МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Белорусский национальный технический университет

Кафедра ЮНЕСКО «Энергосбережение
и возобновляемые источники энергии»

М. С. Краков
С. Г. Погирницкая

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И ОБРАБОТКА ДАННЫХ

Пособие

Минск
БНТУ
2021

УДК 004.67 (076.5)(075.8)
ББК 32.97я7
К78

Р е ц е н з е н т ы:
О. Г. Романов, *В. И. Репников*

Краков, М. С.
К78 Численные методы и обработка данных : пособие / М. С. Краков, С. Г. Погирницкая. – Минск : БНТУ, 2021. – 87 с.
ISBN 978-985-583-423-7.

Пособие содержит краткие теоретические сведения и задания к лабораторным работам по дисциплине «Численные методы и обработка данных». В пособии показаны возможности электронных таблиц Excel по обработке, анализу и представлению данных, описаны численные методы решения задач.

Предназначено для студентов специальности 1-43 01 06 «Энергоэффективные технологии и энергетический менеджмент».

УДК 004.67 (076.5)(075.8)
ББК 32.97я7

ISBN 978-985-583-423-7

СОДЕРЖАНИЕ

Лабораторная работа № 1
ВВОД И РЕДАКТИРОВАНИЕ ДАННЫХ В EXCEL

Цель работы: ознакомиться с интерфейсом программы Excel и основными приемами работы, научиться вводить данные различных типов и форматировать ячейки электронных таблиц.

1.1. Основные положения

Термин электронная таблица используется для обозначения программы, предназначенной для обработки данных и состоящей из отдельных ячеек, образующих таблицу. Обработка данных включает в себя:

• проведение различных вычислений с использованием мощного аппарата функций и формул;

• решение уравнений (алгебраических, нелинейных, дифференциальных);

• исследование влияния различных факторов на данные;

• решение задач оптимизации;

• создание и анализ баз данных;

• статистический анализ данных;

• наглядное представление данных в виде графиков и диаграмм.

Стандартный интерфейс пакета Excel представлен на рис. 1.1.

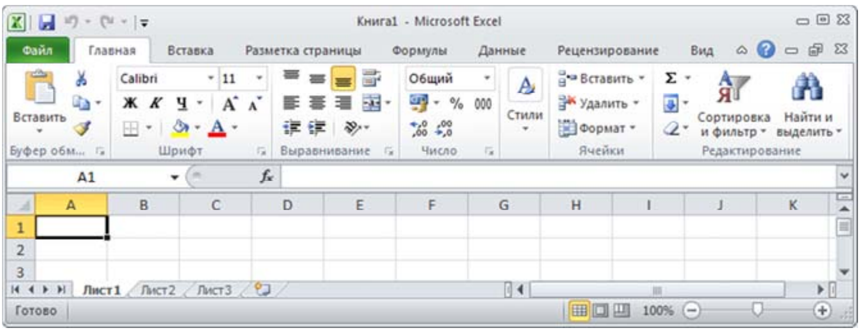


Рис. 1.1. Интерфейс Excel

Данные вводятся в ячейки листа. Ячейки имеют вертикальную и горизонтальную нумерацию и могут быть связаны друг с другом.

Существуют два типа нумерации: A1 и C1R1. В первом – столбцы обозначаются буквами, строки – цифрами, во втором – строки и столбцы обозначаются цифрами.

Excel различает следующие типы данных: числа, текст, дата. При вводе чисел можно использовать только символы

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - + / , E e.

При записи числа в экспоненциальном формате буква E (e) означает «10 в степени». Например, 1E2 означает число 100.

Щелчок по угловой стрелке в группе «Число» вызывает появление окна «Формат ячеек», с помощью которого задается формат вывода данных в ячейках (рис. 1.2). С его помощью можно задать форму вывода данных различных типов в ячейке.

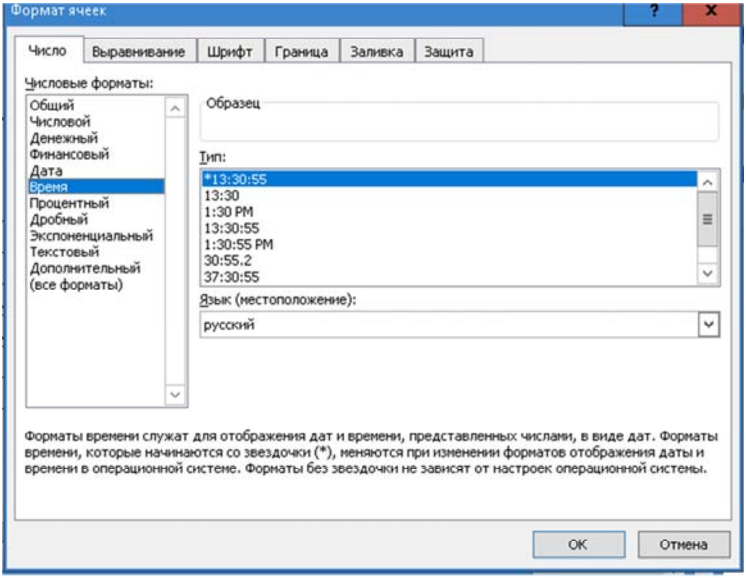


Рис. 1.2. Диалоговое окно «Формат ячеек»

Данные в формате «Дата» вводятся при наборе числа, месяца и года через точку, наклонную черту или дефис. Например, набор «9/5/19» приведет к появлению в ячейке «09.05.2019». Изменить вид выводимой даты можно с помощью диалогового окна «Формат ячеек».

При вводе времени часы от минут отделяются символом «:».

Данные в формате «Текст» вводятся автоматически при введении текста или после символа «’» при вводе чисел. Если размер текста превышает ширину ячейки, его можно расположить в ячейке в несколько строк. Для этого на вкладке «Главная» в группе «Выравнивание» следует щелкнуть по угловой стрелке и в открывшемся окне диалога «Формат ячеек» на вкладке «Выравнивание» установить флажок «Переносить по словам». На этой же вкладке можно задать направление и выравнивание текста, объединение ячеек.

Ввод формулы начинается со знака равно «=».

Последовательность данных (арифметическая, геометрическая) может быть задана с помощью окна диалога «Прогрессия», доступного на вкладке «Главная», группа «Редактирование», кнопка «Заполнить», команда «Прогрессия» (рис. 1.3).

