = 4$

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
x_0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	$\Delta^4 y_0$
x_1	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$	
x_2	y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_3$		
x_3	y_3	Δy_3			
x_4	y_4				

В каждой строке таблицы расположены разности с одним и тем же индексом внизу.

Пример. Составить таблицу разностей для функции $y = x^2$ на интервале $[0;5]$ с постоянным шагом $h = 1$.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0	0	1	2	0
1	1	3	2	0
2	4	5	2	0
3	9	7	2	
4	16	9		
5	25			

Из таблицы видим, что для функции $y = x^2$ разность второго порядка постоянна: $\Delta^2 y_0 = \Delta^2 y_1 = \Delta^2 y_2 = \Delta^2 y_3 = 2$.

Можно доказать, что для многочлена n-й степени $P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$ разность n-го порядка постоянна и равна $a_0 \cdot h^n \cdot n!$. В этом примере $\Delta^2 y_k = 1 \cdot 1^n \cdot 2! = 2$ при всех k.

Конечные разности могут быть выражены через значения функции:

$$\Delta y_n = y_{n+1} - y_n, \quad \Delta^2 y_n = \Delta y_{n+1} - \Delta y_n =$$
$$= (y_{n+2} - y_{n-1}) - (y_{n+1} - y_n) = y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n.$$

Аналогично $\Delta^3 y_n = y_{n+3} - 3y_{n+2} + 3y_{n+1} - y_n$. По индукции $\Delta^k y_n = y_{n+k} - C_k^1 y_{n+k-1} + C_k^2 y_{n+k-2} - C_n^k y_{n+k-3} + \ldots + (-1)^k y_n$ или $\Delta^k y_n = \sum\limits_{i=0}^{k} (-1)^i C_k^i y_{n+k-i}$.

3.5. Первая интерполяционная формула Ньютона (для интерполирования вперед)

Теорема. Пусть даны $(n+1)$ равностоящих узла интерполирования $x_0,\ x_1 = x_0 + h,\ x_2 = x_0 + 2h, \ldots, x_n = x_0 + nh\ (h > 0)$ и соответствующие значения функции $y_0, y_1, y_2, ..., y_n$. Тогда интерполяционный многочлен степени не выше n может быть записан в виде

$$N(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1) + ... + \\ + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_0)(x - x_1)\cdot ... \cdot(x - x_{n-1}) = \\ = y_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\Delta^k y_0}{k!h^k} \prod_{i=0}^{k-1}(x - x_i). \tag{3.8}$$

Интерполяционный многочлен Ньютона $N(x)$ обычно записывают в другой форме, более удобной для практики. Введем вспомогательную переменную $q = \frac{x - x_0}{h}$.

$$N(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + ... + \\ + \frac{q(q-1)...(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0. \tag{3.9}$$

В формуле используется верхняя горизонтальная строка таблицы конечных разностей. Формулы (3.8) и (3.9) называются ***интерполяционными многочленами*** **для интерполирования вперед**. Слово «вперед» означает, что при вычислении $\Delta^k y_0$ надо привлекать числа $y_0, y_1, y_2, ..., y_k, ...,$ т. е. идти по таблице «вперед». Формула (3.9) применяется для интерполирования и экстраполирования в точках x, близких к началу таблицы.

При составлении $N(x)$ число n мы задаем сами, учитывая, что n не может быть больше числа значения функции y, уменьшенного на единицу. На практике обычно число n выбирают так, чтобы разности $\Delta^n y_n$ были практически постоянными.

При $n = 1$ и $n = 2$ из формулы (3.9) получаем частные случаи: линейная интерполяция

$$y(x) = y_0 + q\Delta y_0,$$

квадратичная интерполяция

$$y(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0. \qquad (3.10)$$

Остаточный член формулы (3.9) имеет вид

$$R_n(x) = h^{n+1}\frac{q(q-1)\cdot\ldots\cdot(q-n)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi),$$

где ξ – некоторая внутренняя точка наименьшего промежутка, содержащего все узлы $x_i\ (i = 0, 1, \ldots, n)$ и точку x.

Пример. Используя таблицу значений функции $y = \mathrm{e}^x$, по формуле квадратичной интерполяции вычислить $y = \mathrm{e}^{3,62}$ и $y = \mathrm{e}^{3,58}$.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$
3,60	36,598	1,877	0,095
3,65	38,475	1,972	0,102
3,70	40,447	2,074	
3,75	42,521		

Решение. Вычисляем разности до второго порядка. Для $x = 3,62$ находим $q = \dfrac{3,62 - 3,60}{0,05} = 0,4$ и вычисляем по формуле (3.10):

$$\mathrm{e}^{3,62} = 36,598 + 0,4\cdot 1,877 - \frac{0,4\cdot 0,6}{2}\cdot 0,095 = 37,338.$$

Остаточный член при $n = 2$ имеет вид $R_2(x) = h^3\dfrac{q(q-1)(q-2)}{3!}f'''(\xi)$.

Так как $f'''(x) = \mathrm{e}^x$ и $3,60 < \xi < 3,70$, получаем:

$$\left|R_2(3,62)\right| < (0,05)^3\frac{0,4\cdot 0,6\cdot 1,6}{6}\mathrm{e}^{3,70} \approx 0,3\cdot 10^{-3},$$

т. е. в ответе можем считать все цифры верными.

Для $x = 3,58$ находим $q = \dfrac{-0,02}{0,05} = -0,4$ и по формуле (3.10)

$$e^{3,58} = 36,598 - 0,4 \cdot 1,877 + \frac{0,4 \cdot 1,4}{2} \cdot 0,095 = 35,874.$$

Для оценки остаточного члена имеем $3,58 < \xi < 3,70,$ поэтому

$$\left| R_3 \left(3,58 \right) \right| < \left(0,05 \right)^2 \frac{0,4 \cdot 1,4 \cdot 2,4}{6} e^{3,70} \approx 10^{-3}.$$

Сравнивая остаточные члены при $x = 3,62$ и $x = 3,58,$ замечаем, что экстраполяция при $x = 3,58$ дает менее точный результат.

3.6. Вторая интерполяционная формула Ньютона (для интерполирования назад)

$$\begin{gathered} N(x) = y_n + q\Delta y_{n-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \cdots + \\ + \frac{q(q+1)\cdot(q+n-1)}{n!}\Delta^n y_0, \end{gathered} \tag{3.11}$$

где $q = \dfrac{x - x_n}{h}.$

В формуле используется нижняя наклонная строка разностей. Остаточный член формулы (3.11) имеет вид:

$$R_n(x) = h^{n+1} \frac{q(q+1)\cdot\ldots\cdot(q+n)}{(n+1)!} f_{(\zeta)}^{(n+1)}, \tag{3.12}$$

где ζ – внутренняя точка наименьшего промежутка, содержащего все узлы $x_i (i = \overline{0,n})$ и точку x.

Формула (3.12) используется для интерполирования и экстраполирования в точках x, близких к концу таблицы, т. е. к x_n.

Пример. Используя таблицу значений функции $y = \sin x$, найти $\sin 54°$ и указать погрешность результата.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
30°	0,5000	0,0736	–0,0044	–0,0005
35°	0,5736	0,0692	–0,0049	–0,0005
40°	0,6428	0,0643	–0,0054	–0,0003
45°	0,7071	0,0589	–0,0057	
50°	0,7660	0,0532		
55°	0,8192			

Решение. Составив таблицу разностей, видим, что третьи разности практически постоянны. Поэтому в формуле (3.11) достаточно взять четыре члена. Для вычисления $\sin 54°$ имеем $q = \dfrac{54° - 55°}{5°} = -0,2.$ По формуле (3.11)

$$\sin 54° = 0,8192 + (-0,2) \cdot 0,0532 - \frac{(-0,2) \cdot 0,8}{2} 0,0057 -$$
$$- \frac{(-0,2) \cdot 0,8 \cdot 1,8}{2} \cdot 0,0003 = 0,80903.$$

Остаточный член при $n = 3$ имеет вид (формула (3.12)):

$$R_n(x) = h^4 \frac{q(q+1)(q+2)(q+3)}{4!} f^4(\xi).$$

Здесь $h = 5° = 0,0873, q = -0,2, f^{(4)}(\xi) = \sin \xi \le 1.$ Поэтому $R_3(54° \le \quad \le (0,087)^4 \dfrac{0,2 \cdot 0,8 \cdot 1,8 \cdot 2,8}{24} \approx 0,2 \cdot 10^{-5}$, т. е. остаточный член может повлиять только на пятый десятичный знак. Поэтому окончательный результат записываем в виде $\sin 54° = 0,8090.$ Полученное значение полностью совпадает с табличным.

Задания. Функции $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$ заданы таблицами:

x	$f(x)$
1,50	0,51183
1,51	0,50624
1,52	0,50064
1,53	0,49503
1,54	0,48940
1,55	0,48376
1,56	0,47811
1,57	0,47245
1,58	0,46678
1,59	0,46110
1,60	0,45540

x	$g(x)$
1,0	0,5652
1,1	0,6375
1,2	0,7147
1,3	0,7973
1,4	0,8861
1,5	0,9817
1,6	1,0848
1,7	1,1964
1,8	1,3172
1,9	1,4482
2,0	1,5906

x	$h(x)$
0,00	0,28081
0,05	0,31270
0,10	0,34549
0,15	0,37904
0,20	0,41318
0,25	0,44774
0,30	0,48255
0,35	0,51745
0,40	0,55226
0,45	0,58682
0,50	0,62096

Пользуясь первой или второй интерполяционными формулами, найти значения этих функций для указанных значений аргумента.

Для функции $f(x)$:

1. 1,50911 2. 1,50820 3. 1,50253 4. 1,50192
5. 1,59513 6. 1,59575 7. 1,59614 8. 1,59728

Для функции $q(x)$:

9. 1,0113 10. 1,0219 11. 1,0321 12. 1,0428
13. 1,9592 14. 1,9675 15. 1,9728 16. 1,9819

Для функции $h(x)$:

17. 0,01928 18. 0,01392 19. 0,02475 20. 0,02713
21. 0,47113 22. 0,47531 23. 0,48398 24. 0,48675

Ответы.

1. 0,50674 2. 0,50725 3. 0,51043 4. 0,51077
5. 0,45818 6. 0,45783 7. 0,45761 8. 0,45696
9. 0,5732 10. 0,5807 11. 0,5880 12. 0,5956
13. 1,5313 14. 1,5433 15. 1,5510 16. 1,5642
17. 0,29504 18. 0,29261 19. 0,29780 20. 0,29907
21. 0,60127 22. 0,60412 23. 0,61001 24. 0,61190

Лабораторная работа № 11

Тема: **Интерполирование сплайнами [8, 9, 10, 11].**

Цель: научиться строить сплайны и применять их.

Необходимые теоретические сведения.

Увеличение степени интерполяционного многочлена далеко не всегда приводит к улучшению приближенного представления функции на всем отрезке $[a,b]$. Часто выгоднее разбить отрезок $[a,b]$ на части и приближать $y=f(x)$ на частях отрезка интерполяционными многочленами невысоких степеней. Такое интерполирование может быть названо сглаженным кусочным интерполированием, но его часто называют сплайн-интерполированием, используя английский термин. Сплайном называется гибкая деревянная рейка, которая позволяет плавно соединять дуги разных кривых и по своей роли аналогичная лекалу.

Пусть функция $y=f(x)$ определена на отрезке $[a,b]$ и известны ее значения $y_0, y_1, \ldots, y_n$ в системе узлов $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b.$ Назовем функцию $S_m(x)$ интерполяционным сплайном порядка m для $f(x),$ если выполнены следующие условия:

1) $S_m(x)$ является многочленом степени m на каждом из отрезков $[x_{n-1}, x_n]$;

2) $S_m(x)=y_k, \quad k=0, 1, \ldots, n;$

3) на всем отрезке $[a,b]$ $S_m(x)$ имеет непрерывные производные до порядка $m-1$:

$$S_m^{(k)}[x_{n-1},x_n]=S_m^{(k)}[x_n,x_{n+1}], \quad k=1, 2, \ldots, m-1,$$

то есть в узлах интерполирования должны совпадать как значения самих $S_m(x)$ слева и справа, так и их производных до порядка $m-1.$

Если $m\geq 2,$ то для единственности $S_m(x)$ следует задать дополнительно еще $m-1$ условий, которые обычно задаются на концах отрезка $[a,b]$, либо произвольно, либо из дополнительной информации о поведении $f(x)$.

При $m=1$ получается известный метод ломаных.

При $m=2$ функция $y=f(x)$ аппроксимируется кусочно-квадратичными полиномами. Для простоты проиллюстрируем построение $S_2(x)$ в случае $n=3$. Определим $f(x)=S_2^i(x),\ i=1,2.$

$$S_2^{(1)}(x)=a_1x^2+b_1x+c_1;$$

$$S_2^{(2)}(x)=a_2x^2+b_2x+c_2.$$

Чтобы функция $f(x)$ была непрерывна и принимала в узлах заданные значения y_i, $i=1, 2, 3,$ необходимо, чтобы

$$S_2^{(1)}(x_1)=y_1,\ S_2^{(1)}(x_2)=y_2,\ S_2^{(2)}(x_2)=y_2,\ S_2^{(2)}(x_3)=y_3. \quad (3.13)$$

Если функция $f(x)$ дифференцируема в узлах, необходимо, чтобы

$$\left(S_2^{(1)}(x_2)\right)'=\left(S_2^{(2)}(x_2)\right)'. \quad (3.14)$$

Функция $f(x)$ определяется шестью коэффициентами полиномов $S_2^{(1)}(x)$ и $S_2^{(2)}(x)$. Равенства (3.13), (3.14) дают пять уравнений. Для однозначного определения $f(x)$ обычно указывается значение $f'(x)$ в некотором узле, например

$$\left(S_2^{(1)}(x_1)\right)'=d_1, \quad (3.15)$$

где d_1 – некоторое заданное значение.

Уравнения (3.13)–(3.15) представляют собой систему шести линейных уравнений относительно коэффициентов полиномов $S_2^i(x),\ i=1, 2,$ которая может быть решена методом исключения Гаусса.

Этот подход легко распространяется на произвольное число узлов.

При $m=3$ получаем кубический сплайн. На каждом отрезке $[x_i,\ x_{i+1}]$, $i=1, 2, \ldots, n-1$, функция $S_3^i(x)$ представляется в виде

$$S_3^i(x)=a_i x^3+b_i x^2+c_i x+d_i,\ i=1,2. \tag{3.16}$$

В случае задачи интерполирования или аппроксимации должны выполняться соотношения в узлах

$$S_3^i(x_i)=y_i,\ i=1,2. \tag{3.17}$$

Это три уравнения. Кроме того

$$\begin{gathered} S_3^{i-1}(x_2)=S_3^i(x_2), \left(S_3^{i-1}(x_2)\right)'=\left(S_3^i(x_2)\right)', \\ \left(S_3^{i-1}(x_2)\right)''=\left(S_3^i(x_2)\right)''. \end{gathered} \tag{3.18}$$

Это еще три уравнения. Для однозначного построения $S_3(x)$ нужно определить 8 коэффициентов в (3.16). Еще два недостающих уравнения для так называемого естественного кубического сплайна задаются так:

$$\left(S_3(x_1)\right)''=\left(S_3(x_n)\right)''=0. \tag{3.19}$$

Сплайн $S_3(x)$ можно построить, решив линейную систему уравнений (3.17)–(3.19) относительно неизвестных коэффициентов в (3.16).

На практике используется другой подход. Строят трехдиагональную систему уравнений для значений вторых производных $S_3''(x)$ в узлах сетки. Саму функцию $S_3(x)$ определяют затем с помощью интегрирования. Введем обозначения

$$y_i=S_3^i(x_i)=S_3^{i-1}(x_i), \quad y_i'=\left(S_3^i(x_i)\right)'=\left(S_3^{i-1}(x_i)\right)',$$

$$y_i'' = \left(S_3^i(x_i)\right)'' = \left(S_3^{i-1}(x_i)\right)'',$$

в которых учтены условия (3.17) и (3.18).

В общем виде для неравномерного шага разбиения отрезка $[a,b]$ h_i и произвольного n для нахождения y_i'' получается система $n-2$ линейных уравнений с $n-2$ неизвестными $y_2'', \ldots, y_{n-1}''$, кроме того $y_1'', \ldots, y_n'' = 0$ из (3.19):

$$y_{i-1}''h_{i-1} + 2y_i''(h_i + h_{i-1}) + y_{i+1}''h_i = 6\left[\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}}\right], \qquad (3.20)$$

$$i = 2, 3, \ldots, n-1.$$

Система легко решается методом исключения Гаусса.