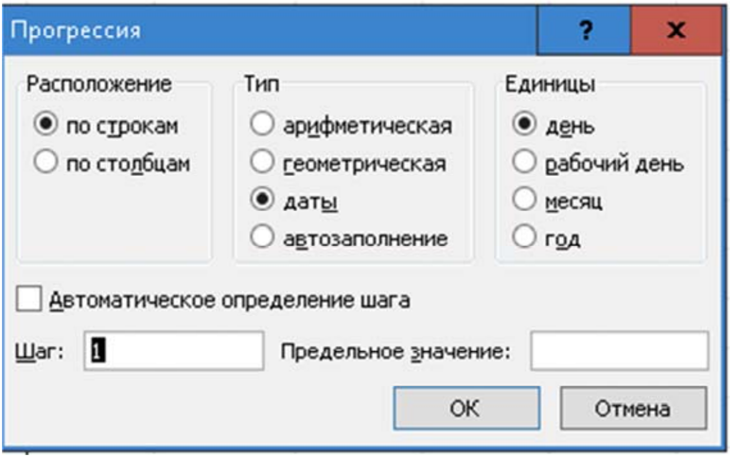


Рис. 1.3. Диалоговое окно «Прогрессия»

1.2. Контрольные вопросы

1. Назначение электронных таблиц.
2. Перечислите основные элементы интерфейса Excel.
3. Каким образом формируется адрес ячейки?
4. Как записываются числа в экспоненциальной форме?
5. Как ввести в ячейку дату, время?

6. Как ввести формулу?
7. Как ввести ряд данных?
8. Как изменить шрифт в ячейке?
9. Как установить перенос текста в ячейке?
10. Как объединить ячейки?

1.3. Выполнение работы

1. Запустить программу MS Excel.
2. В ячейку A1 ввести свою фамилию, в B1 – имя.
3. Изменить ширину столбцов A и B таким образом, чтобы фамилия и имя помещались целиком.
4. В ячейку C1 ввести текущую дату, в ячейку D1 – время начала занятий. Изменить формат даты.
5. Ввести число 123; десятичную дробь 9,81; число в экспоненциальном формате $1{,}4 \cdot 10^5$.
6. На новом листе составить график дежурств. *Указание*: номер по порядку и дни недели ввести как ряды данных, протягивая маркер заполнения (квадратик в правом нижнем углу выделенной ячейки). Чтобы закрасить ячейки, выделить их с нажатой клавишей Ctrl и выбрать на ленте цвет заливки. Переименовать лист, для этого выполнить двойной щелчок по ярлычку листа и набрать новое имя.

<table>
<tr><th rowspan="2">№ п/п</th><th rowspan="2">ФИО</th><th colspan="7">День недели</th></tr>
<tr><th>ПН</th><th>ВТ</th><th>СР</th><th>ЧТ</th><th>ПТ</th><th>СБ</th><th>ВС</th></tr>
<tr><td>1</td><td>Петрович С. М.</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td rowspan="6">ВЫХОДНОЙ</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Сидоров В. И.</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td>Воронова А. В.</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td>Лущик В. В.</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>5</td><td>Мороз С. А.</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>6</td><td>Павлов А. В.</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

7. На новом листе набрать и оформить таблицу «УЧЕБНЫЙ ПЛАН». Графу «ВСЕГО» вычислить, используя автосумму для первой строки, затем с помощью маркера заполнения распространить формулу на весь столбец.

УЧЕБНЫЙ ПЛАН

№ п/п	НАЗВАНИЕ ДИСЦИСПЛИНЫ	Распределение по семестрам			ЧАСОВ				Всего зачетных единиц
					ВСЕГО	из них			
		Экзаменов	Зачетов	Контрольных работ		Лекций	Лабораторных занятий	Практических занятий	
1	Математика	1,2	3	1,2,3		154		152	16,5
2	Химия	1				52	16		4,5
3	Физика	1,2				68	68	34	11,0
4	Информатика		1			34	34		4,0

8. Составить таблицы перевода физических величин в новые единицы измерения (по выбору):

Величина	**Старые ед. изм.**	**Новые ед. изм.**
Скорость	км/час (от 0 до 100 с шагом 5)	м/с
Длина	дюйм (от 0 до 40 с шагом 2)	сантиметр (1 дюйм = 2,54 см)
Давление	Атм техн. (от 0,5 до 6 с шагом 0,5)	Паскаль (1 атм = $9{,}80665 \cdot 10^4$ Па)
Давление	мм рт.ст. (от 500 до 1000 с шагом 25)	Паскаль (1 мм рт.ст. = 133,32 Па)
Температура	градус Фаренгейта (от 0 до 80 с шагом 4)	градус Цельсия ($t\ ^{o}C = (t_f - 32^{o}F) \cdot 5/9$)
Объем Нефти	Баррель (от 5000 до 10000 с шагом 500)	м^3 (1 баррель нефтяной США = 0,15899 м^3)
Мощность	лошадиная сила (от 0 до 100 с шагом 5)	Ватт (1 л. с. = 735,49875 Вт)
Энергия	калория (от 1000 до 3000 с шагом 200)	Джоуль (1 кал = 4,19 Дж)
Объем Памяти	килобайт (от 1000 до 10000 с шагом 500)	мегабайт

Лабораторная работа № 2
РАБОТА С ФОРМУЛАМИ И ФУНКЦИЯМИ

Цель работы: научиться записывать формулы в Excel, использовать арифметические операторы и функции в расчетах, овладеть способами адресации ячеек.

2.1. Основные положения

Формулой в Excel называется последовательность символов, начинающаяся со знака равенства «=». В эту последовательность символов могут входить *постоянные значения, ссылки на ячейки, имена, функции и операторы*. Результатом работы формулы является новое значение, которое выводится в ячейке как результат вычисления формулы по имеющимся данным. Если значения в ячейках, на которые есть ссылки в формулах, меняются, то результат изменится автоматически.

Функции в Excel используются для выполнения стандартных вычислений в рабочих книгах. Значения, которые используются для вычисления функций, называются **аргументами**. Значения, возвращаемые функциями в качестве ответа, называются **результатами**. Аргументы функции записываются в круглых скобках сразу за названием функции и отделяются друг от друга символом точка с запятой «;».

В качестве аргументов можно использовать числа, текст, логические значения, массивы или ссылки. Аргументы могут быть как константами, так и формулами. В свою очередь формулы могут содержать другие функции. Функции, являющиеся аргументом другой функции, называются **вложенными**. В формулах Excel можно использовать до семи уровней вложенности функций.

Задаваемые входные параметры должны иметь допустимые для данного аргумента значения. Некоторые функции могут иметь необязательные аргументы, которые могут отсутствовать при вычислении значения функции.

У функции могут отсутствовать аргументы. Примеры: ПИ(), СЕГОДНЯ(), ДАТА().

В формулах можно использовать операции сложения «+», вычитания «-», умножения «*», деления «/», возведения в степень «^». Можно также использовать знак процента «%», скобки «()». При записи диапазона ячеек используется символ двоеточие «:». Кроме того, в произвольное место формулы можно с помощью кнопки «Мастер функций » вставить любую из многочисленных функций Excel. При ее нажатии появляется окно диалога. Выбрав одну из категорий, к которой относится функция, нужно выбрать функцию и подтвердить выбор, нажав кнопку ОК, после чего функция будет вставлена в формулу.

В Excel существует порядок старшинства операторов в формулах: сначала выполняется возведение в степень, затем умножение и деление, затем сложение и вычитание. Для изменения порядка вычисления используют скобки.

Для внесения изменений в формулу необходимо нажать мышью на строке формул или нажать клавишу F2. Затем внести изменения и нажать кнопку ввода в строке формул или клавишу Enter. Если необходимо внести изменения в формулу непосредственно в ячейке, в которой она записана, то следует дважды щелкнуть мышью по ячейке с этой формулой.

Ссылка однозначно определяет ячейку или группу ячеек рабочего листа. Ссылки указывают, в каких ячейках находятся значения, которые нужно использовать в качестве аргументов формулы. С помощью ссылок можно использовать в формуле данные, находящиеся в различных местах рабочего листа. Можно также ссылаться на ячейки, находящиеся на других листах рабочей книги, в другой рабочей книге, или даже на данные другого приложения.

Ссылки на ячейки используют заголовки соответствующих столбцов и строк рабочего листа. Для ввода ссылки достаточно щелкнуть нужную ячейку.

При перемещении формулы в новое место таблицы ссылки в формуле не изменяются, при копировании – смещаются. Чтобы при копировании формулы адрес ячейки не изменялся, в формуле используют абсолютный адрес ячейки. Надо задать перед номером столбца или строки символ $, например, A$1, $A1, $A$1. Технически это легко сделать, поместив курсор в строку формул, выделив всю формулу или ее часть, которая должна содержать абсолютные ссылки, и нажать клавишу F4.

Если в ссылке используются символы $, то она называется *абсолютной*, если символов $ в ссылке нет – *относительной*.

Имя – это легко запоминающийся идентификатор, который можно использовать для ссылки на ячейку, группу ячеек, значение или формулу. Для того чтобы присвоить ячейке имя, необходимо выполнить следующие действия:

• поместить курсор в ячейку;

• в окне, левее строки формул, ввести имя ячейки. Первым символом имени должна быть буква, знак подчеркивания (_) или обратная косая черта (\). Остальные символы имени могут быть буквами, цифрами, точками и знаками подчеркивания, пробелы в имени не допускаются.

Ссылка на присвоенное имя является абсолютной.

Excel выводит в ячейку значение ошибки, когда формула для этой ячейки не может быть правильно вычислена.

Основные ошибки представлены в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Коды ошибок и их возможные причины

Код ошибки	Возможные причины
#ДЕЛ/0!	В формуле делается попытка деления на ноль
#Н/Д	Нет доступного значения
#ИМЯ?	Excel не смог распознать имя, использованное в формуле
#ЧИСЛО!	Возникли проблемы с числом: ln(-1)
#ССЫЛКА!	Формула неправильно ссылается на ячейку (удалена ячейка со ссылкой)
#ЗНАЧ!	Аргумент или операнд имеют недопустимый тип (текст вместо числа или логической константы)

2.2. Контрольные вопросы

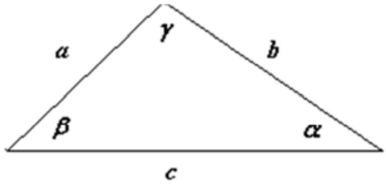
1. Что входит в понятие «формула» в Excel?
2. С какого символа начинается запись формулы?
3. Каковы правила записи функций в Excel?
4. Укажите порядок выполнения операторов.
5. Чем отличаются относительная и абсолютная ссылки?
6. Как присвоить имя ячейке?
7. Каким требованиям должны удовлетворять имена?
8. Как меняются ссылки при перемещении и копировании формулы?

2.3. Выполнение работы

1. Рассчитать и занести в таблицу параметры треугольника по трем сторонам *a*, *b* и *c* по формулам:

$$P = a + b + c,$$

$$S = \sqrt{\frac{P}{2}\left(\frac{P}{2} - a\right)\left(\frac{P}{2} - b\right)\left(\frac{P}{2} - c\right)},$$



$$r = \frac{2S}{P} \quad R = \frac{abc}{4S} \quad \sin\alpha = \frac{2S}{bc},$$

где P – периметр треугольника;

S – его площадь;

r – радиус вписанной окружности;

R – радиус описанной окружности.

Нарисовать треугольник и вставить формулы, используя инструменты на вкладке ленты «Вставка».

<table>
<tr><td colspan="5">Расчет треугольника по трем сторонам</td></tr>
<tr><td>a</td><td colspan="2">b</td><td colspan="2">c</td></tr>
<tr><td>3</td><td colspan="2">4</td><td colspan="2">5</td></tr>
<tr><td colspan="5">Выполнение</td></tr>
<tr><td>P – периметр</td><td></td><td colspan="2">r – радиус вписанной окружности</td><td></td></tr>
<tr><td>S – площадь</td><td></td><td colspan="2">R – радиус описанной окружности</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">Внутренние углы треугольника</td><td>в радианах</td><td>в градусах</td></tr>
<tr><td>sin α</td><td></td><td>α</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>sin β</td><td></td><td>β</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>sin γ</td><td></td><td>γ</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="4">Сумма внутренних углов треугольника</td><td></td></tr>
</table>

2. Вычислить математические выражения при заданных в ячейках параметрах (задания на выбор):

1) $z = \ln\left(y^{-\sqrt{|x|}}\right)\cdot\left(\sin x + e^{(x+y)}\right)$ при $x = 4$, $y = 0{,}5$;