После того как значения y_i'' найдены и так как нам известны величины y_i, значения первых производных в узлах сетки можно определить по формуле

$$y_i' = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - y_{i+1}''\frac{h_i}{6} - y_i''\frac{h_i}{3}, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1. \qquad (3.21)$$

Выражения для самих $S_3^i(x)$ можно получить из формулы

$$S_3^i(x) = y_i + y_i'(x - x_i) + y_i''\frac{(x - x_i)^2}{2} + (y_{i+1}'' - y_i'')\frac{(x - x_i)^3}{6h_i}, \qquad (3.22)$$

$$i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

В частном случае при $n = 3$, $h_i = h$ формулы (3.20)–(3.22) значительно упрощаются: (3.23)–(3.25) соответственно:

$$\begin{cases} y_1'' = y_3'' = 0, \\ y_2'' = \dfrac{3}{2h^2}(y_3 - 2y_2 + y_1). \end{cases} \qquad (3.23)$$

$$\begin{cases} y_1' = \dfrac{y_2 - y_1}{h} - y_2'' \dfrac{h}{6}, \\ y_2' = \dfrac{y_3 - y_2}{h} - y_2'' \dfrac{h}{3}. \end{cases} \qquad (3.24)$$

$$\begin{cases} S_3^1(x) = y_1 + y_1'(x - x_1) + y_2'' \dfrac{(x - x_1)^3}{6h}, \\ S_3^2(x) = y_2 + y_2'(x - x_2) + y_2'' \dfrac{(x - x_2)^2}{2} - y_2'' \dfrac{(x - x_2)^3}{6h}. \end{cases} \qquad (3.25)$$

Если требуется вычислить $S_3(x)$ при некотором конкретном значении x_0, то сначала необходимо определить отрезок $[x_i, x_{i+1}]$, в котором лежит точка x_0, и затем подставить x_0 в выражение для соответствующего полинома $S_3^i(x)$.

Пример. Функция $y = f(x)$ задана таблицей

x	0	2	4
y	1,5	2,3	3,4

Построить интерполяционные сплайны: 1) первого; 2) второго; 3) третьего порядка; сделать проверку результата. Вычислить значение $f(x)$ при $x_0 = 1$.

Решение. 1) $S_1(x) = \begin{cases} S_1^{(1)}(x) = a_1 x + b_1, \\ S_1^{(2)}(x) = a_2 x + b_2. \end{cases}$

Должны выполняться соотношения:

$$S_1^1(0) = 1{,}5;\ S_1^1(2) = 2{,}3;\ S_1^2(2) = 2{,}3;\ S_2^2(4) = 3{,}4.$$

Отсюда

$$\begin{cases} b_1 = 1{,}5, \\ 2a_1 + 1{,}5 = 2{,}3, \\ 2a_2 + b_2 = 2{,}3, \\ 4a_2 + b_2 = 3{,}4. \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} b_1 = 1{,}5, \\ a_1 = 0{,}4, \\ 2a_2 = 1, \\ b_2 = 1{,}2. \end{array}$$

Таким образом:

$$S_1(x)=\begin{cases} S_1^{(1)}(x)=0,4x+1,5, & 0\le x\le 2,\\ S_1^{(2)}(x)=0,55x+1,2, & 2\le x\le 4.\end{cases}$$

Проверка:

$$S_1(0)=1,5;\ S_1^1(2)=2,3;\ S_1^2(2)=2,3;\ S_1^2(4)=3,4.$$

Так как $x_0=1\in\left[0;2\right)$ $\quad S_1(1)=S_1^1(1)=0,4+1,5=1,9.$

2) $\begin{cases} S_2^{(1)}(x)=a_1x^2+b_1x+c_1,\\ S_2^{(2)}(x)=a_2x^2+b_2x+c_2;\end{cases}$ $\quad \begin{cases} \left(S_2^{(1)}(x)\right)'=2a_1x+b_1,\\ \left(S_2^{(2)}(x)\right)'=2a_2x+b_2.\end{cases}$

Для построения кусочно-квадратичного полинома должны выполняться соотношения:

$$S_2^1(0)=1,5;\ S_2^1(2)=2,3;\ S_2^2(2)=2,3;\ S_2^2(4)=3,4;\ \left(S_2^1(2)\right)'=\left(S_2^2(2)\right)'.$$

Добавим еще одно соотношение: $\left(S_2^1(0)\right)'=0.$ Отсюда

$$\begin{cases} c_1=1,5\,,\\ 4a_1+2b_1+1,5=2,3,\\ 4a_2+2b_2+c_2=2,3,\\ 16a_2+4b_2+c_2=3,4,\\ 4a_1+b_1=4a_2+b_2\,,\\ b_1=0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a_1=0,2,\\ b_1=0,\\ c_1=1,5,\\ 4a_2+b_2=0,8,\\ 4a_2+2b_2+c_2=2,3,\\ 16a_2+4b_2+c_2=3,4.\end{cases}$$

Решая методом исключения Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 0 & 0,8\\ 4 & 2 & 1 & 2,3\\ 16 & 4 & 1 & 3,4\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 0 & 0,8\\ 0 & 1 & 1 & 1,5\\ 0 & 0 & 1 & 0,2\end{array}\right)\Rightarrow \begin{array}{l} c_2=0,2;\,b_2=1,3;\\ 4a_2+1,3=0,8\Rightarrow a_2=-0,125.\end{array}$$

Таким образом:

$$S_2(x)=\begin{cases}0,2x^2+1,5, & 0\le x\le 2,\\ -0,125x^2+1,3x+0,2, & 2\le x\le 4.\end{cases}$$

Проверка:

$$S_2(0)=1,5;\ S_2^1(2)=2,3;\ S_2^2(2)=2,3;\ S_2^2(4)=3,4;$$

$$\left(S_2^1(2)\right)'=2\cdot 0,2\cdot 2=0,8=\left(S_2^2(2)\right)'=-2\cdot 0,125\cdot 2+1,3=0,8;$$

$\left(S_2^1(0)\right)'=0.$ Подставим $x_0=1$ $S_2(1)=0,2\cdot 1^2+1,5=1,7.$

3) Здесь $n=3;$ в формулах (3.23) $h=2;\ y_1=1,5;\ y_2=2,3;\ y_3=3,4.$ Из формулы (3.23)

$$\begin{cases}y_1''=y_3''=0;\\ y_2''=\dfrac{3}{2\cdot 2^2}(3,4-2\cdot 2,3+1,5)=0,1125.\end{cases}$$

Из формулы (3.24)

$$\begin{cases}y_1'=\dfrac{2,3-1,5}{2}-0,1125\cdot\dfrac{2}{6}=0,4-0,0375=0,3625;\\ y_2'=\dfrac{3,4-2,3}{2}-0,1125\cdot\dfrac{2}{3}=0,55-0,075=0,475.\end{cases}$$

Из формулы (3.25)

$$S_3(x)=\begin{cases}S_3^{(1)}(x)=1,5+0,3625x+\dfrac{0,1125}{12}x^3, \quad 0\le x\le 2,\\ S_3^{(2)}(x)=2,3+0,475(x-2)+0,1125\cdot\dfrac{(x-2)^2}{2}-\\ \qquad -\dfrac{0,1125}{12}(x-2)^3, \quad 2\le x\le 4.\end{cases}$$

Проверка:

$$S_3^1(0)=1,5;\ S_3^1(2)=1,5+0,725+0,075=2,3;\ S_3^2(2)=2,3;$$

$$S_3^2(4)=2,3+0,95+0,225-0,075=3,4;$$

$$\left(S_3^1(2)\right)'=\left(S_3^2(2)\right)'=0,475;$$

$$\left(S_3^1(x)\right)''=\frac{0,1125}{2}\cdot x\Rightarrow\left(S_3^1(2)\right)''=0,1125;$$

$$\left(S_3^2(x)\right)''=0,1125-\frac{0,1125}{2}(x-2)\Rightarrow\left(S_3^2(2)\right)''=0,1125.$$

Для вычисления значения $S_3(x)$ в точке $x_0=1$ заметим, что $0<1<2$ и используем для вычисления полином $S_3^1(x)$.

$$S_3^1(1)=1,5+0,3625+\frac{0,1125}{12}=1,8719.$$

<u>Задания.</u>

Построить интерполяционные сплайны: 1) первого; 2) второго; 3) третьего порядка; выполнить проверку результата. Найти значение в точке x_0.

Таблица 1

№	x_i	0	1	2	x_0
1	y_i	1,2	2,6	3,0	1,5
2	y_i	1,1	1,9	3,1	0,2
3	y_i	1,2	1,8	3,2	0,9
4	y_i	1,1	2,3	4,3	1,6

Окончание табл. 1

№	x_i	0	1	2	x_0
5	y_i	1,4	2,1	3,4	1,9
6	y_i	1,0	2,5	3,0	0,3
7	y_i	1,6	2,0	3,6	1,1
8	y_i	1,7	0,7	3,7	0,4
9	y_i	1,8	0,8	3,8	1,3
10	y_i	1,9	0,9	3,9	0,5
11	y_i	2,0	3,2	4,0	0,7
12	y_i	2,1	3,4	4,1	1,2
13	y_i	2,2	3,8	4,2	0,6
14	y_i	2,3	0,3	4,3	1,4
15	y_i	2,4	2,8	4,4	1,7
16	y_i	2,5	0,5	4,5	0,8
17	y_i	2,6	0,6	4,6	0,1
18	y_i	2,7	0,7	4,7	1,8
19	y_i	2,8	0,8	4,8	0,1
20	y_i	2,9	1,9	4,9	0,4
21	y_i	3,0	4,2	5,0	1,9
22	y_i	3,1	1,3	5,1	0,2
23	y_i	3,2	2,2	5,2	1,2
24	y_i	3,3	2,3	5,3	0,3
25	y_i	3,4	4,0	5,4	1,3
26	y_i	3,5	4,0	5,5	0,5
27	y_i	3,6	0,6	5,6	1,5
28	y_i	3,7	0,7	5,7	0,8
29	y_i	3,8	1,8	5,8	1,8
30	y_i	3,9	1,9	5,9	1,6

Лабораторная работа № 12

Тема: **Численное интегрирование [8, 9, 10, 11].**

Цель: изучить численные методы нахождения определенных интегралов.

Необходимые теоретические сведения.

В некоторых случаях, когда невозможно найти первообразную от заданной функции $f(x)$ (ее нельзя выразить через элементарные функции) или $f(x)$ задана таблично (или графически), определенный интеграл вычисляется приближенно.

Рассмотрим несколько основных методов решения этой задачи.

3.7. Метод средних прямоугольников

Пусть требуется вычислить интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$, где $f(x)$ – непрерывная функция. Пусть для простоты $f(x)\geq 0$. Как известно, геометрический смысл определенного интеграла состоит в том, что он выражает площадь криволинейной трапеции. Разобьем отрезок $[a, b]$ на n равных частичных отрезков точками $x_i = a + \frac{b-a}{n}i$, $i = 1, 2, ..., n-1$. Величину $h = \frac{b-a}{n}$ назовем шагом разбиения. На каждом частичном отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ выберем середину – точку $C_k = \frac{x_{i-1}+x_i}{2}$ и вычислим $f(C_k) = \overline{y}_k$. Тогда площадь криволинейной трапеции приближенно равна сумме площадей всех n прямоугольников:

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx h\left(\overline{y}_1 + \overline{y}_2 + ... + \overline{y}_n\right) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right). \quad (3.26)$$

Формула (3.26) называется формулой средних прямоугольников. Абсолютная погрешность приближенного равенства (3.26) оценивается формулой

$$\left|R_n\right| \le \frac{(b-a)^3}{24n^2} \cdot M_2, \tag{3.27}$$

где M_2 – наибольшее значение $\left|f^n(x)\right|$ на отрезке $[a, b]$.

Пример 1. Вычислить $\int\limits_0^2 x^3 dx$ по формуле средних прямоугольников, разбив отрезок интегрирования $[0,2]$ на 4 части.

Решение.

$$a = x_0 = 0;\ b = x_4 = 2;\ h = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{4} = \frac{1}{2};\ f(x) = x^3;\ x_0 = 0;$$

$$x_1 = \frac{1}{2};\ x_2 = 1;\ x_3 = \frac{3}{2};\ x_4 = 2.$$

По формуле (3.26):

$$C_1 = \frac{1}{4},\ \overline{y}_1 = \frac{1}{64};\ C_2 = \frac{3}{4},\ \overline{y}_2 = \frac{27}{64};\ C_3 = \frac{5}{4},\ \overline{y}_3 = \frac{125}{4};$$

$$C_4 = \frac{7}{4},\ \overline{y}_4 = \frac{343}{6};\ \int\limits_0^2 x^3 dx \approx \frac{1}{2}\left(\frac{1}{64} + \frac{27}{64} + \frac{125}{4} + \frac{343}{6}\right) \approx 3{,}875.$$

Оценка погрешности по формуле (3.27) дает

$$f'(x) = 3x^2;\ f''(x) = 6x;\ M_2 = 12;\ \left|R_n\right| \le \frac{(2-0)^3}{24 \cdot 4^2} \cdot 12 = 0{,}25.$$

Точное значение интеграла $\int\limits_0^2 x^3 \mathrm{d}x = \left.\frac{x^4}{4}\right|_0^2 = 4.$

3.8. Формула трапеций

На каждом частичном отрезке криволинейная трапеция заменяется обычной. Тогда площадь всей криволинейной трапеции приближенно равна сумме площадей обычных трапеций с основаниями y_i, y_{i+1} и высотой $h = \dfrac{b-a}{n}$:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx h\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}\right). \qquad (3.28)$$

Для погрешности формулы (3.28) справедлива оценка

$$|R_n| \le \frac{(b-a)^3}{12n^2} \cdot M_2, \qquad (3.29)$$

где $|f''(x)| \le M_2$ при $a \le x \le b$.

Пример 2. Вычислить интеграл примера 1 по формуле трапеций.

Решение. По формуле (3.28) $\int_0^2 x^3\mathrm{d}x \approx \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{0+8}{2} + \dfrac{1}{8} + 1 + \dfrac{27}{8}\right) \approx 4{,}25.$

По формуле (3.29) $|R_n| \le \dfrac{(2-0)^3}{12 \cdot 4^2} \cdot 12 = 0{,}5.$

3.9. Формула Симпсона (метод параболических трапеций)

В формуле Симпсона заменяют график функции $y = f(x)$ на каждом отрезке разбиения не отрезками прямых, как в формулах прямоугольников и трапеций, а дугами парабол. Отрезок $[a, b]$ разбивают на $2n$ равных частей длиной $h = \dfrac{b-a}{2n}$ в точках деления вычисляют значения подынтегральной функции $f(x)$: $y_0, y_1, y_2, \ldots,$ $y_{2n-2}, y_{2n-1}, y_{2n}$. В итоге:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{6n}((y_0+y_{2n})+4(y_1+y_3+...+y_{2n-1})+ \\ +2(y_2+y_4+...+y_{2n-2})). \tag{3.30}$$

Для погрешности формулы (3.30) справедлива оценка

$$|R_n| \le \frac{(b-a)h^4}{180}\cdot M_4, \tag{3.31}$$

где $\left|f^{IV}(x)\right| \le M_4$ при $a \le x \le b.$

Пример 3. Вычислить интеграл из примера 1 по формуле Симпсона.

Решение. $\int_0^2 x^3\mathrm{d}x \approx \frac{2}{6\cdot 2}\left(0+8+4\left(\frac{1}{8}+\frac{27}{8}\right)+2\cdot 1\right)=4.$ $|R_n|=0.$

3.10. Формула Ньютона (правило трех восьмых)

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{3h}{8}[y_0+y_{3m}+2(y_3+y_6+...+y_{3m-3})+ \\ +3(y_1+y_2+y_4+y_5+...+y_{3m-2}+y_{3m-1})]. \tag{3.32}$$

где $h=\frac{b-a}{n}=\frac{b-a}{3m}.$

Остаточный член имеет вид

$$R_n=-\frac{3mh^5}{80}f^{(4)}(\xi)=-\frac{(b-a)h^4}{80}f^{(4)}(\xi), \quad a<\xi<b. \tag{3.33}$$

Заметим, что в формуле (3.32) число узлов обязательно равно $3m+1$, т. е. $n=3m.$

Пример 4. Вычислить интеграл из примера 1 по формуле Ньютона.

Решение. $h=\frac{b-a}{3m}=\frac{2-0}{3\cdot 2}=\frac{1}{3};\quad f(x)=x^3.$

i	0	1	2	3	4	5	6
x_i	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{6}{3}$
y_i	0	$\frac{1}{27}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{27}{27}$	$\frac{64}{27}$	$\frac{125}{27}$	$\frac{216}{27}$

По формуле (3.32) находим

$$\int_0^2 x^3 \mathrm{d}x \approx \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{3}\left(0+\frac{216}{27}+\frac{2\cdot 27}{27}+\frac{3}{27}(1+8+64+125)\right)=$$
$$=\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{27}(216+54+594)=\frac{864}{216}=4.$$

Из формулы (3.33) получаем

$$|R_n|=0.$$

3.11. Правило Рунге (двойной пересчет)

На практике, чтобы не проводить оценку модуля производной высокого порядка, поступают так: вычисляют определенный интеграл по выбранной формуле с шагами h_1 и $h_2=h_{1/2}$ и приближенно находят ошибку численного интегрирования с помощью соотношения

$$\left|I-I_{h_{1/2}}\right|\approx\left|I_{h_1}-I_{h_2}\right|,$$

где I – точное значение определенного интеграла;

I_{h_1}, I_{h_2} – приближенные значения определенного интеграла, найденные по выбранной квадратурной формуле с шагами, равными h_1 и $h_2=h_{1/2}$ соответственно.

Заметим, что если определенный интеграл вычислялся дважды по формуле Симпсона с шагами h_1 и $h_2=h_{1/2}$, то ошибку численного интегрирования можно находить с помощью приближенной формулы:

$$\left|I - I_{h_{1/2}}\right| \approx \frac{1}{15}\left|I_{h_1} - I_{h_{1/2}}\right|.$$

Для формулы трапеций

$$\left|I - I_{h_{1/2}}\right| \approx \frac{1}{3}\left|I_{h_1} - I_{h_{1/2}}\right|.$$

Если заданная точность для этих вычислений окажется недостигнутой, то шаг интегрирования еще раз уменьшаем вдвое и т. д.