2) $y=\sqrt{1+\dfrac{\operatorname{arctg} x}{\ln(2\cdot e^{\sin x})}}$ при $x = \pi$;

3) $y=\ln\left|\sin^2 x-\sqrt{\cos x}\right|$ при $x = \pi/4$;

4) $y=\sqrt{\left|\dfrac{e^{2x}+\sqrt{x}}{\sin x-\arcsin x}\right|}$ при $x = 0{,}4$;

5) $f=\sqrt[3]{m\cdot \operatorname{tg} t+\left|c\cdot\sin t\right|}$ при $m = 2$, $c = 4$ и $t = 0{,}5$;

6) $y=e^{-bt}\sin\left(at+b\right)-\sqrt{\left|bt+a\right|}$ при $a = 2$, $b = 4$ и $t = 0{,}7$;

7) $z=\operatorname{arctg}\sqrt{\left|\dfrac{x-\sin y}{x+\sin y}+\dfrac{x+\sin y}{x-\sin y}\right|}$ при $x = 4$, $y = 0$;

8) $f=\sqrt{c\left(\sqrt{y}+x^2\right)}\cdot\left(\cos x-\left|c-y\right|\right)$ при $c = 3$, $y = 4$ и $x = 1{,}5$.

3. Обработать экспериментальные данные испытаний ветроколеса в аэродинамической трубе:

№ опыта	Показания микроманометра		Скорость потока u_0, м/с	Параметры генератора ветроустановки			C_N
	l_0, мм	l, мм		U, В	I, А	N, Вт	
1	80	90		8,5	0,0037		
2	80	96		16	0,0072		
3	80	106		24,3	0,0105		

1) Вычислить скорость потока воздуха u_0 по формуле

$$u_0=\sqrt{\left(l-l_0\right)\cdot 10^{-3}\cdot 2g\frac{\rho_ж}{\rho_в}\sin\alpha},$$

где $l - l_0$ – разность показаний микроманометра;

g = 9,81 – ускорение свободного падения. Присвойте имя этой константе (вкладка «Формулы», кнопка «Присвоить имя»);

α = 12 – угол наклона трубки микроманометра;

$\rho_ж$ = 809,5 кг/м^3 – плотность спирта в трубке микроманометра;

$\rho_в$ = 1,2 кг/м^3 – плотность воздуха.

Значения этих величин введите в ячейки и присвойте им имена.

2) Вычислить электрическую мощность генератора – $N = UI$.

3) Определить коэффициент мощности ветроколеса:

$$C_N = \frac{2N}{S\rho_в u_0^3},$$

где $S = \pi d^2/4$ – ометаемая площадь ветроколеса, диаметр ветроколеса d = 0,17 м.

При вычислениях в табл. используйте абсолютную ссылку на ячейку с вычисленным значением S.

4) Составить таблицу умножения. Записать формулу таким образом, чтобы ее можно было распространить на всю расчетную область. *Указание*: при записи формулы использовать смешанную адресацию.

	1	2	…	8	9
1	формула				
2					
…					
8					
9					

Лабораторная работа № 3
ЛОГИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И ПРОВЕРКА ДАННЫХ

Цель работы: научиться проводить вычисления и оформлять данные в зависимости от выполнения определенных условий.

3.1. Основные положения

Если необходимо выполнить те или иные действия в зависимости от выполнения каких-либо условий, то используются логические функции. В Excel могут использоваться следующие логические функции: ЕСЛИ, И, ИЛИ, ИСТИНА, ЛОЖЬ, НЕ. Результатом работы логических функций И, ИЛИ, ИСТИНА, ЛОЖЬ, НЕ является логическое значение ИСТИНА или ЛОЖЬ, а результатом работы логической функции ЕСЛИ может быть число, текст или ссылка на выполнение каких-либо действий.

Функция ЕСЛИ (**арг_лог**, **если_истина**, **если_ложь**) возвращает результат **если_истина**, если логический аргумент **арг_лог** при вычислении приобретает значение ИСТИНА, и **если_ложь**, если **арг_лог** при вычислении приобретает значение ЛОЖЬ.

При конструировании более сложных проверок в качестве значений аргументов **если_истина** и **если_ложь** могут быть вложенными до семи функций ЕСЛИ.

Функция И возвращает значение ИСТИНА, если все аргументы имеют значение ИСТИНА.

Функция ИЛИ возвращает значение ИСТИНА, если хотя бы один аргумент имеет значение ИСТИНА.

Результатом работы логических функций ИСТИНА() и ЛОЖЬ() являются логические значения ИСТИНА или ЛОЖЬ.

Функция НЕ (**арг**) изменяет на противоположное логическое значение своего аргумента. Если **арг** имеет значение ЛОЖЬ, то функция НЕ возвращает значение ИСТИНА, а если **арг** имеет значение ИСТИНА, то функция НЕ возвращает значение ЛОЖЬ.

Чтобы подчеркнуть особое значение той или иной величины, выводимой в ячейке, ячейку можно отформатировать специальным образом. Но так как значение величины может быть разным, то и форматирование необходимо делать с учетом значения описываемой величины. Для этого необходимо выполнить условное форматирование, к примеру: Главная => Стили => Условное форматирование Правила выделения ячеек => Больше.

Чтобы задать проверку данных при вводе, используется команда «Проверка данных», которая находится на вкладке «Данные» в группе «Работа с данными».

3.2. Контрольные вопросы

1. Каковы возможности логических функций?
2. Как работает функция ЕСЛИ?
3. Какую функцию следует применить для проверки одновременного выполнения нескольких условий?
4. Как выполнить проверку данных при вводе?
5. Как отформатировать ячейку в зависимости от ее значения?

3.3. Выполнение работы

1. Задать в ячейках значения x, y и вычислить выражения

1) $F = \begin{cases} \sin x \lg x, & x > 3,5, \\ \cos^2 x, & x \le 3,5, \end{cases}$

2) $W = \begin{cases} \lg(x+1), & x > 1, \\ \sin^2 x\sqrt{|x|}, & x \le 1, \end{cases}$

3) $H = \begin{cases} 2x^2 + x + 1, & x < 1,2, \\ 1/x + \sqrt{x^2+1}, & x = 1,2, \\ (1+x)/\sqrt{x^2+1}, & x > 1,2, \end{cases}$

4) $R = \begin{cases} (x+y)^2 - \sqrt{x \cdot y}, & x \cdot y > 0, \\ (x+y)^2 - \sqrt{|x \cdot y|}, & x \cdot y < 0, \\ (x+y)^2 + 1, & x \cdot y = 0. \end{cases}$

2. Выяснить, находятся ли точки (x, y) внутри (рис. 3.1):

1) круга радиуса $R = 4$ с центром в точке (a, b), где $a = 5$, $b = 6$.