3.12. Квадратурные формулы наивысшей алгебраической степени точности (квадратурные формулы Гаусса)

Квадратурные формулы Гаусса имеют вид

$$\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i) + R_n(f). \qquad (3.34)$$

Формула (3.34) имеет $2n$ параметров A_i и x_i, поэтому при помощи выбора этих параметров можно сделать равенство точным для всяких алгебраических многочленов степени $2n-1$ или, что равносильно, чтобы оно было точным для степеней x от нулевой до $2n-1$. Числа A_i, x_i в этом случае определяются однозначно.

Абсциссы x_i и коэффициенты A_i квадратурных формул Гаусса при n равном 4 и 5 приведены ниже.

n	x_i	A_i	$R_n(f)$
4	$-x_1 = x_4 = 0{,}861136312$ $-x_2 = x_3 = 0{,}339981044$	$A_1 = A_4 = 0{,}347854845$ $A_2 = A_3 = 0{,}652145155$	$R_4(f) \approx$ $\approx 2{,}88 \cdot 10^{-7} f^{(8)}(\xi)$ $-1 < \xi < 1$
5	$-x_1 = x_5 = 0{,}906179846$ $-x_2 = x_4 = 0{,}538469310$ $x_3 = 0$	$A_1 = A_5 = 0{,}236926885$ $A_2 = A_4 = 0{,}478628670$ $A_3 = 0{,}568888889$	$R_5(f) \approx$ $\approx 8{,}08 \cdot 10^{-4} f^{(10)}(\xi)$ $-1 < \xi < 1$

Неудобство применения квадратурной формулы Гаусса состоит в том, что абсциссы x_i и A_i, вообще говоря, иррациональные числа. Этот недостаток искупается высокой точностью этой формулы при сравнительно малом числе узлов интегрирования. В тех случаях, когда подынтегральная функция сложна и на вычисление ее значений в каждом узле интегрирования требуется много времени, применение формулы Гаусса особенно выгодно.

Получить оценку погрешности результата, используя формулы остаточного члена, для формул Гаусса удается очень редко, так как это связано с вычислением производных высоких порядков от подынтегральной функции.

При вычислении интеграла $\int\limits_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x$ следует сделать замену переменной: $x = \dfrac{b+a}{2} + \dfrac{b-a}{2}t.$

Тогда формула Гаусса будет иметь вид

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i) + R_n^*(f),$$

где

$$x_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t_i,\;\; R_n^*(f) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^{2n+1} R_n(f).$$

Пример 5. Вычислить интеграл $I = \int\limits_1^3 \dfrac{\mathrm{d}x}{1+x}$ по формуле Гаусса при $n = 4$.

Решение. Сделаем замену переменной: $x = \dfrac{1+3}{2} + \dfrac{3-1}{2}t \Rightarrow$ $\Rightarrow x = 2 + t,\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}t$. Получим интеграл $\int\limits_{-1}^1 \dfrac{\mathrm{d}t}{t+3}$. Составим таблицу значений подынтегральной функции $\dfrac{1}{t+3}$.

i	t_i	$f(t_i)$	A_i
1	–0,861136312	0,467537976	0,347854845
2	–0,339981044	0,37593717	0,652145155
3	0,339981044	0,299402896	0,6521145155
4	0,861136312	0,258991115	0,347854845

По формуле Гаусса при $n = 4$ находим

$$I = A_1 f(t_1) + A_2 f(t_2) + A_3 f(t_3) + A_4 f(t_4) = 0,693146416.$$

Точное значение интеграла

$$\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{t+3} = \ln(t+3)\Big|_{-1}^{1} = \ln 4 - \ln 2 = 2\ln 2 - \ln 2 = \ln 2 = 0,69314718.$$

Абсолютная погрешность составляет $7,6 \cdot 10^{-7}$.

Задания. В следующих задачах вычислить приближенно интегралы по указанным формулам и оценить остаточный член R.

1. $\int_0^1 \left(3x^2 - 4x\right)\mathrm{d}x$ по формуле трапеций при $n = 10$.

2. $\int_0^1 \frac{x\mathrm{d}x}{1+x}$ по формуле Симпсона при $n = 10$.

3. $\int_1^5 \frac{\mathrm{d}x}{x}$ по формуле трапеций при $n = 4$.

4. $\int_1^9 \sqrt{6x-5}\,\mathrm{d}x$ по формуле трапеций при $n = 8$.

5. $\int_0^{1,2} \ln\left(1+x^2\right)\mathrm{d}x$ по формуле трапеций при $n = 6$.

6. $\int_0^{1,2} \ln\left(1+x^2\right)\mathrm{d}x$ по формуле Симпсона при $n = 6$.

7. $\int_0^1 \sin x^2 \, dx$ по формуле трапеций при $n = 10$.

8. $\int_0^1 \sin x^2 \, dx$ по формуле Симпсона при $n = 10$.

9. $\int_0^1 \cos x^2 \, dx$ по формуле трапеций при $n = 10$.

10. $\int_0^1 \cos x^2 \, dx$ по формуле Симпсона при $n = 10$.

11. $\int_4^{5,2} \ln x \, dx$ по формуле трапеций при $n = 6$.

12. $\int_4^{5,2} \ln x \, dx$ по формуле Симпсона при $n = 6$.

13. $\int_1^3 \frac{dx}{1+x}$ по формуле трапеций при $n = 4$.

14. $\int_1^3 \frac{dx}{1+x}$ по формуле Симпсона при $n = 4$.

Вычислить интегралы по формуле трапеций с точностью 10^{-2}, определяя величину шага h с помощью двойного пересчета (правило Рунге) или по оценке остаточного члена.

15. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$. 16. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$. 17. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$. 18. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^3}$.

19. $\int_1^2 x \lg x \, dx$. 20. $\int_1^2 \frac{\lg x}{x} dx$. 21. $\int_1^2 \frac{\cos x}{x} dx$. 22. $\int_1^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+x} dx$.

Вычислить по формуле Симпсона с точностью 10^{-2}:

23. $\int_0^1 \sqrt{x} \sin x \, dx$. 24. $\int_0^1 \sqrt{x} \cos x \, dx$. 25. $\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+x+\sqrt{\sin x}}$.

26. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{x+\sqrt{\cos x}}$. 27. $\int\limits_2^{3} \frac{dx}{1+\sqrt{\ln x}}$. 28. $\int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{1+\sin^3 x}$.

29. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos^2 x}$. 30. $\int\limits_0^{1} \frac{\sin x}{x^2+1}dx$.

Ответы.

1) $-0,995, |R| \le 0,5\cdot 10^{-2}$; 2) $0,3068, |R| \le 1,3\cdot 10^{-5}$;

3) $\frac{101}{60}, |R| \le 0,7$; 4) $38, |R| \le 6$;

5) $0,213, |R| \le 0,8\cdot 10^{-2}$; 6) $0,2112, |R| \le 0,26\cdot 10^{-3}$;

7) $0,311, |R| \le 0,19\cdot 10^{-2}$; 8) $0,29624, |R| \le 0,13\cdot 10^{-4}$;

9) $0,903, |R| \le 0,19\cdot 10^{-2}$; 10) $1,05575, |R| \le 0,13\cdot 10^{-4}$;

11) $1,828, |R| \le 2,5\cdot 10^{-4}$; 12) $1,827847, |R| \le 2,5\cdot 10^{-7}$;

13) $0,697, |R| \le 0,083$; 14) $0,693, |R| \le 0,033$;

15) 0,69; 16) 0,79; 17) 0,88; 18) 0,84; 19) 0,28;
20) 0,10; 21) 0,09; 22) 0,67; 23) 0,36; 24) 0,52;
25) 1,08; 26) 0,67; 27) 0,51; 28) 1,18; 29) 0,71;
30) 0,32.

Задание. Вычислить интеграл от заданной функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ при делении отрезка на 12 равных частей следующими способами: 1) по формуле прямоугольников; 2) по формуле трапеций; 3) по формуле Симпсона; 4) по формуле Ньютона (правилу трех восьмых). Произведите оценку погрешности методов интегрирования и сравните точность полученных результатов.

1. $\int\limits_0^1 0,37\cdot e^{\sin x}\,dx$; 2. $\int\limits_1^2 (0,5+x\cdot \lg x)\,dx$; 3. $\int\limits_1^2 (x+1,9)\cdot\sin(x/3)\,dx$;

3. $\int\limits_2^3 \frac{1}{x}\cdot\ln(x+2)\,dx$; 5. $\int\limits_0^1 \frac{3\cos x}{2x+1,7}dx$; 6. $\int\limits_{1,2}^{2,2} 2,6x^2\ln x\,dx$;

7. $\int\limits_{-1}^{0} 4xe^{x^2}\mathrm{d}x;$ 8. $\int\limits_{-0,5}^{0,5} (3x^2 + \mathrm{tg}\,x)\,\mathrm{d}x;$ 9. $\int\limits_{0,1}^{1} \frac{3x^2 + \sin x}{x^2}\mathrm{d}x;$

10. $\int\limits_{0,2}^{1,2} 3xe^{\cos x}\mathrm{d}x;$ 11. $\int\limits_{1,5}^{2,5} x^2\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}\mathrm{d}x;$ 12. $\int\limits_{0,1}^{1,1} \sqrt{x}\,\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x;$

13. $\int\limits_{1,4}^{2,4} 3,1x\ln^2 x\,\mathrm{d}x;$ 14. $\int\limits_{2,3}^{3,3} (x-0,8)\cdot\ln\frac{x}{2}\mathrm{d}x;$ 15. $\int\limits_{0}^{1} (x-3,1)\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{tg}\,x}\,\mathrm{d}x.$

Задание. Вычислите интеграл по формулам трапеции и Симпсона с заданной точность ε, определяя шаг интегрирования h по оценке остаточного члена.

1. $\int\limits_{0}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{1+x},\ \varepsilon = 0,5\cdot 10^{-4};$ 2. $\int\limits_{0}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^3},\ \varepsilon = 0,5\cdot 10^{-4};$

3. $\int\limits_{2}^{4}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x,\ \varepsilon = 0,5\cdot 10^{-2};$ 4. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x,\ \varepsilon = 0,5\cdot 10^{-4};$

5. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sin x^2\mathrm{d}x,\ \varepsilon = 0,5\cdot 10^{-3};$ 6. $\int\limits_{0}^{1}\cos x^2\mathrm{d}x,\ \varepsilon = 0,5\cdot 10^{-3};$

7. $\int\limits_{0}^{\pi}\sqrt{3+\cos x}\,\mathrm{d}x,\ \varepsilon = 0,5\cdot 10^{-4};$ 8. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x,\ \varepsilon = 0,5\cdot 10^{-2};$

9. $\int\limits_{0}^{1}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x,\ \varepsilon = 0,5\cdot 10^{-2};$ 10. $\int\limits_{0}^{1}\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x,\ \varepsilon = 0,5\cdot 10^{-2};$

11. $\int\limits_{0}^{1}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x,\ \varepsilon = 0,5\cdot 10^{-4};$ 12. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x,\ \varepsilon = 0,5\cdot 10^{-2};$

13. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\frac{1}{4}\sin^2 x}\,\mathrm{d}x,\ \varepsilon = 0,5\cdot 10^{-4};$ 14. $\int\limits_{0}^{2\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x,\ \varepsilon = 0,5\cdot 10^{-4};$

15. $\int\limits_{0}^{1,2}\ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x,\ \varepsilon = 0,5\cdot 10^{-2}.$

Задание. С помощью программы для компьютера вычислите значение данного интеграла по формулам трапеций и Симпсона с точностью до $0{,}5\cdot 10^{-3}$, определяя шаг интегрирования с помощью двойного пересчета.

1. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^3}$;
2. $\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}\,dx$;
3. $\int_0^1 x\ln(x+1)\,dx$;
4. $\int_2^3 \frac{dx}{1+\sqrt{\ln x}}$;
5. $\int_0^1 \sqrt{x}\sin x\,dx$;
6. $\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+\sin^3 x}$;
7. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 x}\,dx$;
8. $\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x}\,dx$;
9. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$;
10. $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\,dx$;
11. $\int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}\,dx$;
12. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos x\,dx$;
13. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{x+\sqrt{\cos x}}$;
14. $\int_0^1 \frac{\sin x}{1+x^2}\,dx$;
15. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin x}{x}\,dx$.

Задание. Вычислите интеграл по квадратурной формуле Гаусса.

1. $\int_1^3 x^{-1}e^x\,dx$;
2. $\int_1^2 \frac{dx}{\ln(x+1)}$;
3. $\int_1^2 e^{(x^{-2}-x^2)}\,dx$;
4. $\int_0^1 \frac{\sin x}{1+x^2}\,dx$;
5. $\int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{1+x}}\,dx$;
6. $\int_0^1 \cos(x^2+x+1)\,dx$;
7. $\int_0^{\pi} \frac{\cos x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$;
8. $\int_{0,1}^{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{-x}{\sin x}}\,dx$;
9. $\int_0^1 \frac{x\cos x}{1+x^2}\,dx$;
10. $\int_0^1 \frac{xe^x}{1+x^2}\,dx$;
11. $\int_0^1 \frac{\cos x}{1+x}\,dx$;
12. $\int_0^1 \frac{xe^{-x}}{1+x^2}\,dx$;
13. $\int_0^{\pi} \operatorname{ch}(\cos x)\,dx$;
14. $\int_0^{\pi} e^{\cos x}\cos 2x\,dx$;
15. $\int_0^{\pi} \cos(x-\sin x)\,dx$;

Лабораторная работа № 13

Тема: **Численное решение нелинейных уравнений [8, 9, 10, 11].**

Цель: изучение различных методов решения нелинейных уравнений.

Необходимые теоретические сведения.

Пусть дано уравнение

$$f(x) = 0, \tag{3.35}$$

где $f(x)$ – заданная функция, непрерывная в некотором конечном или бесконечном интервале.

Число ξ называется корнем уравнения (3.35), если $f(\xi) = 0.$ Вычисление корней состоит из нескольких этапов. Вначале определяют, какие корни требуется найти, например, только действительные или только положительные и т. д. Затем выделяют области, содержащие по одному корню уравнения (3.35). Далее, применив какой-либо вычислительный алгоритм, с требуемой точностью находят выделенный корень. На заключительном этапе проводится проверка полученных результатов.

3.13. Отделение корней

Для отделения корней часто применяют теорему Больцано-Коши: «Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и на его концах принимает значения разных знаков $(f(a)\cdot f(b) < 0),$ то внутри отрезка $[a,b]$ существует по крайней мере один корень уравнения (3.35)».

Заметим, что корень будет единственным в интервале $(a,b),$ если $f'(x)$ не меняет знака в этом интервале, т. е. $f'(x) > 0$ или $f'(x) < 0$ при всех $x \in [a,b].$

Для отделения корней можно использовать график функции $y = f(x).$ Корнями уравнения (3.35) являются те значения x, при которых график функции $y = f(x)$ пересекает ось абсцисс. Построение графика функции даже с малой точностью обычно дает представление о расположении корней уравнения. Если построение графика функции $f(x)$ вызывает затруднения, то уравнение (3.35) следует преобразовать к виду $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$ так, чтобы графики функций $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$ было по возможности легче построить. Абсциссы точек пересечения этих графиков и будут корнями уравнения (3.35).

Пример 1. Отделить корни уравнения $x^3 + x^2 + x - 6 = 0.$

Решение. Функция $y = x^3 + x^2 + x - 6$ определена и непрерывна, а $f'(x) = 3x^2 + 2x + 1 \geq 0$ для любых $x \in R.$ Тогда данное уравнение имеет единственный действительный корень. Заметив, что $f(1) = -3,$ а $f(2) = 8,$ мы можем утверждать, что единственный действительный корень исходного уравнения лежит на отрезке $[1, 2].$

3.14. Метод половинного деления

Пусть на отрезке $[a, b]$ имеется только один корень, $f(x)$ – непрерывная функция и $f(a) \cdot f(b) < 0.$ В середине отрезка $x_1 = \dfrac{a+b}{2}$ определяем знак функции $f(x),$ затем выбираем ту половину отрезка, на концах которого $f(x)$ принимает значения разных знаков, и деление повторяется. Если требуется найти корень с точностью $\delta,$ то деление отрезка пополам продолжается до тех пор, пока длина отрезка не станет меньше 2δ. Тогда середина последнего отрезка даст значение корня с требуемой точностью. В этом методе можно не вычислять значение функции $f(x),$ достаточно лишь определить знак значения функции. Алгоритм метода очень прост и надежен, однако скорость сходимости – линейная.

Пример 2. Методом половинного деления найти корень уравнения из примера 1 с точностью до 0,1.

Решение. $f(x) = x^3 + x^2 + x - 6 = 0,\ x \in [1, 2].$

$f(1) = -3 < 0,\ f(2) = 8 > 0.\ \ x_1 = \dfrac{1+2}{2} = 1,5;\ \ f(1,5) > 0 \Rightarrow$ выбираем $[1;\, 1,5]$, так как $f(1) < 0,\ \ f(1,5) > 0.$

Далее $x_2 = \dfrac{1+1,5}{2} = 1,25;\ f(1,25) < 0.$

Выбираем $[1,25;\, 1,5]$, $x_3 = \dfrac{1,25+1,5}{2} = 1,375;\, f(1,375) < 0.$

$[1,375;\, 1,5]$, $x_4 = \dfrac{1,375+1,5}{2} = 1,4375;\ \ f(1,4375) > 0.$

$[1,375;\, 1,4375]$, $x_5 = \dfrac{1,375+1,4375}{2} = 1,40625;\ \ f(1,40625) > 0.$

$[1,375;\, 1,40625]$, $x_6 = \dfrac{1,375+1,40625}{2} = 1,3906;$

$f(1,3906) = 1,3906^3 + 1,3906^2 + 1,3906 - 6 = 0,0135.$

В качестве корня возьмем $\zeta = 1,3906 \approx 1,39.$

Проверка: $1,39^3 + 1,39^2 + 1,39 - 6 = 0;$

$$2,6856 + 1,9321 + 1,39 - 6 = 0, \quad 0,0077 \approx 0; \quad 0,0 = 0.$$

3.15. Метод простой итерации (метод последовательныхприближений)

Заменим уравнение (3.35) эквивалентным ему уравнением

$$x = \varphi(x). \tag{3.36}$$

Предположим, что выбрано некоторое начальное приближение x_0 корня уравнения (3.36). Определим итерационную последовательность x_n по формуле

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.37}$$

Если на отрезке $[a,b]$, содержащем x_0 и все последующие приближения x_n, функция $\varphi(x)$ имеет непрерывную производную

$\varphi'(x)$ и $|\varphi'(x)| \le q < 1$, то итерационная последовательность (3.37) сходится к единственному на отрезке $[a,b]$ корню уравнения (3.36).

Скорость сходимости метода итерации зависит от величины q: чем меньше q, тем быстрей сходимость. Следовательно, при практическом нахождении корней методом итерации нужно стремиться представить уравнение (3.35) в форме (3.36) так, чтобы производная $\varphi'(x)$ в окрестности корня по абсолютной величине была возможно меньше. Уравнение (3.35) можно представить в виде (3.36) различными способами, например: $x = x + Cf(x)$, $C \ne 0$. Главное – выполнение условия сходимости. В этом смысле весьма поучителен следующий пример.

Пример 3. Найти корни уравнения

$$2x - \ln x - 7 = 0. \tag{3.38}$$

с тремя верными значащими цифрами.

Решение. 1. Отделение корней.

Представим уравнение (3.38) в виде $2x - 7 = \ln x$ и применим к нему графический метод решения. Построим графики функций $y = 2x - 7$ и $y = \ln x$.

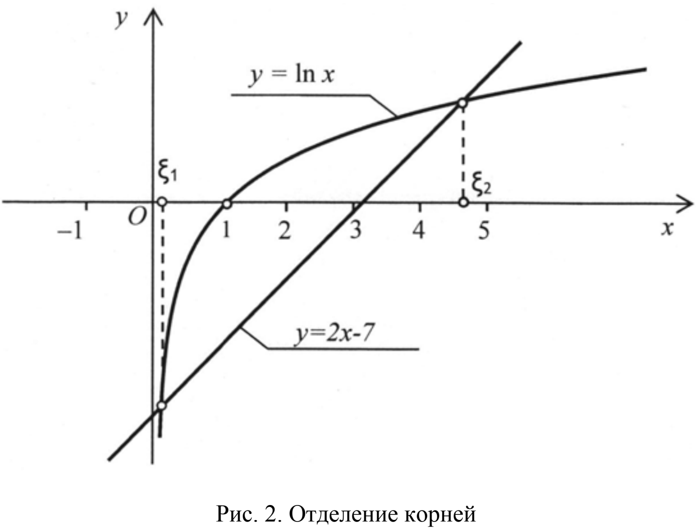

Рис. 2. Отделение корней

Из рисунка видно, что уравнение (3.38) имеет два корня ξ_1 и ξ_2, причем $0<\xi_1<1$ и $3<\xi_2<5$. Сузим второй интервал, для чего вычислим приближенные значения.

x	3	4	5
$f(x)$	–2,099	–0,386	1,391

Из таблицы видно, что $4<\xi_2<5$.

2. Вычисление корней методом простой итерации.

Для этого представим (3.38) в виде (3.36) Это можно сделать многими способами, например

$$x=\frac{1}{2}(7+\ln x) \tag{3.39}$$

или $\ln x = 2x-7$, откуда

$$x=\mathrm{e}^{2x-7}. \tag{3.40}$$

Оценим $\varphi'(x)$ в окрестности корней ξ_1 и ξ_2. Для уравнения (3.39) имеем $\varphi'(x)=\frac{1}{2x}$, и, следовательно, при $0<x<1$ $\varphi'(x)$ не ограничена. Поэтому вычисление корня ξ_1 с помощью уравнения (3.39) применять нельзя. Для уравнения (3.40) $0<\varphi'(x)=2\,\mathrm{e}^{2x-7}<2\,\mathrm{e}^{-5}$ при $0<x<1$ и можно положить $q=2\,\mathrm{e}^{-5}=0,0134...$ Метод итераций в этом случае будет сходящимся.

Покажем, что для вычисления корня ξ_2 выгодно применять уравнение (3.39). Действительно, из (3.39) $0<\varphi'(x)=\frac{1}{2x}<\frac{1}{8}$ при $4<x<5$. Можно положить $q=\frac{1}{8}$ следовательно, в этом случае метод простых итераций сходится.

Перейдем к вычислению корней.

Вычислим корень ξ_1. Так как $0<\xi_1<1$, то положим $x_0=1$ и вычислим $x_1=e^{2\cdot 1-7}=e^{-5}=0,006738...$, найдем

$$x_2=e^{2\cdot 0,006738-7}=0,000924...,$$

$$x_3=e^{2\cdot 0,00924-7}=0,000914...,$$

$$x_4=0,000914.$$

Следовательно, $\xi_1=0,000914$ с точностью до 10^{-6}, так как $|\xi_1-x_4|\le|x_4-x_3|<10^{-6}$.

Вычисление ξ_2. Так как $4<\xi_2<5$, то в качестве x_0 можно взять или число 4, или 5. Но так как $f(4)=-0,386$, а $f(5)=1,391$, то разумно взять $x_0=4$. Применяем метод итераций к уравнению (3.39) и находим $x_1=\frac{1}{2}(7+\ln 4)=4,1931475.$

Вычисляем $x_2=\frac{1}{2}(7+\ln 4,1931475)=4,216726.$ Находим аналогично $x_3=\frac{1}{2}(7+\ln 4,216726)=4,21953.$

Так как $|\xi_2-x_3|\le|x_3-x_2|=0,002804\ldots<0,003$, то, округляя x_3, получим $\xi_2=4,22$ с точностью до $\frac{1}{2}\cdot 10^{-2}$.

<u>Задания.</u>

Методом простой итерации с точностью до $\varepsilon=0,5\cdot 10^{-3}$ решить уравнения:

1) $x^3+3x-1=0$; 2) $x^3+4x-3=0$; 3) $x^3-3x+3=0$;

4) $x^5+x-3=0$; 5) $x^7+x+4=0$; 6) $2^x+x^2-1,15=0$;

7) $3^{-x}-x^2+1=0$; 8) $3^x-x-2=0$; 9) $\ln x+x+2=0$;

10) $x^5-5x+2=0$; 11) $x^4+x-3=0$; 12) $x^4+2x-4=0$.

Ответы.

1) 0,322;	2) 0,674;	3) –2,104;
4) 1,133;	5) –1,161;	6) –0,730;
7) 1,138;	8) 1; –1,870;	9) 0,110;
10) –1,582; 0,402;	11) –1,452; 1,164;	12) –1,643; 1,144.

3.16. Итерационные методы решения нелинейных уравнений. Метод Ньютона. Метод секущих. Метод хорд

Метод Ньютона (метод касательных) применяется к решению уравнения (3.35): $f(x)=0,$ где $f(x)$ – непрерывно дифференцируемая функция. Для начала вычислений требуется задание одного начального приближения x_0. Последующие приближения вычисляются по формуле

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)},\quad f'(x_n)\neq 0,\quad n=0,1,2,... \qquad (3.41)$$

Геометрически x_{n+1} является значением абсциссы точки пересечения касательной к кривой $y=f(x)$ в точке $(x_n,\ f(x_n))$ с осью абсцисс.

Если $f'(x)$ и $f''(x)$ на отрезке $[a,b]$, содержащем единственный корень уравнения (3.35), сохраняют определенные знаки, то метод Ньютона всегда сходится, если начальное приближение $x_0\in[a,b]$ и удовлетворяет условию $f(x_0)\cdot f''(x_0)>0.$

Если $f(x)$ имеет непрерывную вторую производную, то погрешность на n-м и $(n+1)$-м шагах связаны соотношением

$$x^*-x_{n+1}=-\frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)}\left(x^*-x_n\right)^2,\quad \xi_n\in\left[x^*,x_n\right],$$

где x^* – точное решение уравнения (3.35). То есть сходимость метода Ньютона квадратичная, если $f'\left(x^*\right)\neq 0.$

Пример 4. Найти наименьший положительный корень уравнения $f(x) = \mathrm{e}^x \sin x - 1 = 0$ методом Ньютона.

Решение. Этот корень лежит на отрезке $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$: $\sin x = \mathrm{e}^{-x}$. Легко проверить, что $f'(x)$ и $f''(x)$ на $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ положительны. Следовательно, за начальное приближение метода Ньютона можно взять любую точку x_0 отрезка $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, в которой $f(x) > 0$. В частности, если взять $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$, то итерационный процесс

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\mathrm{e}^{x_n} \sin x_n - 1}{\mathrm{e}^{x_n} (\sin x_n + \cos x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

будет сходиться к корню уравнения. Итерации можно прекращать, если выполняется условие

$$\left| \frac{q}{1-q} (x_n - x_{n-1}) \right| = \frac{(x_n - x_{n-1})^2}{\left| 2x_{n-1} - x_n - x_{n-2} \right|} < \varepsilon, \tag{3.42}$$

где

$$q = \frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1} - x_{n-2}}.$$

Результаты реализации этого итерационного процесса с контролем окончания итераций помещены в таблицу:

Номер итерации	x_0	$f(x_0)$	Контроль окончания счета
1	1,5707960	3,8104758+00	
2	0,7786759	5,3010240-01	4,7744802–02
3	0,6066159	4,5667651–02	2,0760839–03
4	0,5887234	4,8143185–04	2,0973347–06
5	0,5885328	5,56115601–08	2,5726061–12
	0,5885327	0,0000000+00	
	0,5885317	–2,4982792	

В методе Ньютона на каждом шаге нужно вычислять значения функции и производной. Вычисление $f'(x)$ может быть трудоемким. Можно вообще избежать вычисления производной, если заменить ее первой конечной разностью, найденной по двум последним итерациям.

Геометрически это означает, что касательная заменяется секущей. В этом случае итерационный процесс имеет вид:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n). \tag{3.43}$$

В данном процессе для вычисления очередного приближения необходимо знать два предыдущих. Процесс является примером двухшагового метода.

Скорость сходимости метода секущих вблизи корня определяется соотношением

$$x_{n+1} - x^* \approx (x_n - x^*)^{1,62} \left(\frac{f''(x^*)}{f'(x^*)} \right)^{0,62}.$$

Отсюда видно, что в методе Ньютона ошибка убывает быстрее, поскольку у него скорость сходимости квадратичная. Однако в методе Ньютона приходится считать как значения функции, так и значения производной, в методе секущих – только значения функции.

Сущность метода хорд состоит в замене кривой $y = f(x)$ хордами, проходящими через концы отрезков, в которых $f(x)$ имеет противоположные знаки.

Итерационный процесс строится так:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(x_0)} \cdot (x_n - x_0), \ \ n = 1, 2, \ldots \tag{3.44}$$

Метод является двухшаговым, т. е. для получения следующего приближения нужно знать значения $f(x)$ в двух точках, и требует, чтобы один конец отрезка, на котором ищется корень, был неподвижен. В качестве неподвижного конца выбирается тот, для которого знак $f(x)$ совпадает со знаком ее второй производной $f''(x)$. Тогда последовательные приближения x_n лежат по ту сторону корня, где $f(x)$ имеет знак, противоположный $f''(x)$.

Сходимость метода хорд – односторонняя и монотонная. Так как на каждом шаге итерационного процесса за приближенное значение корня x_{n+1} принимается корень интерполяционного многочлена первой степени, то метод хорд называется еще методом линейной интерполяции.

Если в методе секущих (3.43) вместо точки x_{n-1} взять x_0, получим метод хорд (3.44).

Задания. Вычислить методом Ньютона корень уравнения с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$:

1) $2x + \ln x = 0,\ x_0 = 0,1;$

2) $x^3 + 3x - 1 = 0,\ x_0 = 0,3;$

3) $x^2 - \lg(x+2) = 0,\ x_0 = 0,5;$

4) $x^2 + \ln x = 0,\ x_0 = 0,6;$

5) $x^2 + \ln x - 4 = 0,\ x_0 = 1,5;$

6) $(x-1)^2 - 0,5\mathrm{e}^x = 0,\ x_0 = 0,2;$

7) $(x-1)^2 - \mathrm{e}^{-x} = 0,\ x_0 = 1,4;$

8) $x^3 - 2x^2 + 7x + 3 = 0,\ x_0 = 0;$

9) $4x - \cos x = 0,\ x_0 = 0;$

10) $x^2 - \cos \pi x = 0,\ x_0 = 0;$

11) $2\sqrt{x} - \cos\dfrac{\pi x}{2} = 0,\ x_0 = 0,2;$

12) $\sqrt{x} - 2\cos\dfrac{\pi x}{2} = 0,\ x_0 = 0,7;$

13) $x^2 - \cos^2 \pi x = 0,\ x_0 = 0,3;$

14) $x^2 - \sin \pi x = 0,\ x_0 = 0,75;$

15) $x - \cos x = 0,\ x_0 = 0,5.$

Вычислить методом секущих корень уравнения с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$:

16) $x^3 - x - 1 = 0,\ x_0 = -1,\ x_1 = 2;$

17) $x^5 - x - 0,2 = 0,\ x_0 = 1,\ x_1 = 1,1;$

18) $x^4 - 3x^2 + 75x - 10000 = 0,\ x_0 = -11,\ x_1 = -10;$

19) $\sin x - x + 0{,}25 = 0,\ x_0 = -1{,}2,\ x_1 = 1{,}27;$

20) $e^x + x^2 - 2 = 0,\ x_0 = -1{,}35,\ x_1 = -1{,}32;$

21) $5x - 8\ln x - 8 = 0,\ x_0 = 3{,}5,\ x_1 = 3{,}54;$

22) $x\lg x + 0{,}125 = 0,\ x_0 = 0{,}15,\ x_1 = 0{,}14;$

23) $x\lg x - 0{,}5 = 0,\ x_0 = 0{,}66,\ x_1 = 0{,}67;$

24) $x\ln x - 100 = 0,\ x_0 = 29{,}53,\ x_1 = 30;$

25) $2\lg x - \dfrac{x}{2} + 1 = 0,\ x_0 = 0{,}45,\ x_1 = 0{,}4;$

26) $2 - \ln x - x = 0,\ x_0 = 1{,}5,\ x_1 = 1{,}45;$

27) $x^2 - 4\sin x = 0,\ x_0 = 0,\ x_1 = 0{,}1;$

28) $x^3 + 3x^2 - 1 = 0,\ x_0 = -1{,}5,\ x_1 = -0{,}6;$

29) $x^3 + x - 100 = 0,\ x_0 = 9,\ x_1 = 10;$

30) $x^3 - 2x^2 + x - 3 = 0,\ x_0 = 2{,}1,\ x_1 = 2{,}2.$

Отделите графически один из корней данного нелинейного уравнения и уточните его с помощью программы для компьютера с точностью 10^{-3}:

1) методом половинного деления;
2) методом простой итерации;
3) методом хорд;
4) методом Ньютона (касательных).

Номер варианта	Уравнение	Пояснения
1	$(0{,}2x)^3 = \cos x$	
2	$x - 10\sin x = 0$	
3	$2^{-x} = \sin x$	при $x < 10$
4	$2^x - 2\cos x = 0$	при $x > -10$
5	$\lg(x+5) = \cos x$	при $x < 5$

Номер варианта	Уравнение	Пояснения
6	$\sqrt{4x+7} = 3\cos x$	
7	$x\sin x - 1 = 0$	
8	$8\cos x - x = 6$	
9	$\sin x - 0,2x = 0$	
10	$10\cos x - 0,1x^2 = 0$	
11	$2\lg(x+7) - 5\sin x = 0$	
12	$4\cos x + 0,3x = 0$	
13	$5\sin 2x = \sqrt{1-x}$	
14	$1,2x^4 + 2x^3 - 24,1 = 13x^2 + 14,2x$	
15	$2x^2 - 5 = 2^x$	

Лабораторная работа № 14

Тема: **Итерационные методы решения систем нелинейных уравнений** [8, 9, 10, 11].

Цель: изучить построение и применение итерационных методов решения систем нелинейных уравнений.

Необходимые теоретические сведения.

3.17. Метод простой итерации для системы двух уравнений

Пусть дана система двух уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} F_1(x, y) = 0, \\ F_2(x, y) = 0, \end{cases} \tag{3.45}$$

где хотя бы одна из функций F_i, где $i = 1,\ 2$ – нелинейная.