Указание: выполнить проверку $(x-a)^2 + (y-b)^2 \le R^2$;

2) прямоугольника, нижний левый и верхний правый углы имеют координаты (5; 4) и (20; 14) соответственно.

Указание: использовать логическую функцию И. Должны одновременно выполняться условия: $x \ge 5$, $x \le 20$, $y \ge 5$, $y \le 14$;

3) подсчитать количество внутренних точек с помощью функции Excel СЧЕТЕСЛИ.

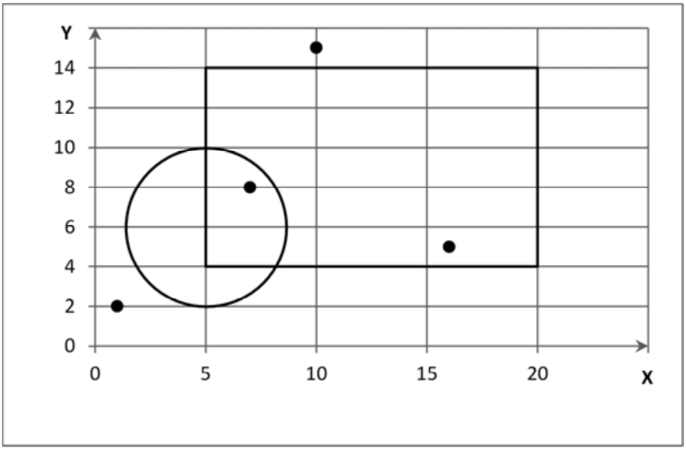


Рис. 3.1. Геометрия задачи

x	y	Внутри круга (да, нет)	Внутри прямоугольника (да, нет)
1	2		
7	8		
10	15		
16	5		
Количество внутренних точек			

3. Введите список фамилий студентов.

В диапазоне ввода оценок установите режим проверки данных. Для этого в окне диалога «Проверка вводимых значений» (вкладка

Данные => Работа с данными => Проверка данных) установите значения параметров: тип данных – целое, значения между 4 и 10. Примените к ячейкам с оценками условное форматирование – цветовую шкалу от красного к зеленому.

В графе «Средний балл», если все работы сданы, т. е. нет пустых ячеек (значение функции СЧИТАТЬПУСТОТЫ равно нулю), вычислить средний балл (функция СРЗНАЧ) с округлением до целого числа (функция ОКРУГЛ), в противном случае записать текст «не зачтено».

Подсчитать количество оценок 9 и 10.

Фамилия студента	Лабораторные работы					Средний балл	Кол-во 9,10
	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5		
Иванов	10	8	7	8		не зачтено	
Петров	6	7	5	6	4	6	
Сидоров	5	8	9	6	4	6	
Ковалев		9	7	8		не зачтено	
Климович	4	5	5	5	8	5	

Дополнительные задания

1. Даны положительные a, b, c. Выяснить, существует ли треугольник с такими сторонами. Результат вывести в виде соответствующего текста. *Указание*: выполнить проверку – сумма двух сторон треугольника больше третьей.

2. Вычислить корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$. Коэффициенты a, b, c задать в ячейках, результат вывести в виде чисел или текста «действительных корней нет».

3. Ввести номер года. Определить, является ли он високосным. *Указание*: в современном (григорианском) календаре каждый год, номер которого делится на 4, является високосным, за исключением тех, которые делятся на 100 и не делятся на 400. Например, 1900 – не високосный, 2000 – високосный год.

Лабораторная работа № 4
ОПЕРАЦИИ С МАССИВАМИ И МАТРИЦАМИ. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Цель работы: научиться выполнять операции с матрицами и массивами, решать системы линейных уравнений.

4.1. Основные положения

Группа данных, подобная таблице, может считаться матрицей. В инженерной практике наибольшее значение имеют матрицы с числовыми данными.

К данным, образующим матрицу, можно обращаться двояким образом: указать диапазон ячеек или, присвоив этому диапазону имя, обращаться по имени. Продемонстрируем это на примере, умножив алгебраическую матрицу на число (рис. 4.1).

G3 | {=A3:C4*E3}

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2		Матрица A			Число k			Матрица A*k	
3	3	5	7		5		15	25	35
4	4	11	-2				20	55	-10

Рис. 4.1. Умножение матрицы на число

Для совершения этого действия необходимо предварительно выделить диапазон ячеек, который будет занимать результирующая матрица, затем записать формулу умножения исходного диапазона ячеек на ячейку, в которой задано число, а затем распространить результат на весь конечный диапазон, использовав сочетание клавиш Ctrl+Shift+Enter. Это сочетание клавиш применяется всегда, когда нужно распространить результат на диапазон ячеек.

Используя имена диапазонов, легко осуществлять сложение матриц *AA* и *BB* (рис. 4.2).

K5 | {=AA+BB}

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1											
2		Матрица AA				Матрица BB				Матрица AA + BB	
3	3	5	7		5	1	7		8	6	14
4	4	11	-2		17	13	9		21	24	7
5	12	8	4		4	2	6		16	10	10

Рис. 4.2. Сложение матриц

Если в качестве аргумента функции используется матрица, то функция действует на каждый элемент матрицы, что во многих случаях может существенно ускорить вычисления.

В Excel работа с матрицами и массивами представлена следующими функциями (табл. 4.1):

Таблица 4.1

Некоторые функции для работы с матрицами и массивами

Функция	Назначение
МУМНОЖ	Умножение матриц
МОБР	Нахождение обратной матрицы
ТРАНСП	Транспонирование матрицы
МОПРЕД	Вычисление определителя
ИНДЕКС	Извлечение из матрицы элемента по номеру строки и столбца
ЧСТРОК и ЧИСЛСТОЛБ	Определение числа строк и столбцов
СУММПРОИЗВ	Перемножает соответствующие элементы заданных массивов и возвращает сумму произведений

В Excel умножение матриц осуществляется при помощи функции МУМНОЖ. Умножить матрицы можно либо с помощью мастера функций, либо непосредственным вводом в ячейку формулы (к примеру, =МУМНОЖ(A3:C5;E3:G5)), выделением области, где должна находиться матрица результата, и одновременным нажатием трех клавиш Ctrl, Shift и Enter после того, как указатель мыши перемещен в строку формул.

Для получения обратной матрицы необходимо выполнить операции:

• выделить место, где будет расположена обратная матрица, нажать кнопку «Мастер функций». Появится окно диалога «Мастер функций шаг 1 из 2»;

• выбрать функцию МОБР из категории «Математические» и нажать кнопку «ОК» или клавишу Enter;

• в окне диалога «Аргументы функции» ввести диапазон ячеек, где находится исходная матрица и нажать одновременно три клавиши Ctrl, Shift и Enter. В выделенной области появится обратная матрица.

Для получения этого же результата можно после выделения области, где будет находиться обратная матрица, ввести в строку формул выражение =МОБР(исходный_диапазон) и, не выходя из нее, нажать одновременно три клавиши Ctrl, Shift и Enter.

Для проверки правильности полученного результата необходимо умножить исходную матрицу на обратную матрицу с помощью функции МУМНОЖ. Должна получиться единичная матрица.

Операция транспонирования меняет местами строки и столбцы матрицы. Число строк и столбцов может быть произвольным. Ограничений на вид информации в матрице нет. Это означает, что в ячейках могут быть числа, текст, даты, формулы. Транспонирование матриц и таблиц осуществляется с помощью функции ТРАНСП из категории «Ссылки и массивы». Функция ТРАНСП переносит только информацию в ячейках, а формат ячеек не переносит.

Решение системы линейных уравнений методом Крамера. По методу Крамера решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12} + \ldots + a_{1n} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22} + \ldots + a_{2n} = b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2} + \ldots + a_{nn} = b_n \end{cases}$$

можно найти, вычислив ряд определителей: главный Δ и дополнительные Δ_i :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & & & \\ b_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & & & \\ a_{n1} & b_n & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \ldots \; \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & b_2 \\ \ldots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & b_n \end{vmatrix}.$$

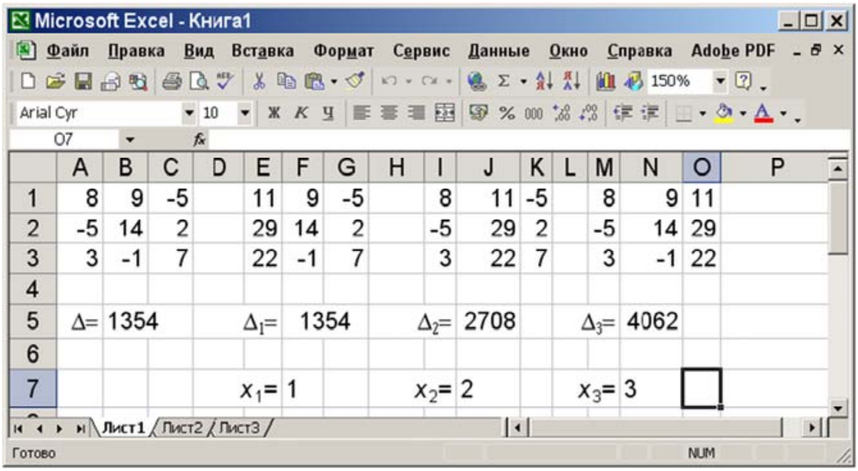
Решение системы уравнений находится как $x_i = \Delta_i / \Delta$.

Рассмотрим реализацию этого метода в Excel на примере решения системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 8x_1 + 9x_2 - 5x_3 = 11, \\ -5x_1 + 14x_2 + 2x_3 = 29, \\ 3x_1 - x_2 + 7x_3 = 22. \end{cases}$$

Определители матриц вычисляются с помощью функции МОПРЕД, аргументами которых являются соответствующие массивы, составленные из коэффициентов системы уравнений.

Теперь достаточно разделить найденные значения дополнительных определителей на значение главного определителя, чтобы найти решение системы уравнений. Результат представлен в ячейках F7, J7, N7 на рис. 4.3.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1	8	9	-5		11	9	-5		8	11	-5		8	9	11	
2	-5	14	2		29	14	2		-5	29	2		-5	14	29	
3	3	-1	7		22	-1	7		3	22	7		3	-1	22	
4																
5	Δ=	1354			Δ_1=	1354			Δ_2=	2708			Δ_3=	4062		
6																
7					x_1=	1			x_2=	2			x_3=	3		

Рис. 4.3. Решение системы линейных уравнений методом Крамера

Решение системы линейных уравнений методом обратной матрицы. Используя матричную форму записи, ту же систему уравнений можно записать в виде $Ax = B$, где A – матрица коэффициентов при неизвестных, x – матрица-столбец неизвестных, B – матрица-столбец свободных членов. Известно, что решение такой системы уравнений может быть найдено путем умножения ее слева на обратную матрицу коэффициентов: $A^{-1}Ax = A^{-1}B \Rightarrow x = A^{-1}B$. Таким образом, для нахождения решения достаточно найти обратную матрицу коэффициентов при неизвестных и умножить ее на матрицу свободных членов.

Решение представлено на рис. 4.4. Матрица коэффициентов расположена в ячейках B1:D3. С помощью функции МОБР вычислена и помещена в ячейки G1:I3 обратная матрица. Матрица свободных членов находится в ячейках L1:L3. Решение найдено с помощью функции МУМНОЖ путем умножения матриц G1:I3 и L1:L3. Результат помещен в ячейках O1:O3.

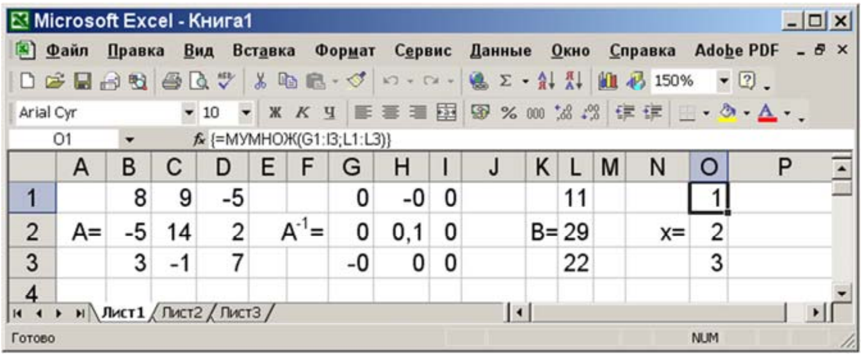


Рис. 4.4. Решение системы линейных уравнений методом обратной матрицы

4.2. Контрольные вопросы

1. Как выполняются операции над массивами?
2. Как выполняется умножение матриц?
3. Как найти обратную матрицу?
4. Как вычислить определитель матрицы?
5. Как решить систему линейных уравнений методом Крамера?
6. Как решить систему линейных уравнений методом обратной матрицы?