Требуется найти действительные корни этой системы с заданной степенью точности. Предположим, что система (3.45) допускает лишь изолированные корни. Число этих корней и их приближенные значения можно установить, построив кривые $F_1(x,y)=0$ и $F_2(x,y)=0$ и определив координаты их точек пересечения.

Для применения метода итераций система (3.45) приводится к виду

$$\begin{cases} x=\varphi_1(x,y), \\ y=\varphi_2(x,y). \end{cases} \tag{3.46}$$

Функции $\varphi_1(x,y)$ и $\varphi_2(x,y)$ называются итерирующими. Алгоритм решения задается формулами

$$\begin{cases} x_{n+1}=\varphi_1(x_n,y_n), \\ y_{n+1}=\varphi_2(x_n,y_n), \end{cases} \quad n=0,1,2,..., \tag{3.47}$$

где x_0, y_0 – некоторое начальное приближение.

Теорема. Пусть в некоторой замкнутой окрестности $R(a\le x\le A$, $b\le y\le B)$ имеется одно и только одно решение $x=\xi,\ y=\eta$ системы (3.46). Если

1) функции $\varphi_1(x,\,y)$ и $\varphi_2(x,\,y)$ непрерывно дифференцируемы в R;

2) начальные приближения x_0, y_0 и все последующие приближения x_n, y_n $(n=1,\,2,\,\ldots)$ принадлежат R;

3) в R выполнены неравенства

$$\begin{cases} \left|\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right|+\left|\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right|\le q_1<1, \\ \left|\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right|+\left|\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right|\le q_2<1, \end{cases} \tag{3.48}$$

то процесс последовательных приближений (3.47) сходится к решению $x=\xi,\ y=\eta$ системы, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\xi$ и $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\eta$.

Эта теорема остается верной, если условие (3.48) заменить условием:

$$\begin{cases} \left|\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right| + \left|\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right| \le q_1 < 1, \\ \left|\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right| + \left|\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right| \le q_2 < 1. \end{cases} \tag{3.49}$$

Оценка погрешности n-го приближения дается неравенством

$$|\xi - x_n| + |\eta - y_n| \le \frac{M}{1-M}\left(|x_n - x_{n-1}| + |y_n - y_{n-1}|\right),$$

где M – наибольшее из чисел $q_1, q_2,$ входящее в неравенства (3.48) или (3.49).

Сходимость метода итераций считается хорошей, если $M < \dfrac{1}{2}$, при этом $\dfrac{M}{1-M} < 1,$ так что если в двух последовательных приближениях совпадают, скажем, первые три десятизначных знака после запятой, то ошибка последнего приближения не превосходит 0,001.

Пример 1. Для системы

$$\begin{cases} x^3 + y^3 - 6x + 3 = 0, \\ x^3 - y^3 - 6y + 2 = 0 \end{cases}$$

найти положительные корни с тремя верными знаками.

Решение. Для применения метода итераций запишем данную систему в виде (3.46)

$$x = \frac{x^3 + y^3}{6} + \frac{1}{2} = \varphi_1(x, y),$$

$$x = \frac{x^3 - y^3}{6} + \frac{1}{3} = \varphi_2(x, y).$$

Рассмотрим квадрат $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1$. Если точка $(x_0,\, y_0)$ находится в этом квадрате, то имеем $0 < \varphi_1(x_0,\, y_0) < 1$ и $0 < \varphi_2(x_0,\, y_0) < 1$. Т. к. $0 < (x_0^3 + y_0^3)/6 < \frac{1}{3}$, $-\frac{1}{6} < (x_0^3 - y_0^3)/6 < \frac{1}{6}$, то при любом выборе точки $(x_0,\, y_0)$ последовательность $(x_n,\, y_n)$ остается в квадрате. Более того, точки $(x_n,\, y_n)$ остаются в прямоугольнике $\frac{1}{2} < x < \frac{5}{6}$, $\frac{1}{6} < y < \frac{1}{2}$ (так как $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$, $\frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$, $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$). Для точек этого прямоугольника имеем из формулы (3.49):

$$\left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right| = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} < \frac{25/36 + 1/4}{2} = \frac{34}{72} < 1,$$

$$\left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right| = \frac{x^2}{2} + \left|-\frac{y^2}{2}\right| < \frac{34}{72} < 1.$$

Следовательно, существует единственное решение в указанном прямоугольнике, и оно может быть найдено методом итераций. Полагая $x_0 = \frac{1}{2}$, $y_0 = \frac{1}{2}$, получим по формуле (3.47)

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\frac{1}{8} + \frac{1}{8}}{6} = 0{,}542; \\ y_1 = \dfrac{1}{3} + \dfrac{\frac{1}{8} - \frac{1}{8}}{6} = 0{,}333, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{0{,}19615}{6} = 0{,}533; \\ y_2 = \dfrac{1}{3} + \dfrac{0{,}1223}{6} = 0{,}354, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = 0{,}533; \\ y_3 = 0{,}351, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_4 = 0{,}532; \\ y_4 = 0{,}351. \end{cases}$$

Так как здесь $q_1 = q_2 = \frac{34}{72} < 0{,}5$, то совпадение первых трех десятичных знаков свидетельствует о достижении требуемой точности. Таким образом, можно принять $\xi = 0{,}532$, $\eta = 0{,}351$.

Замечание. Вместо рассмотренного итерационного процесса (3.47) иногда удобнее использовать построение итерирующих функций для системы (3.46) методом Зейделя:

$$\begin{cases} x_{n+1} = \varphi_1\left(x_n, y_n\right), \\ y_{n+1} = \varphi_2\left(x_{n+1}, y_n\right). \end{cases} \quad n = 0, 1, 2 \ldots$$

3.18. Метод Ньютона для системы двух уравнений

Пусть дана система $\begin{cases} F\left(x, y\right) = 0, \\ G\left(x, y\right) = 0. \end{cases}$

Согласно методу Ньютона, последовательные приближения вычисляются по формулам

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - \dfrac{\Delta_x^{(n)}}{I\left(x_n, y_n\right)}, \\ y_{n+1} = y_n - \dfrac{\Delta_y^{(n)}}{I\left(x_n, y_n\right)}, \end{cases}$$

где $\Delta_x^{(n)} = \begin{vmatrix} F\left(x_n, y_n\right) & F'_y\left(x_n, y_n\right) \\ G\left(x_n, y_n\right) & G'_y\left(x_n, y_n\right) \end{vmatrix}$, $\Delta_y^{(n)} = \begin{vmatrix} F'_x\left(x_n, y_n\right) & F\left(x_n, y_n\right) \\ G'_x\left(x_n, y_n\right) & G\left(x_n, y_n\right) \end{vmatrix}$,

а якобиан $I\left(x, y\right) = \begin{vmatrix} F'_x\left(x_n, y_n\right) & F'_y\left(x_n, y_n\right) \\ G'_x\left(x_n, y_n\right) & G'_y\left(x_n, y_n\right) \end{vmatrix}$.

Начальные приближения x_0, y_0 определяются грубо приближенно (графически, прикидкой и т. д.). Метод Ньютона эффективен только при достаточной близости начального приближения к решению системы.

Метод Ньютона распространяется на системы *n*-уравнений с *n*-неизвестными.

Пример 2. Найти решение системы $\begin{cases} F\left(x, y\right) = x^3 - y^2 - 1 = 0, \\ G\left(x, y\right) = xy^3 - y - 4 = 0 \end{cases}$

методом Ньютона с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$.

Решение. Графически находим начальное приближение $x_0 = 1,5$, $y_0 = 1,5$.

Матрица Якоби

$$I(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 2y \\ y^3 3xy^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

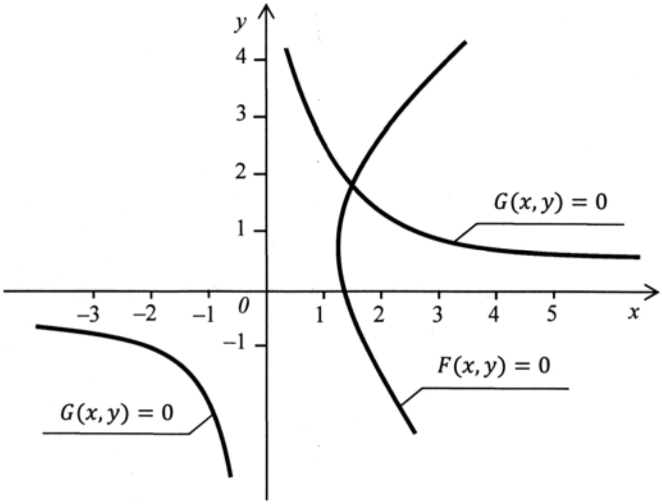

Рис. 3. Графическое нахождение начального приближения

Дальнейшие вычисления приведены в таблице

n	x_n y_n	$F(x_n, y_n)$ $G(x_n, y_n)$	I_n	$\Delta_x^{(n)}$	$\Delta_y^{(n)}$
0	1,5 1,5	0,12500 –0,43750	71,71875	–0,171875	–3,3750
1	1,502397 1,547059	–0,002170 0,015844	77,73277	0,0277998	0,1153255
2	1,502396 1,545570	0,0000017 0,000019			

Ответ: $x^* = 1,502$, $y^* = 1,547$.

Задания.

Отделите графически один из корней данной нелинейной системы и уточните его с помощью программы для компьютера с точностью 10^{-3}:

1) методом простой итерации;
2) методом Ньютона.

1. $\begin{cases} x_2 - \sin x_1 = 0, \\ x_1^2 + x_2^2 = 1, \ x_1 > 0. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1 + 3\lg x_1 - x_2^2 = 0, \\ 2x_1^2 - x_1x_2 - 5x_1 = -1, \quad x_1 > 0, \ x_2 > 0. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, \\ 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_3 = 0, \\ 3x_1^2 - 4x_2 + x_3^2 = 0, \quad x_1, x_2, x_3 > 0. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 1, \\ x_1^2 - x_2 = 0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1 + x_1^2 - 2x_2x_3 = 0{,}1, \\ x_2 - x_2^2 + 3x_1x_3 = -0{,}2, \\ x_3 + x_3^2 + 2x_1x_2 = 0{,}3. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x_1 \cos x_1 - x_2 = 0, \\ x_1^2 + x_2^2 = 1, \ x_1 > 0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_2 - 2x_1 \mathrm{e}^{-x_1} = 0, \\ x_1^2 + x_2^2 = 1, \ x_1 < 0. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1^{2/3} + x_2^{2/3} = 1, \\ x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 = 0, \ x_2 < 0. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1 - 2\sin x_1 + x_2 = 1, \\ x_1^2 + x_2^2 = 1, \ x_1 > 0. \end{cases}$

10. $\begin{cases} {x_1}^2 + x_2 + {x_3}^2 = 1, \\ {x_1}^2 + 2{x_2}^2 - x_3 = 0, \\ 2{x_1}^2 + 2{x_2}^2 = 1, \ x_1, x_2 > 0, \ x_3 < 0. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x_2 - \sqrt{x_1 + 1} = 0, \\ {x_1}^2 - 2x_1 + {x_2}^2 - 2x_2 = -1, \ x_1 > 0. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x_2 - 0{,}5\ln(x_1 + 1) = 0, \\ {x_1}^2 + {x_2}^2 - 2x_2 = 0, \ x_1 > 0. \end{cases}$

13. $\begin{cases} \dfrac{x_1}{1 + 2{x_1}^2} - 2x_2 = 0, \\ {x_1}^2 + 2{x_2}^2 = 1, \ x_1 < 0. \end{cases}$

14. $\begin{cases} \mathrm{e}^{x_1} + 2{x_2}^2 = 4, \\ {x_1}^2 + {x_2}^2 = 1, \ x_1 > 0. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x_2 + 1{,}5\cos(x_1 - 1) = 1, \\ 0{,}4{x_1}^2 + 0{,}6{x_2}^2 = 1, \ x_2 > 0. \end{cases}$

<u>Задания.</u>

1. Для системы $\begin{cases} 2x^2 - xy - 5x + 1 = 0, \\ x + 3\lg x - y^2 = 0 \end{cases}$ найти положительный корень с четырьмя верными знаками.

В вариантах 2–8 найти корни, расположенные в области, ограниченной прямыми $y = 0$; $y = x$; $x = 0{,}5$.

2. $\begin{cases} 2x^2 - xy - y^2 + 2x - 2y + 6 = 0, \\ y - x - 1 = 0. \end{cases}$

3–8. $\begin{cases} \alpha x^3 - y^2 - 1 = 0, \\ xy^3 - y - 4 = 0, \end{cases}$

$\alpha = 1 + 0{,}5k$ ($k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$).

С помощью метода Ньютона решить следующие системы. Результаты получить с четырьмя верными знаками. Начальные приближения найти графически.

9–33. $\begin{cases} \mathrm{tg}(xy + k) = x^2, \\ \alpha x^2 + 2y^2 = 1, \end{cases}$

$x > 0,\ y > 0,\ \alpha = 0{,}5 + 0{,}1 \cdot m,\ k = 0{,}1 \cdot m\ (m = 0, 1, 2, 3, 4).$

Ответы.

1. $x = 3{,}487,\ y = 2{,}262.$
2. $x = 1{,}0000,\ y = 2{,}0000.$

№ варианта	3	4	5	6	7	8
α	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5
x	1,5020	1,3388	1,2343	1,1590	1,1010	1,0544
y	1,5456	1,6124	1,6615	1,7006	1,7333	1,7613

9–33.

α	k				
	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4
0,5	0,66293 0,62460	0,79656 0,58427	0,91099 0,54085	1,0145 0,49265	1,1077 0,43962
0,6	0,64621 0,61215	0,77208 0,56672	0,87646 0,51918	0,96799 0,46786	1,0484 0,41262
0,7	0,63103 0,60053	0,75057 0,55030	0,84723 0,49877	0,93000 0,44417	1,0013 0,38617
0,8	0,61711 0,58963	0,73135 0,53484	0,82180 0,47943	0,89775 0,42145	0,96195 0,36036
0,9	0,60428 0,57938	0,71396 0,52021	0,79926 0,46102	0,86964 0,39960	0,92814 0,33519

4. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Лабораторная работа № 15

Тема: **Эмпирические распределения и числовые характеристики** [12].

Цель: изучить группировку выборки, построение гистограммы и полигона, нахождение эмпирической функции распределения, нахождение числовых характеристик выборки.

Необходимые теоретические сведения.

Генеральной совокупностью называется совокупность элементов, объединенных по некоторому признаку, из которых производится выборка. ***Выборочная совокупность*** или ***выборка*** – совокупность объектов, случайно выбранных для исследования. Под ***объемом выборки*** понимается количество объектов, входящих в выборку. Пусть из совокупности извлечена выборка объемом n. Выборочная совокупность, расположенная по возрастанию (чаще всего) или убыванию значения признака, называется ***вариационным рядом***, а ее объекты – ***вариантами***. Если значения вариант совпадают или отличаются незначительно, то их можно сгруппировать, придав частоту каждой варианте. В результате получим сгруппированный вариационный ряд. ***Частостью*** или ***относительной частотой*** варианты называется отношение частоты варианты к объему выборки: $\omega_i = \dfrac{m_i}{n}$.

Статистическое распределение – такое распределение, по которому каждому возможному значению варианты соответствует частота (относительная частота) ее появления. Статистическое распределение записывается в виде таблицы, в которой в первой строке перечислены все значения вариант, а во второй – частоты или частости, которые соответствуют вариантам.

x_i	x_1	x_2	x_3	…	x_k
m_i	m_1	m_2	m_3	…	m_k

$$\sum_{i=1}^{k} m_i = n.$$

Для построения интервального статистического ряда множество вариант разбивают на полуинтервалы $[a_i;\, a_{i+1})$, то есть группируют. Рекомендуется число интервалов k определять по формуле

$$k = 1 + 1{,}4 \cdot \ln n.$$

Длина интервала $\Delta = \dfrac{x_{\max} - x_{\min}}{k}$.

Для наглядности используются графические изображения вариационных рядов в виде полигона и гистограммы.

Полигоном частот или частостей называется ломаная линия, соединяющая точки с координатами $(x_i;\, m_i)$ или $(x_i;\, w_i)$. ***Гистограммой частот*** или частостей называют ступенчатую фигуру, составленную из прямоугольников с основанием Δ и высотой $\dfrac{m_i}{\Delta}$ или $\dfrac{w_i}{\Delta}$.

Эмпирической функцией распределения называют функцию $F^*(x)$, определяющую для каждого значения x относительную частоту события $X < x$: $F^*(x) = w(X < x) = \dfrac{m_x}{n}$, где m_x – число вариант (с учетом их кратностей), меньших x; *n – объем выборки.*

Для описания выборки применяются следующие числовые характеристики. ***Выборочной средней*** называется среднее значение варианты, вычисленное по данным выборки:

$$\overline{x_{\text{в}}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \quad \text{или} \quad \overline{x_{\text{в}}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} m_i x_i.$$

где m_i – частота варианты x_i.

Выборочной дисперсией называется дисперсия, вычисленная по данным выборки:

$$D_{\text{в}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x_{\text{в}}})^2 \quad \text{или} \quad D_{\text{в}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} m_i (x_i - \overline{x_{\text{в}}})^2.$$

Выборочная дисперсия равна разности между средним значением квадрата вариант и квадратом выборочного среднего:

$$D_{\text{в}} = \overline{X^2} - (\overline{x_{\text{в}}})^2, \text{ где } \overline{X^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i^2 m_i.$$

Выборочным средним квадратическим отклонением называется корень квадратный из выборочной дисперсии: $\sigma_{\text{в}} = \sqrt{D_{\text{в}}}$.

<u>Задания</u>: По индивидуальному номеру своего варианта $N = \overline{1,30}$ из данной таблицы выборки объема $n = 340$ найти свою соответствующую выборку объема $n = 50$ по правилу:

N варианта	Номер *I* строки (вкл.)
1	1–5
2	2–6
3	3–7
…	…
29	29–33
30	30–34

i										
1	45,6	43,2	45,3	40,5	33,1	50,4	48,8	55,6	71,9	58,1
2	59,9	58,6	59,2	56,7	39,6	50,7	42,4	57,0	48,2	43,6
3	42,8	44,8	55,6	47,6	50,9	62,6	42,9	50,0	61,1	58,9
4	21,0	28,4	52,1	43,8	38,0	51,0	57,7	53,1	50,1	42,3
5	45,9	43,3	48,7	60,2	51,8	55,1	57,4	49,8	52,8	51,6
6	54,3	45,2	43,0	80,5	47,1	37,2	57,6	46,1	38,0	39,6
7	49,8	50,3	52,6	54,9	52,4	43,2	33,9	64,1	59,7	38,4
8	51,4	67,0	46,8	29,7	35,9	36,7	44,8	50,6	44,0	46,7
9	55,4	52,2	54,0	38,4	38,9	39,0	45,9	36,9	21,6	62,8
10	57,9	51,4	39,9	40,7	41,2	52,8	46,0	63,0	36,2	53,8
11	54,4	67,6	43,5	55,5	65,5	31,8	63,1	39,5	54,6	39,5
12	37,6	54,2	30,8	48,7	54,1	64,7	37,7	46,2	54,8	51,9
13	52,0	55,2	58,2	59,3	59,0	52,6	43,1	54,7	48,5	41,4
14	71,1	37,6	33,0	53,9	35,7	45,9	58,7	44,3	40,9	41,3

15	61,0	39,8	37,5	56,2	42,6	55,4	56,6	55,2	51,5	49,5
16	53,2	52,5	48,3	45,5	52,9	51,5	40,7	57,9	57,2	60,4
17	58,1	56,2	47,5	49,1	56,8	57,9	53,6	47,9	48,4	51,4
18	58,6	69,6	50,7	55,6	55,6	68,9	64,8	27,0	56,6	45,6
19	45,3	50,9	43,0	53,5	41,3	69,0	22,7	58,7	71,8	60,8
20	61,8	40,3	34,2	54,6	64,7	61,7	42,3	55,1	55,0	42,0
21	43,7	44,5	46,5	45,4	52,5	46,3	47,3	62,9	51,9	70,9
22	34,7	50,8	54,2	66,3	56,2	32,8	36,3	74,0	57,3	50,0
23	41,5	39,8	33,7	39,5	61,2	59,5	57,6	39,4	45,9	66,1
24	50,2	46,7	45,4	54,0	55,0	49,2	50,8	54,2	42,3	48,7
25	35,4	52,0	66,8	40,9	57,9	48,7	38,8	57,2	52,9	41,2
26	44,5	44,3	44,2	41,6	34,2	49,3	49,9	54,5	70,8	59,2
27	58,8	59,7	58,1	57,6	40,7	49,6	52,4	56,9	49,3	44,7
28	41,7	45,9	54,5	48,7	49,8	61,5	43,8	49,9	62,2	57,8
29	22,1	27,3	50,2	44,9	39,1	50,8	56,6	54,2	49,3	43,4
30	46,0	42,2	49,8	59,1	52,8	56,2	58,5	48,7	53,9	50,5
31	55,4	44,1	44,1	79,4	48,2	38,3	56,5	45,2	39,1	38,5
32	48,7	51,4	51,5	55,0	51,3	44,3	34,8	65,2	60,7	37,3
33	52,3	68,1	45,7	28,6	36,8	35,8	45,9	49,5	45,1	45,6
34	54,3	53,3	55,1	39,5	37,8	38,9	44,8	37,8	22,7	61,7

1. Найти максимальное $x_{\max}$ и минимальное $x_{\min}$ значения выборки, а также размах выборки $R = x_{\max} - x_{\min}$.

2. Сгруппировать выборку объема $n = 50$. Промежуток $[x_{\max} - x_{\min}]$ разбить на $m = 6$ интервалов одинаковой длины и подсчитать число n_j выборочных значений, которые попали в j-й интервал. Каждый интервал представить также одним числом – срединным значением.

3. Записать эмпирическую функцию распределения $F^*(x)$.

4. Найти основные числовые характеристики выборки: $x_{в}$, $D_{в}$, $\sigma_{в}$.

Лабораторная работа № 16

Тема: **Интервальные оценки**.

Цель: изучить доверительные интервалы для неизвестных параметров.

Необходимые теоретические сведения.

Пусть $\Theta^* = \Theta^*(x_1, ..., x_n)$ – функция выборки. Это есть случайная величина, называемая ***статистикой***.

Интервальной называют оценку, которая определяется случайным интервалом $\left(\Theta_1^*, \Theta_2^*\right), \Theta_1^* < \Theta_2^*$. В качестве интервальной оценки используются доверительные интервалы.

Доверительным интервалом для неизвестного параметра Θ называется случайный интервал $\left(\Theta_1^*, \Theta_2^*\right)$, который с заданной вероятностью γ (надежностью) накрывает неизвестный параметр Θ.

Если исследуемая СВ распределена по нормальному закону с известным средним квадратическим отклонением σ, то доверительный интервал для математического ожидания определяется неравенством

$$\overline{x_{\text{в}}} - t_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \overline{x_{\text{в}}} + t_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \qquad (4.1)$$

где $\delta = t_\gamma \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ – точность оценки;

n – объем выборки;

t_γ – значение аргумента функции Лапласа, при котором $\Phi(t_\gamma) = \dfrac{\gamma}{2}$.

Доверительная вероятность, $\gamma = 1 - \alpha$	Квантили, t_γ
0,90	1,64
0,95	1,96
0,99	2,58
0,9973	3,00
0,999	3,37

Если среднее квадратическое отклонение неизвестно, то доверительный интервал для математического ожидания исследуемой СВ определяется неравенством

$$\overline{x_{\text{в}}} - t_{\gamma,n}\frac{S}{\sqrt{n}} < a < \overline{x_{\text{в}}} + t_{\gamma,n}\frac{S}{\sqrt{n}}, \tag{4.2}$$

где $S = \sqrt{D_u}$.

Значения $t_{\gamma,n}$ находят по таблице Приложения 1 по заданным n и γ. Число $\delta = t_{\gamma,n}\frac{S}{\sqrt{n}}$ называют точностью оценки математического ожидания.

Доверительный интервал для среднего квадратического отклонения исследуемой СВ определяется неравенством $Sq_1 < \sigma < Sq_2$.

Значения q_1 и q_2 находятся по таблице Приложения 2 по заданным γ и n.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Значения функции $t_{\gamma,n}$: $x - t_{\gamma,n}\frac{\overline{S}}{\sqrt{n}} < a < \overline{x} + t_{\gamma,n}\frac{S}{\sqrt{n}}$

$n \setminus \gamma$	0,95	0,99	0,999	$n \setminus \gamma$	0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	8,61	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,720	3,600
9	2,31	3,36	5,04	40	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,991	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Значения коэффициентов q_1 и q_2; $Sq_1 < \sigma < Sq_2$

	0,99		0,98		0,95		0,90	
	q_1	q_2	q_1	q_2	q_1	q_2	q_1	q_2
1	0,356	15,0	0,388	79,8	0,446	31,9	0,510	15,9
2	0,434	14,1	0,466	9,97	0,521	6,28	0,578	4,40
3	0,483	6,47	0,514	5,11	0,566	3,73	0,620	2,92
4	0,519	4,39	0,549	3,67	0,599	2,87	0,649	2,37
5	0,546	3,48	0,576	3,00	0,624	2,45	0,672	2,090
6	0,569	2,98	0,597	2,62	0,644	2,202	0,690	1,916
7	0,588	2,66	0,616	2,377	0,661	2,035	0,705	1,797
8	0,604	2,440	0,631	2,205	0,675	1,916	0,718	1,711
9	0,618	2,277	0,644	2,076	0,688	1,826	0,729	1,645
10	0,630	2,154	0,656	1,977	0,699	1,755	0,739	1,593
11	0,641	2,056	0,667	1,898	0,708	1,698	0,748	1,550
12	0,651	1,976	0,676	1,833	0,717	1,651	0,755	1,515
13	0,660	1,910	0,685	1,779	0,725	1,611	0,762	1,485
14	0,669	1,854	0,693	1,733	0,732	1,577	0,769	1,460
15	0,676	1,806	0,700	1,694	0,739	1,548	0,775	1,437
16	0,683	1,764	0,707	1,659	0,745	1,522	0,780	1,418
17	0,690	1,727	0,713	1,629	0,750	1,499	0,785	1,400
18	0,696	1,695	0,719	1,602	0,756	1,479	0,790	1,385
19	0,702	1,668	0,725	1,578	0,760	1,460	0,794	1,370
20	0,707	1,640	0,730	1,556	0,765	1,414	0,798	1,358
21	0,712	1,617	0,734	1,536	0,769	1,429	0,802	1,346
23	0,722	1,576	0,743	1,502	0,777	1,402	0,809	1,326
24	0,726	1,558	0,747	1,487	0,781	1,391	0,812	1,316
25	0,730	1,541	0,751	1,473	0,784	1,380	0,815	1,308
26	0,734	1,526	0,755	1,460	0,788	1,371	0,818	1,300
27	0,737	1,512	0,758	1,448	0,791	1,361	0,820	1,293
29	0,744	1,487	0,765	1,426	0,796	1,344	0,825	1,279
30	0,748	1,475	0,768	1,417	0,799	1,337	0,828	1,274
40	0,774	1,390	0,792	1,344	0,821	1,279	0,847	1,228

	0,99		0,98		0,95		0,90	
	q_1	q_2	q_1	q_2	q_1	q_2	q_1	q_2
50	0,793	1,336	0,810	1,297	0,837	1,243	0,861	1,199
60	0,808	1,299	0,824	1,265	0,849	1,217	0,871	1,179
70	0,820	1,272	0,835	1,241	0,858	1,198	0,879	1,163
80	0,829	1,250	0,844	1,222	0,866	1,183	0,886	1,151
90	0,838	1,233	0,852	1,207	0,873	1,171	0,892	1,141
100	0,845	1,219	0,858	1,195	0,878	1,161	0,897	1,133
200	0,887	1,15	0,897	1,13	0,912	1,11	0,925	1,09

Задания:

1. 1.1. Найти доверительный интервал для оценки неизвестного математического ожидания a с надежностью 0,99 нормально распределенного признака X генеральной совокупности, известны: $\sigma = 4,\ \overline{x} = 10,2,\ n = 16.$

1.2. Для исследования нормально распределенной СВ извлечена выборка объемом 25:

$x_i - x_{i+1}$	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60
m_i	1	8	10	3	3

Найти с надежностью $\gamma = 0,95$ доверительные интервалы для математического ожидания и среднего квадратического отклонения исследуемой СВ.

2. 2.1. Выборка из большой партии электроламп содержит 100 ламп. Средняя продолжительность горения лампы из выборки оказалась равной 1000 ч. Найти с доверительной вероятностью 0,95 доверительный интервал для средней продолжительности t горения лампы всей партии, если известно, что среднее квадратическое отклонение продолжительности горения лампы $\sigma = 40$ ч.

2.2. Найти с надежностью 0,99 доверительные интервалы для математического ожидания и среднего квадратического по данным выборки:

x_i	12	14	16	18	20	22
m_i	5	15	50	16	10	4

3. 3.1. Среднее значение расстояния до ориентира по четырем независимым измерениям равно 2250 м, среднеквадратическая ошибка измерительного прибора $\sigma = 40$ м, систематических ошибок нет. Найти с надежностью 95 % доверительный интервал для измеряемой величины.

3.2. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема $n = 10$:

x_i	–2	1	2	3	4	5
m_i	2	1	2	2	2	1

Оценить с доверительной вероятностью 0,95 математическое ожидание a нормально распределенного признака генеральной совокупности по выборочному среднему с помощью доверительного интервала.

4. 4.1. СВ X распределена нормально со средним квадратическим отклонением $\sigma = 2$. Найти доверительный интервал для математического ожидания по данным выборки: $n = 40$, $\overline{x} = 1,4$ с надежностью 0,95.

4.2. Найти с надежностью 0,99 доверительные интервалы для математического ожидания и среднего квадратического отклонения по данным выборки:

$x_i - x_{i+1}$	46–50	50–54	54–58	58–62	62–66	66–70	70–74	74–78	78–82	82–86
m_i	2	4	6	8	12	30	18	8	7	5

5. 5.1. Найти доверительный интервал для оценки с надежностью 0,99 неизвестного математического ожидания a нормально распределенного признака X генеральной совокупности, если даны генеральное среднее квадратическое отклонение σ, выборочная средняя $\overline{x}$ и объем выборки n: $\sigma = 5$, $\overline{x} = 16,8$, $n = 25$.

5.2. По данным выборки найти доверительный интервал с надежностью 0,99, накрывающий среднее квадратическое отклонение:

x_i	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
m_i	2	4	7	6	1

6. 6.1. Определение скорости автомобиля с прицепом было проведено на мерном участке в пяти испытаниях, в результате которых вычислена оценка $v = 52,2$ км/ч. Найти доверительный интервал с надежностью 95 %, если известно, что рассеивание скорости подчинено нормальному закону со среднеквадратическим отклонением $\sigma = 0,126$ км/ч.

6.2. Из генеральной совокупности СВ, распределенной по нормальному закону, выбрано 100 значений СВ. Найти доверительные интервалы для математического ожидания и среднего квадратического отклонения с надежностью 0,95:

$x_i - x_{i+1}$	100–120	120–140	140–160	160–180	180–200
m_i	17	40	32	8	3

7. 7.1. Измеряется длина металлического стержня. Предполагается, что результаты измерения подчинены нормальному закону. Сколько следует произвести измерений, чтобы с доверительной вероятностью 0,95 можно было бы утверждать, что, принимая среднее арифметическое за истинную длину стержня, совершают погрешность, не превышающую 0,04 мм, если среднее квадратическое отклонение $\sigma = 0,01$ см?

7.2. Для исследования нормально распределенной СВ извлечена выборка:

$x_i - x_{i+1}$	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60
m_i	2	8	30	7	3

Найти с надежностью $\gamma = 0,95$ доверительные интервалы для математического ожидания и среднего квадратического отклонения исследуемой СВ.

8. 8.1. Найти минимальный объем выборки, при котором с надежностью 0,975 точность оценки математического ожидания генеральной совокупности по выборочной средней будет равна $\delta = 0,3$, если известно среднее квадратическое отклонение $\sigma = 1,2$ нормально распределенной совокупности.

8.2. Оценить с доверительной вероятностью 0,99 математическое ожидание a нормально распределенного признака генеральной совокупности по выборочному среднему с помощью доверительного интервала

x_i	15	25	35	45	55
m_i	4	14	60	16	6

9. 9.1. Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания a с надежностью 0, 95, если $\overline{X} = 75{,}14,\ \ \sigma = 9,\ \ n = 81.$

9.2. С целью определения средней суммы Q вкладов в банке произведена выборка

Сумма, млн. руб.	10–30	30–50	50–70	70–90	90–110	110–130
m_i	1	3	10	30	60	7

Найти границы среднего вклада с надежностью 0,95.

10. 10.1. Пусть СВ X имеет нормальное распределение с известным средним квадратическим отклонением $\sigma = 2.$ Требуется найти доверительный интервал для математического ожидания a, если среднее арифметическое значение результатов $n = 16$ прямых равноточных измерений $\overline{x} = 20{,}09.$ Доверительную вероятность γ принять равной 0,90.

10.2. Станок-автомат штампует валики. По выборке объемом 100 вычислены выборочная средняя $\overline{x}_{\text{в}} = 12{,}5$ и $S = 2{,}1.$ Найти с надежностью 0,95 доверительные интервалы для математического ожидания и среднего квадратического отклонения.

11. 11.1. Найти минимальный объем выборки, на основании которой можно было бы оценить математическое ожидание исполнения некоторой технической операции с ошибкой, не превышающей 10 с, и надежностью $\gamma = 0{,}95,$ если предположить, что время исполнения этой технической операции X является СВ, имеющей нормальное распределение, $X \in N(a, 50).$

11.2. Для исследования нормально распределенной СВ извлечена выборка:

$x_i - x_{i+1}$	2–12	12–22	22–32	32–42	42–52
m_i	2	23	50	24	2

Найти с надежностью $\gamma = 0,95$ доверительные интервалы для математического ожидания и среднего квадратичного отклонения исследуемой СВ.

12. 12.1. Найти доверительный интервал для оценки с надежностью $\gamma = 0,99$ неизвестного математического ожидания нормально распределенного признака *X*, если известно, что $\sigma = 4,$ а по данным выборки объемом 100 вычислено $\overline{x}_{\text{в}} = 12,4.$

12.2. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема $n = 12$:

x_i	–0,5	–0,4	–0,2	0	0,2	0,6	0,8	1	1,2	1,5
m_i	1	2	1	1	1	1	1	1	2	1

При помощи доверительного интервала оценить с надежностью 0,95 математическое ожидание *a* нормально распределенного признака генеральной совокупности.