4.3. Выполнение работы

1. Ввести в ячейки элементы матриц C и D.

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & -2 \\ 7 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

2. Умножить матрицу C на число 2. *Указание*: выделить диапазон ячеек для размещения результата, ввести формулу и нажать клавиши Ctrl+Shift+Enter.

3. Сложить матрицы C и D.

4. Поэлементно перемножить матрицы C и D.

5. Умножить матрицу C на матрицу D.

6. Найти определитель матрицы C.

7. Найти обратную матрицу для матрицы C.

8. Транспонировать C.

9. Решить систему линейных уравнений методом умножения на обратную матрицу $x = A^{-1}b$. Выполнить проверку.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 4, \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 = -3, \\ -x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 1. \end{cases}$$

10. Решить систему линейных уравнений методом Крамера.

11. Решить системы линейных уравнений (по вариантам). Выполнить проверку.

1) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 13, \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x_1 + 0,47x_2 - 0,11x_3 + 0,55x_4 = 1,33 \\ 0,42x_1 + x_2 + 0,35x_3 + 0,17x_4 = 1,29 \\ -0,25x_1 + 0,67x_2 + 5x_3 + 0,36x_4 = 2,11 \\ 0,54x_1 - 0,32x_2 - 0,74x_3 + x_4 = 0,1. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 11 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 8, \end{cases}$ $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 2 = 0 \\ x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 5 = 0 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 + 4 = 0. \end{cases}$

3) $\begin{cases} 4x_1 = 7x_2 - 3x_3 = 10 \\ 2x_1 + 9x_2 - x_3 = 8 \\ x_1 - 6x_2 + 3x_3 = -3, \end{cases}$ $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 8x + 3y - 6z = 2 \\ 4x + y - 3z = 3. \end{cases}$

4) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 34x_3 = 11, \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 18 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8. \end{cases}$

12. Получить координаты центра масс системы N материальных точек. *Указание*: для нахождения суммы произведений использовать функцию СУММПРОИЗВ.

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i m_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}, \qquad y_c = \frac{\sum_{i=1}^{N} y_i m_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}.$$

x	1	7	10	16
y	2	8	15	5
m	8	2	6	4

13. Выполнить анализ сложной электрической цепи постоянного тока (рис. 4.5), т. е. определить значение токов I_1, I_2, I_3 на ее участках при заданных параметрах источников ЭДС E_1, E_2 и приемников R_1, R_2, R_3.

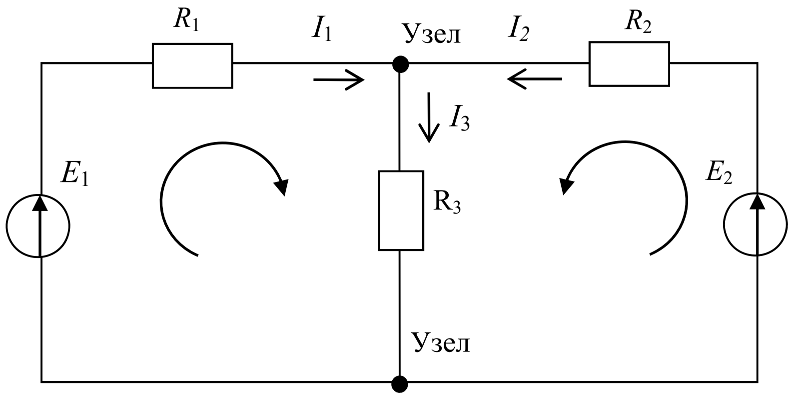


Рис. 4.5. Электрическая цепь постоянного тока

Токи сложной электрической цепи могут быть определены в результате совместного решения уравнений, составленных по первому и второму законам Кирхгофа.

$$\begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0 \\ R_1 I_1 + R_3 I_3 = E_1 \\ R_2 I_2 + R_3 I_3 = E_2. \end{cases}$$

Исходные данные

Вариант	R_1, Ом	R_2, Ом	R_3, Ом	E_1, В	E_2, В
1	50	20	40	26	20
2	25	40	30	30	23
3	15	35	18	42	32
4	45	28	34	32	16

Лабораторная работа № 5
ДИАГРАММЫ И ГРАФИКИ

Цель работы: научиться строить диаграммы и графики функций, управлять форматом вывода графиков.

5.1. Основные положения

Построение диаграммы. Диапазон ячеек заполнить значениями. Выделить этот диапазон и выбрать инструмент на вкладке Вставка => Гистограмма => Гистограмма с группировкой (рис. 5.1).

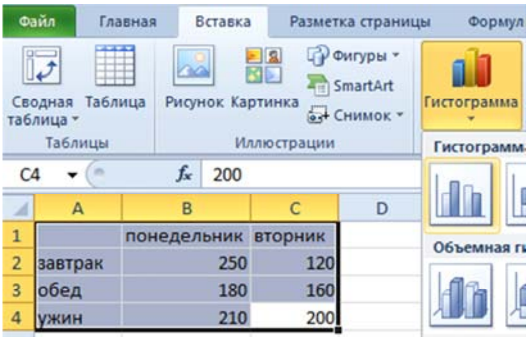


Рис. 5.1. Ввод данных и выбор инструмента для вставки диаграммы

Щелкнуть по графику, чтобы активировать его и вызвать дополнительное меню «Работа с диаграммами» (рис. 5.2). Там доступны три закладки инструментов: «Конструктор», «Макет», «Формат».