13. 13.1. СВ имеет нормальное распределение со средним квадратическим отклонением $\sigma = 4.$ Требуется найти доверительный интервал для математического ожидания *a*, если $n = 25,$ $\overline{x} = 12,8.$ Доверительную вероятность γ принять равной 0,90.

13.2. Количественный признак *X* генеральной совокупности распределен нормально. По выборке объема $n = 16$ найдены выборочная средняя $\overline{x} = 20,2$ и «исправленное» среднее квадратическое отклонение $S = 0,8.$ Оценить неизвестное математическое ожидание при помощи доверительного интервала с надежностью 0,95.

14. 14.1. СВ *X* имеет нормальное распределение с известным средним квадратическим отклонением $\sigma = 3.$ Найти доверительный интервал для оценки неизвестного математического ожидания *a* по выборочным средним $\overline{x},$ если объем выборки $n = 36$ и задана надежность оценки $\gamma = 0,95.$

14.2. Количественный признак X генеральной совокупности распределен нормально. По выборке объема $n = 25$ найдено «исправленное» среднее квадратическое отклонение $S = 0,8$. Найти доверительный интервал, покрывающий генеральное среднее квадратическое отклонение σ с надежностью 0,95.

15. 15.1. Выборочная оценка емкости конденсатора определялась по результатам 16 наблюдений. Найти 95 % доверительный интервал для математического ожидания (среднего значения), $\overline{x} = 20$ мкФ; среднеквадратическое отклонение известно и равно 4 мкФ.

15.2. Для исследования нормально распределенной СВ извлечена выборка объемом $n = 50$:

$x_i - x_{i+1}$	2–4	4–6	6–8	8–10	10–12
m_i	5	15	60	16	4

Найти с надежностью $\gamma = 0,99$ доверительные интервалы для математического ожидания и среднего квадратического отклонения исследуемой СВ.

16. 16.1. Время безотказной работы электронной лампы распределено по нормальному закону. Найти доверительный интервал для неизвестного математического ожидания, если $\overline{x} = 500$, $n = 100$, $\sigma = 10$ ч, $\gamma = 0,95$.

16.2. Найти доверительный интервал для неизвестного математического ожидания a; по данным выборки $\overline{x} = 20$ см, $n = 16$, $S = 9$, $\gamma = 0,99$.

17. 17.1. Найти доверительный интервал для неизвестного математического ожидания a, если $\overline{x} = 20$ мкФ, $n = 25$, $\sigma = 4$ мкФ, $\gamma = 0,99$.

17.2. Найти доверительный интервал для неизвестного математического ожидания a, если по данным выборки для диаметра вала, если $\overline{x} = 30$ мм, $n = 9$, $S^2 = 9$ мм^2, $\gamma = 0,95$.

18. 18.1. Найти доверительный интервал для неизвестного математического ожидания a, если $\overline{x} = 200$, $n = 81$, $S = 9$, $\gamma = 0,99$.

18.2. Найти 95% доверительный интервал для среднего содержания углерода в единице продукта, если $\overline{x} = 18$ г, $n = 25$, $S^2 = 16$ г^2.

19. 19.1. Найти доверительный интервал для оценки с надежностью $\gamma = 0,99$ неизвестного математического ожидания нормально распределенного признака *X*, если известно $\sigma = 4,$ а по данным выборки объемом 100 вычислено $\overline{x}_{\text{в}} = 12,4.$

19.2. Найти доверительный интервал с надежностью 0,99 неизвестного диаметра вала, если $n = 16,$ $\overline{x} = 29$ мм, $S^2 = 4,5$ мм^2.

20. 20.1. Для определения привеса рыбы за год в одном из рыбхозов проводились выборочные исследования. Разводимые в пруду карпы взвешивались и отпускались обратно. Результаты 100 таких измерений показали, что годовой привес рыбы в среднем составил 200 г, а дисперсия – 320 г. Найти с надежностью 0,95 доверительный интервал для годового привеса рыбы ΔP.

20.2. Найти с надежностью $\gamma = 0,99$ доверительные интервалы для неизвестных математического ожидания и среднего квадратического отклонения исследуемой СВ по данным выборки:

$x_i - x_{i+1}$	2–4	4–6	6–8	8–10	10–12
m_i	13	20	80	25	12

21. 21.1. Одним и тем же прибором со средним квадратическим отклонением случайных ошибок измерения $\sigma = 40$ м проведено пять различных измерений расстояния. Найти с надежностью 0,95 доверительный интервал для оценки истинного расстояния, если среднее всех проведенных измерений $\overline{x}_{\text{в}} = 2000$ м.

21.2. Требуется найти 95 % доверительный интервал для математического ожидания СВ, распределенной по нормальному закону, если по данным выборки $n = 100,$ $S^2 = 49,$ $\overline{x} = 800.$

22. 22.1. Дано: $N(a, 25),$ $n = 100,$ $\sigma = 16,$ $\overline{x} = 1000.$ Найти 99 % доверительный интервал для a.

22.2. Найти доверительный интервал для математического ожидания углерода в единице продукта, если $n = 9,$ $\overline{x} = 18,8$ г, $S^2 = 20$ г^2, $\gamma = 0,99.$

23. 23.1. Найти минимальный объем выборки, при котором с надежностью 0,925 точность оценки математического ожидания нормально распределенной генеральной совокупности по выборочной средней будет равна 0,2, если известно среднее квадратическое отклонение генеральной совокупности $\sigma = 1{,}5$.

23.2. СВ распределена по нормальному закону: $n = 100$, $\overline{x}_{\text{в}} = 40{,}2$, $S_{\text{в}} = 5{,}4$, $\gamma = 0{,}95$. Найти доверительные интервалы для a и σ.

24. 24.1. Найти минимальный объем выборки, при котором с надежностью 0,975 точность оценки математического ожидания a по выборочной средней равна 0,3, если $\sigma = 1{,}2$.

24.2. Из генеральной совокупности извлечена выборка

x_i	1	2	3	4	5
m_i	5	6	30	5	4

Оценить с вероятностью 0,95 математическое ожидание a нормально распределенного признака генеральной совокупности по выборочному среднему с помощью доверительного интервала.

25. 25.1. Станок-автомат штампует валики. По выборке объема $n = 100$ вычислена выборочная средняя диаметров изготовленных валиков. Найти с надежностью 0,95 точность δ, с которой выборочная средняя оценивает математическое ожидание диаметров изготовляемых валиков, зная, что их среднее квадратическое отклонение $\sigma = 2$ мм.

25.2. Из группы делается случайная выборка 20 бычков. Найти выборочные $\overline{x}_{\text{в}}$, $S_{\text{в}}$, а также 95 % доверительный интервал для математического ожидания и дисперсии веса всех бычков в группе. Распределение веса бычков в группе нормально.

Вес бычков, кг	660	620	630	640
Количество (частота)	5	4	10	1

26. 26.1. СВ X распределена нормально со средним квадратическим отклонением $\sigma = 2$. Найти доверительный интервал для математического ожидания a, если $n = 16$, $\overline{x} = 20{,}09.$. Доверительную вероятность γ принять равной 0,90.

26.2. Известны результаты измерения некоторого диаметра $x_1 = 2$, $x_2 = 2{,}035$, $x_3 = 2{,}015$, $x_4 = 2{,}035$, $x_5 = 2{,}015$. Оценить с помощью доверительного интервала истинный диаметр, приняв $\gamma = 0{,}95$.

27. 27.1. Глубина дорожки подшипника измеряется оптическим глубиномером, систематическая ошибка которого равна нулю, а случайные ошибки распределены нормально со среднеквадратическим отклонением $\sigma = 20$ мкм. Сколько надо сделать измерений, чтобы ошибка измерения была не более 15 мкм при доверительной вероятности 0,90?

27.2. Выборка измерений роста 100 студентов дала следующие результаты: средний рост $\overline{x} = 1{,}73$, а несмещенная выборочная дисперсия $S^2 = 0{,}00245$. Найти: а) 95 %-й, б) 99 %-й доверительные интервалы для среднего этой совокупности студентов.

28. 28.1. Генеральная совокупность распределена нормально $N(a,1)$. Найти доверительный интервал для математического ожидания a, если $n = 25$, $\gamma = 0{,}90$, $\overline{x}_{\text{в}} = 5$.

28.2. СВ X распределена нормально. Найти 95 % доверительные интервалы для a и σ; $n = 100$, $\overline{x}_{\text{в}} = 40{,}1$, $S_{\text{в}} = 0{,}04$.

29. 29.1. Найти доверительный интервал для неизвестного математического ожидания нормально распределенной СВ, если $\overline{x} = 1000$, $n = 100$, $\sigma = 16$, $\gamma = 0{,}90$.

29.2. Для исследования нормально распределенной СВ извлечена выборка объемом $n = 100$:

$x_i - x_{i+1}$	3	5	7	9	11
m_i	7	9	70	8	6

Найти с надежностью $\gamma = 0{,}95$ доверительные интервалы для математического ожидания a и среднего квадратического отклонения σ.

30. 30.1. Найти доверительный для оценки неизвестного математического ожидания a с надежностью $\gamma = 0{,}99$ нормально распределенного признака X генеральной совокупности, если известны: $\sigma = 25$, $\overline{x} = 400$, $n = 100$.

30.2. Количественный признак X генеральной совокупности распределен нормально. По выборке объема $n = 25$ найдено «исправленное» среднее квадратическое отклонение $S = 0{,}8$. Найти доверительный интервал, покрывающий генеральное среднее квадратическое отклонение σ с надежностью 0,95.

Лабораторная работа № 17

Тема: **Статистическая проверка гипотез. Критерий согласия Пирсона**.

Цель: изучить критерий согласия Пирсона.

Необходимые теоретические сведения.

Статистической называется гипотеза о предполагаемом виде неизвестного распределения СВ или о значениях параметров известного вида распределения. ***Нулевая гипотеза*** H_0 – выдвинутая гипотеза. ***Конкурирующей (альтернативной)*** называется гипотеза, которая противоречит нулевой гипотезе. При проверке статистической гипотезы могут быть допущены ошибки двух родов. Ошибка первого рода – будет отклонена верная гипотеза. Ошибка второго рода – будет принята неверная гипотеза.

Вероятность допустить ошибку первого рода называется ***уровнем значимости***. Для проверки статистической гипотезы используют специальную статистику, которая называется ***критерием***. По рассчитанному значению критерия определяют принимать или отвергать нулевую гипотезу. Критерий согласия – это проверка гипотезы о виде распределения СВ.

Одним из основных критериев согласия является критерий χ^2 Пирсона. При проверке гипотезы с помощью критерия Пирсона поступают следующим образом:

– из генеральной совокупности извлекают выборку объемом n;

– по выборке вычисляют $\overline{x}_{\text{в}}$ и $\sigma_{\text{в}}$;

– переходят к нормированной СВ по формуле $U_i = \dfrac{x_i - \overline{x}_{\text{в}}}{\sigma_{\text{в}}}$;

– находят вероятности попадания в интервал $\left(U_i, U_{i+1}\right)$, $P_i = \Phi(U_{i+1}) - \Phi(U_i)$;

– вычисляют теоретические частоты $m_i' = nP_i$;

– вычисляют статистику Пирсона $\chi^2_{\text{набл}} = \sum\limits_{i=1}^{k} \dfrac{(m_i - m_i')^2}{m_i'}$;

– из таблицы критических точек распределения Пирсона по уровню значимости α и числу степеней свободы $\nu = k - 1 - r$ определяют $\chi^2_{\text{кр}}$, где k – число интервалов в вариационном ряде, r – количество параметров закона распределения, которые оцениваются по выборке (для нормального закона $r = 2$);

– если $\chi^2_{\text{набл}} \le \chi^2_{\text{кр}}$, то нет необходимости отвергать нулевую гипотезу, т. е. эмпирические и теоретические частоты согласуются;

– если $\chi^2_{\text{набл}} > \chi^2_{\text{кр}}$, то гипотеза отвергается, т. е. расхождение между теоретическими и эмпирическими частотами существенно.

Задания:

В задачах 1–30 дан интервальный статистический ряд распределения частот экспериментальных значений случайной величины *X*. Требуется:

1) построить полигон и гистограмму частостей (относительных частот) СВ *X*;

2) по виду полигона и гистограммы и, исходя из механизма образования СВ, сделать предварительный выбор закона распределения;

3) вычислить выборочную среднюю $\bar{x}_{\text{в}}$ и «исправленное» среднее квадратическое отклонение *S*;

4) записать гипотетическую функцию распределения и плотность распределения;

5) найти доверительные интервалы для математического ожидания и среднего квадратического отклонения при доверительной вероятности $\gamma = 0{,}95$;

6) найти теоретические частоты нормального закона распределения и проверить гипотезу о нормальном распределении СВ с помощью критерия Пирсона при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$.

1. В таблице приведены статистические данные о трудоемкости операции (в минутах) «ремонт радиатора автомобиля ЗИЛ-130»:

x_i трудоемкость операции (мин.)	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50
частота m_i	7	25	36	24	8

2. Даны значения температуры масла в двигателе автомобиля ЗИЛ-100 при средних скоростях:

x_i значения температуры масла(град.)	40–42	42–44	44–46	46–48	48–50
частота m_i	8	25	35	22	10

3. Даны результаты измерения диаметров валиков:

x_i диаметр валика (мм)	9,74–9,76	9,76–9,78	9,78–9,80	9,80–9,82	9,82–9,84
частота m_i	8	24	48	14	6

4. Даны результаты исследования продолжительности горения 100 ламп:

x_i время горения (час.)	0–300	300–600	600–900	900–1200	1200–1500
частота m_i	1	6	30	60	3

5. Даны результаты проверки размеров отклонений 200 деталей от номинала с точностью до 1 мкм:

x_i размер (мкм)	0–2	2–4	4–6	6–8	8–10
частота m_i	18	39	90	43	10

6. Приведены отклонения внутренних диаметров 250 шестерен, обработанных на станке, от заданного размера:

x_i границы интервала (мм)	0–5	5–10	10–15	15–20	20–25
частота m_i	15	75	100	50	10

7. Даны результаты выборочного опроса 100 рабочих предприятия о зарплате (руб.):

x_i границы интервала (руб.)	900–906	906–912	912–918	918–924	924–930
частота m_i	8	12	60	15	5

8. Даны результаты исследования прочности на сжатие (СВ X) 200 образцов бетона:

x_i интервалы прочности (МПа)	19–20	20–21	21–22	22–23	23–24	24–25
частота m_i	10	26	56	64	30	14

9. Дана величина контрольного размера 100 деталей, изготовленных на одном станке:

x_i границы интервала (мм)	2,9–3,9	3,9–4,9	4,9–5,9	5,9–6,9	6,9–7,9
частота m_i	5	15	55	19	6

10. Даны результаты измерений входных сопротивлений 150 электронных ламп (Ом):

x_i границы интервала (Ом)	3,0–3,6	3,6–4,2	4,2–4,8	4,8–5,4	5,4–6,0
частота m_i	10	35	63	22	20

11. Даны результаты испытания стойкости 200 удлиненных сверл диаметра 4 мм (в часах):

x_i стойкость сверла	3,0–3,2	3,2–3,4	3,4–3,6	3,6–3,8	3,8–4,0
частота m_i	16	50	70	44	20

12. Даны результаты исследования 100 напыленных образцов на прочность напыленного слоя (в кг/мм^2):

x_i прочность	2,0–2,2	2,2–2,4	2,4–2,6	2,6–2,8	2,8–3,0
частота m_i	7	22	38	23	10

13. Даны результаты исследования на разрыв 100 образцов дюралюминия (в кг/мм^2):

x_i предел прочности (в кг/мм^2)	42–43	43–44	44–45	45–46	46–47
частота m_i	8	25	36	22	9

14. Даны результаты содержания фосфора (6 %) в 100 чугунных образцах:

x_i содержание фосфора	0,1–0,2	0,2–0,3	0,3–0,4	0,4–0,5	0,5–0,6
частота m_i	7	22	38	24	9

15. Даны результаты испытания стойкости 100 сверл (в часах):

x_i стойкость (в часах)	17,5–22,5	22,5–27,5	27,5–32,5	32,5–37,5	37,5–42,5
частота m_i	7	20	44	20	9

16. Даны данные о среднесуточном пробеге 100 автомобилей автоколонны (в сотнях км):

x_i (сотни км)	1,2–1,6	1,6–2,0	2,0–2,4	2,4–2,8	2,8–3,2
частота m_i	8	19	47	20	6

17. С автомата, обрабатывающего втулки диаметра $d = 40 + 0,2$ мм, взята выборка изделий объемом 100. Результаты измерения диаметров втулок приведены в таблице:

x_i диаметр (в мм)	40,00–40,04	40,04–40,08	40,08–40,12	40,12–40,16	40,16–40,20
частота m_i	8	19	44	20	9

18. В таблице приведены статистические данные о трудоемкости (в минутах) операции «Контроль механического состояния автомобиля после возвращения в гараж»:

x_i трудоемкость (в мин.)	3–4	4–5	5–6	6–7	7–8	8–9
частота m_i	6	8	33	35	11	7

19. В таблице приведены статистические данные о трудоемкости (в минутах) операции «Ремонт валика водяного насоса автомобиля»:

x_i трудоемкость (в мин.)	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50
частота m_i	17	47	70	46	20

20. Даны результаты испытания стойкости 100 фрез (в часах):

x_i стойкость (в час.)	21–26	26–31	31–36	36–41	41–46
частота m_i	8	21	43	21	7

21. Даны сведения об расходе воды, используемой цехом для технических нужд в течение 100 дней (в м^3):

x_i расход (в м^3)	8–12	12–16	16–20	20–24	24–28
частота m_i	7	25	36	22	10

22. Даны квартальные данные о среднесуточном пробеге 100 автомобилей (в км):

x_i среднесуточный пробег	120–140	140–60	160–180	180–200	200–220
частота m_i	9	21	40	18	12

23. Даны значения температуры масла в двигателе автомобиля БелАЗ при средних скоростях:

x_i температура (в градусах)	40–45	45–50	50–55	55–60	60–65
частота m_i	8	17	46	18	11

24. Даны размеры внутреннего диаметра гайки (в мм):

x_i диаметр (в мм)	10,00–10,02	10,02–10,04	10,04–10,06	10,06–10,08	10,08–10,10
частота m_i	9	16	47	21	7

25. Даны размеры диаметров 100 отверстий, просверленных одним и тем же сверлом:

x_i диаметр (в мм)	8,02–8,07	8,07–8,12	8,12–8,17	8,17–8,22	8,22–8,27
частота m_i	10	19	38	21	12

26. Даны результаты измерения диаметра валика, обработанного одношпиндельным автоматом:

x_i диаметр (в мм)	19,80–19,85	19,85–19,90	19,90–19,95	19,95–20,00	20,00–20,05	20,05–20,10
частота m_i	6	15	27	32	14	6

27. Даны результаты исследования грануляции партии порошка (в мкм):

x_i грануляция (в мкм)	0–40	40–80	80–120	120–160	160–200
частота m_i	7	23	35	26	9

28. Даны результаты наблюдений за сроком службы 150 однотипных станков до выхода за пределы норм (в месяцах двухсменной работы):

x_i срок (в месяцах)	18–20	20–22	22–24	24–26	26–28
частота m_i	15	27	61	29	18

29. Даны результаты измерения толщины (в см) 100 слюдяных прокладок:

x_i толщина (в см)	0,20–0,26	0,26–0,32	0,32–0,38	0,38–0,44	0,44–0,50
частота m_i	13	19	48	12	8

30. Даны диаметры 100 валиков после шлифовки (в мм):

x_i диаметр (в мм)	20,0–20,1	20,1–20,2	20,3–20,3	20,3–20,4	20,4–20,5
частота m_i	11	23	49	10	7

Лабораторная работа № 18

Тема: **Линейная регрессия. Определение параметров линейной регрессии**.

Цель: изучить метод нахождения линейной регрессии.

Необходимые теоретические сведения.

Если обе линии регрессии Y на X и X на Y являются прямыми, то в этом случае корреляцию называют ***линейной***. Выборочное уравнение прямой линии регрессии Y на X имеет вид

$$\overline{y}_x - \overline{y}_{\text{в}} = r_{\text{в}} \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \overline{x}_{\text{в}}). \tag{4.3}$$

Уравнение прямой регрессии X на Y имеет вид

$$\overline{x}_y - \overline{x}_{\text{в}} = r_{\text{в}} \frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - \overline{y}_{\text{в}}), \tag{4.4}$$

где x и y – значения СВ X, Y;

$\overline{y}_x$ $\overline{x}_y$ – их выборочные средние;

$r_{\text{в}}$ – выборочный коэффициент корреляции.

Коэффициент уравнений (4.3), (4.4) можно определить также по формулам, полученным методом наименьших квадратов. Например, если уравнение (4.3) записать в виде $\overline{y}_x = ax + b,$ то параметры a и b линейной регрессии имеют следующий вид:

$$a = \frac{n\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \sum\limits_{i=1}^{n} y_i}{n\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum\limits_{i=1}^{n} x_i)^2}; \tag{4.5}$$

$$b = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i \sum\limits_{i=1}^{n} {x_i}^2 - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i}{n\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum\limits_{i=1}^{n} x_i)^2}.$$

Пример. При эталонировании медного термометра изучалась зависимость электрического сопротивления Y от температуры X. Были получены следующие результаты.

i	1	2	3	4	5	6
x_i	0	10	20	30	40	50
y_i	0,533	0,533	0,574	0,596	0,619	0,645

Оценить параметры уравнения регрессии с помощью метода наименьших квадратов и записать уравнение регрессии Y на X.

Решение. Сведем результаты вычисления в таблицу.

Номер опыта i	Исходные данные		Расчетные данные		
	x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2	y_i^2
1	0	0,533	0	0	0,2841
2	10	0,533	5,53	100	0,3047
3	20	0,574	11,48	400	0,3295
4	30	0,596	17,88	900	0,3552
5	40	0,619	24,75	1600	0,3832
6	50	0,645	32,25	2500	0,4160
$n=6$	$\sum x_i$	$\sum y_i$	$\sum x_i y_i$	$\sum x_i^2$	$\sum y_i^2$
	150	3,519	91,89	5500	2,0727

Параметры линейной регрессии определим по формулам (4.5):

$$a = \frac{6 \cdot 91,89 - 150 \cdot 3,519}{6 \cdot 5500 - (150)^2} = 0,002237;$$

$$b = \frac{3,519 \cdot 5500 - 150 \cdot 91,89}{6 \cdot 5500 - (150)^2} = 0,53067.$$

Эмпирическое уравнение регрессии Y на X примет вид

$$\overline{y}_x = 0,002237x + 0,53067.$$

Задания: В задачах 1–30 приводятся результаты наблюдений над СВ X и Y. Используя эти экспериментальные данные, необходимо:

1) построить корреляционное поле. Подобрать математическую модель регрессионной зависимости Y от X (рекомендуется использовать модель линейной регрессии);

2) оценить параметры a и b модельного уравнения регрессии (4.3) методом наименьших квадратов;

3) записать эмпирическое уравнение регрессии Y на X.

1. СВ X и Y – уровни жидкости в различных цилиндрах одной гидросистемы после контрольных испытаний.

x_i, см	12,1	11,2	9,8	10,4	9,2	8,5	8,8	7,4
y_i, см	10,5	9,3	8,3	9,6	8,6	7,1	6,9	5,8

2. СВ X – величина напряжения стального бруса; СВ Y – величина нагрузки при сжатии стального бруса.

x_i, кН	5	10	20	40	60
y_i, МПа	51,33	78,00	144,3	263,6	375,2

3. СВ X – углубление резца; СВ Y – удельная энергия.

x_i	4	8	10	14	16	20	19	23
y_i	41	50	81	104	120	139	154	180

4. СВ X, СВ Y – уровни жидкости в различных цилиндрах одной гидросистемы после контрольных испытаний.

x_i, см	7,4	6,6	7,0	6,4	6,0	6,5	5,8	5,4
y_i, см	5,8	5,2	5,0	5,1	4,6	5,0	4,4	3,9

5. СВ X – электрическое сопротивление молибдена; СВ Y – температура.

x_i, Ом	61,97	57,32	52,70	47,92	37,72	32,09	28,09
y_i, K°	2289	2132	1988	1830	1489	1286	1178

6. СВ X – электровооруженность труда на одного рабочего; СВ Y – выпуск продукции на одного рабочего.

x_i, кВтч	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0	6,5
y_i, тыс. руб.	4,3	4,8	5,0	5,7	6,5	7,0	7,5	8,1

7. СВ X – температура; СВ Y – сопротивление медного термометра.

x_i, °С	0	10	20	30	40	50	60	70
y_i, Ом	0,533	0,552	0,574	0,596	0,619	0,645	0,687	0,690

8. СВ X – масса детали; СВ Y – время, затрачиваемое на закрепление детали на токарном станке.

x_i, кг	0,7	0,8	1,0	1,2	1,3	1,4	1,5	1,7
y_i, с	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	3,0

9. СВ X – плотность брикетов из карбонильного железного порошка; СВ Y – предел прочности на стане двух таких брикетов.

x_i, %	75	76	77	80	82	85	88	90
y_i, ГПа	2,1	2,0	2,5	2,4	3,6	4,0	4,1	5,0

10. СВ X – скорость движения автомобиля ЗИЛ – 130; СВ Y – длина его тормозного пути.

x_i, км/ч	10	15	20	25	30	35	40	45
y_i, м	1,8	2,7	2,5	4,5	4,4	6,3	6,5	6,5

11. СВ X – скорость движения автомобиля ВАЗ – 2301; СВ Y – длина его тормозного пути.

x_i, км/ч	31	30	42	40	55	48	64	59
y_i, м	2,0	2,6	3,9	5,2	7,0	6,2	7,5	8,6

12. СВ X – давление гелия; СВ Y – объем одного моля гелия.

$x_i \cdot 10^8$, Па	3,0	3,6	4,0	4,5	5,2	5,6	6,0	6,4
$y_i \cdot 10^{-2}$, м^3	1,98	1,92	1,93	1,81	1,83	1,70	1,73	1,68

13. СВ X – масса груза, подвешенного на эластичном шнуре; СВ Y – удлинение этого шнура.

x_i, кг	0,05	0,07	0,100	0,125	0,150	0,175	0,200	0,250
y_i, см	0,005	0,052	0,012	0,016	0,017	0,025	0,027	0,034

14. СВ X – температура при прессовании болтов из стекловолокнита; СВ Y – предел их прочности.

x_i, °С	1,30	1,35	1,40	1,45	1,50	1,55	1,60	1,65
$y_i \cdot 10^8$, Па	10,8	10,2	9,2	8,9	8,3	8,3	8,0	7,3

15. СВ X – ударная вязкость инструментальных быстрорежущих сталей; СВ Y – коэффициент их обрабатываемости.

$x_i \cdot 10^{-3}$, Дж/м^2	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4
y_i	0,6	0,62	0,64	0,67	0,69	0,73	0,75	0,8

16. СВ X – стаж работы; СВ Y – среднегодовое перевыполнение нормы.

x_i, год	2	3	4	5	6	7
y_i, %	6	6	7	8	9	10

17. СВ X – отклонение размеров валиков от номинала при черновой обработке; СВ Y – при чистовой обработке.

x_i, мкм	–30	–25	–20	–15	–10	–5	0
y_i, мкм	–8	–4	0	2	4	8	12

18. СВ X – скорость движения автомобиля БелАЗ; СВ Y – температура смазочного масла в двигателе этого автомобиля.

x_i, км/ч	20	25	30	35	40	45	50	55
y_i, °С	43,5	43,9	44,2	45,0	46,0	46,9	47,5	49,0

19. СВ X – скорость резания; СВ Y – площадь поперечного сечения стружки при обработке.

x_i, м/мин	25,0	22,7	22,1	19,8	17,0	12,3	10,7	10,0	8,2
y_i, мм^2	1,1	1,4	1,7	2,1	2,6	4,7	6,1	7,0	10,0

20. СВ X – температура; СВ Y – коэффициент трения в подшипнике.

x_i, °С	60	70	80	90	100	110	120
y_i	0,0148	0,0124	0,0102	0,0085	0,0071	0,0059	0,0051

21. СВ X – урожай; СВ Y – внесенные удобрения.

x_i, ц	10	10,2	8,3	9,5	10,5	9,8	11	10,8
y_i, ц	1,5	1,6	1,8	2	2,1	2,2	2,3	2,4

22. СВ X – температура окружающей среды; СВ Y – температура внутри помещения.

x_i, °С	–30	–20	–10	0	5	10	20	30
y_i, °С	5	15	18	20	22	24	25	26

23. СВ X – пропуски занятий; СВ Y – успеваемость.

x_i, час	20	16	12	8	6	4	2	0
y_i, баллы	2	3	4	5	7	8	9	9

24. СВ X – овальность колец после их обточки; СВ Y – термическая обработка.

x_i	5	10	15	20	25	30	35
$y_i \cdot 10^3$, °С	10	15	15	10	10	12	12

25. СВ X – диаметр проволоки; СВ Y – разрывное усилие.

x_i, мм	0,6	2	2,2	2,45	2,6	3
y_i, Н	50	560	690	760	900	960

26. СВ X – количество выпускаемых деталей; СВ Y – полные затраты на их изготовление.

x_i, тысячи штук	3	4	5	6	7	8	9	10	11
y_i, сотни рублей	2	1	1	1	2	1	1	1	1

27. СВ X – износ резца, определяемый его толщиной; СВ Y – время работы.

x_i, мм	30,0	29,1	28,4	28,1	28,0	27,7	26,8	26,5	26,3
y_i, час	3	4	5	6	7	8	9	10	11

28. СВ Y – температура корпуса работающего агрегата; СВ – X интервал времени в пять минут.

x_i, мин	5	10	15	20	25	30	35
y_i, Т, °С	59,3	59,8	60,3	60,8	61,3	61,9	62,5

29. СВ X – количество кормов; СВ Y – надой.

x_i, кг	50	80	100	120	140	150
y_i, кг	5	6	7	8	10	12

30. СВ X – количество жидкости для полива; СВ Y – урожай ягод.

x_i, л	10	20	30	40	50
y_i, кг	2	2,2	2,8	3,4	4,2

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Содержание данного лабораторного практикума не привязано к конкретным техническим характеристикам имеющихся в лабораторных классах персональных ЭВМ («железу»), а также к быстро меняющемуся программному обеспечению, развитие которого достигло сейчас такой стадии, когда существует надежное, эффективное и удобное для пользователя математическое программное обеспечение решения многих основных задач, например, EXCEL, MATHCAD, MATHLAB и др. Например, в MATHCADе при обработке статистических данных для нахождения $x_{\max}$, $x_{\min}$ применяются соответственно функции max (A), min (A), для построения вариационного ряда в порядке возрастания – функция sort (A); функция mean (A) вычисляет значение выборочного среднего, var (A) – выборочную дисперсию, stdev (A) – среднеквадратичное отклонение и т. д., и т. п. Применение математических пакетов избавляет студентов от рутинных операций, громоздких вычислений, но не избавляет от необходимости понимания существа изучаемого предмета. При отсутствии по каким-то причинам подобных пакетов (сред) при проведении лабораторных работ студентам предлагается самим составить программы на известных им языках программирования, реализующие некоторые основные алгоритмы для решения тех же самых задач. Цель этих упражнений не в создании практического программного обеспечения, а в получении студентами определенного опыта в программировании таких алгоритмов, что, в частности, ведет к более глубокому их пониманию.

Этот лабораторный практикум может быть полезен и для самостоятельного изучения приведенных здесь разделов вычислительной математики, а также для дневных и заочных отделений других университетов, где в том или ином объеме изучается вычислительная математика.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вольвачев, Р. Т. Элементы математической логики и теории множеств / Р. Т. Вольвачев. – Мн.: Университетское, 1986. – 111 с.

2. Емеличев, В. А. Лекции по теории графов / В. А. Емеличев [и др.]. – М.: Наука, 1990. – 227 с.

3. Свами, М. Графы, сети, алгоритмы / М. Свами, К. Тхуласираман. – М.: Мир, 1984. – 455 с.

4. Белов, В. В. Теория графов / В. В. Белов, Е. М. Воробьев, В. Е. Шаталов. – М.: Высшая школа, 1976. – 368 с.

5. Ахо, А. В. Построение и анализ вычислительных алгоритмов / А. В. Ахо, Д. Э. Хопкрофт, Д. Д. Ульман. – М.: Мир, 1979. – 536.

6. Кузнецов, А. В. Высшая математика. Математическое программирование / А. В. Кузнецов, В. А. Сакович, Н. И. Холод. – Мн.: Вышэйшая школа, 1994. – 286 с.

7. Каскевич, В. И. Специальные главы высшей математики. Основы теории множеств. Элементы теории графов. Электронное учебное пособие / В. И. Каскевич, Е. А. Федосик. – Мн.: Рег. № БНТУ / ФИТР 48. – 1.2010. – 70 с.

8. Федосик, Е. А. Элементы численных методов : учебно-методическое пособие по высшей математике / Е. А. Федосик. – Мн.: БНТУ, 2006. – 152 с.

9. Грекова, А. В. Математика. Практикум по численным методам / А. В. Грекова [и др.]. – Мн.: БНТУ, 2006. – 127 с.

10. Габасова, О. Р. Численные методы. Методические указания и индивидуальные задания / О. Р. Габасова [и др.]. – Мн.: БНТУ, 2009. – 116 с.

11. Грекова, А. В. Электронный учебно-методический комплекс по учебной дисциплине «Вычислительная математика» / А. В. Грекова [и др.]. – Мн.: Рег. № БНТУ / ЭУМК – ФИТР 48. – 273, 2016. – 398.

12. Плис, А. И. MATHCAD: математический практикум для экономистов и инженеров / А. И. Плис, Н. А. Сливина. – М.: Финансы и статистика, 1999. – 656 с.

Учебное издание

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

Лабораторный практикум

Составители:
ГРЕКОВА Анна Валентиновна
МЕТЕЛЬСКИЙ Анатолий Владимирович
ФЕДОСИК Евгений Анатольевич
ЧЕПЕЛЕВ Николай Иосифович

Редактор *А. Д. Спичёнок*
Компьютерная верстка *Е. А. Беспанской*

Подписано в печать 15.07.2021. Формат 60×84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 7,44. Уч.-изд. л. 5,82. Тираж 100. Заказ 564.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.