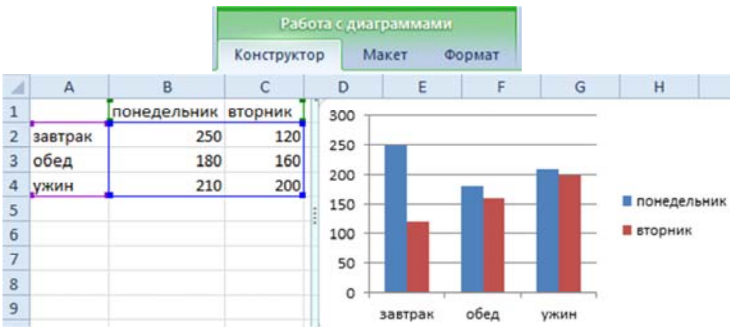


Рис. 5.2. Вызов меню «Работа с диаграммами»

Чтобы поменять оси в графике необходимо выбрать вкладку «Конструктор», а на ней – инструмент-переключатель «Строка/столбец».

Щелкнуть по любой ячейке, чтобы снять выделение с графика и таким образом дезактивировать режим его настройки.

Построение графика функции. Для построения графика функции необходимо иметь таблицу аргументов и значений функции в виде двух колонок или строк. Тогда, расположив курсор внутри таблицы или выделив необходимый диапазон данных, содержащий аргумент и функцию, следует выбрать в меню «Вставка» в группе «Диаграммы» тип диаграммы «Точечная» (ни в коем случае не «График»!!!) и указать тип графика (рис. 5.3).

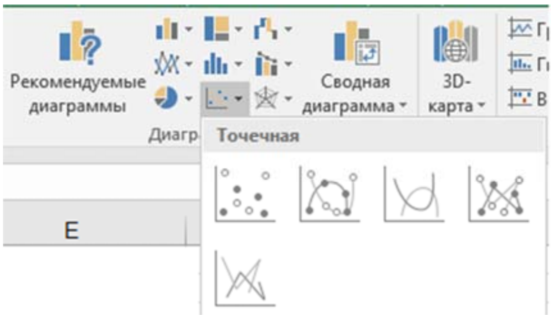


Рис. 5.3. Построение графика по точкам

Так, для функции $y = \sin x$ получим следующую картину (рис. 5.4):

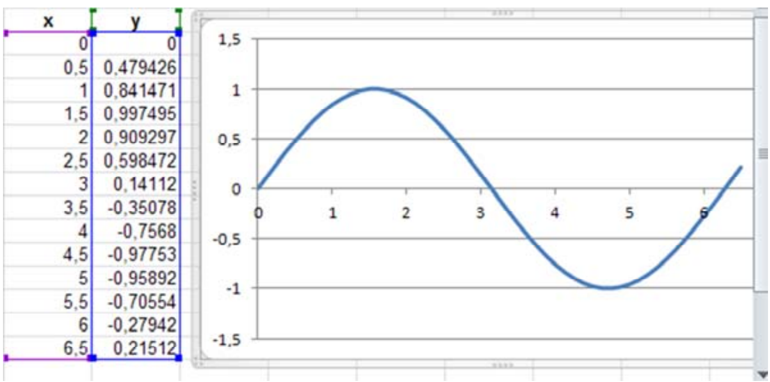


Рис. 5.4. Построение графика функции $y = \sin x$

График функции с разрывами. Если у функции имеется разрыв, то Excel соединит точки с двух сторон разрыва и график получится сплошной (рис. 5.5). Для получения правильной картины достаточно удалить некоторые значения функции, прилегающие к области разрывов.

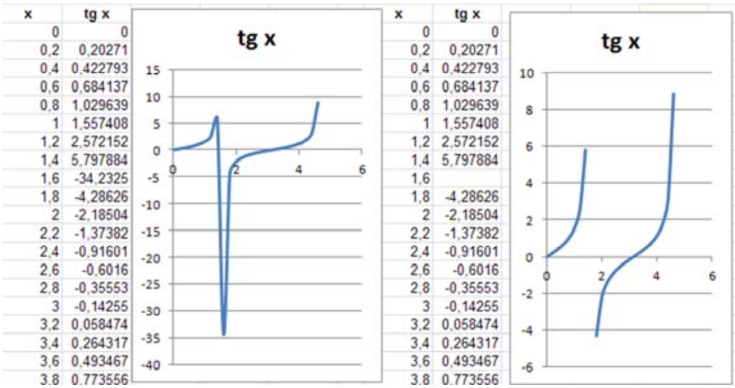


Рис. 5.5. Построение графика функции с разрывами

Управление подписями, осями, областью построения. С помощью команд вкладки «Макет» можно:

- вставить название диаграммы;
- вставить легенду;
- добавить подписи данных;
- задать параметры осей и линий сетки;
- задать формат области построения;
- добавить линии тренда и планки погрешностей.

Управление кривыми. Через контекстное меню, щелкнув правой клавишей мыши по кривой, можно вызвать окно «Формат ряда данных». С его помощью можно оформить кривую:

- задать тип линии (штриховая, штрих-пунктирная, сплошная и т. д.) или вовсе убрать линию;
- выбрать цвет линии и ее толщину;
- оформить окончания линии;
- выбрать тип маркера, его размеры, цвет;
- придать линии различные эффекты.

Добавление кривых на существующий график. Предположим, что на существующий график функции $y = \sin x$ необходимо добавить график еще одной функции, например, $y = 1{,}2 \cos x$. Для этого следует щелкнуть правой клавишей мыши по диаграмме, выбрать в контекстном меню команду «Выбрать данные». Откроется окно диалога «Выбор источника данных» (рис. 5.6).

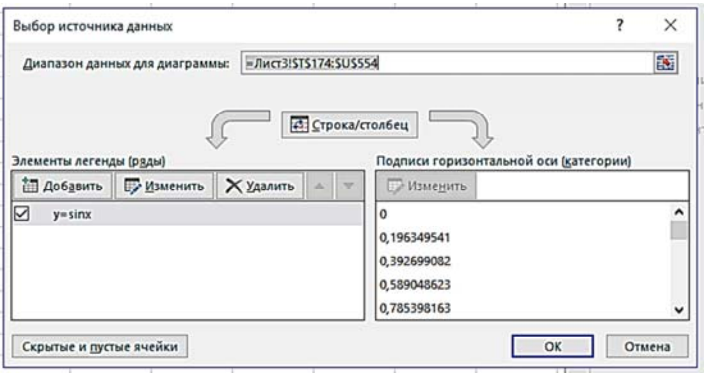


Рис. 5.6. Окно диалога «Выбор источника данных»

В этом окне следует выбрать команду «Добавить» и, указав имя нового ряда, выбрать для него диапазон значений аргумента и функции (рис. 5.7).

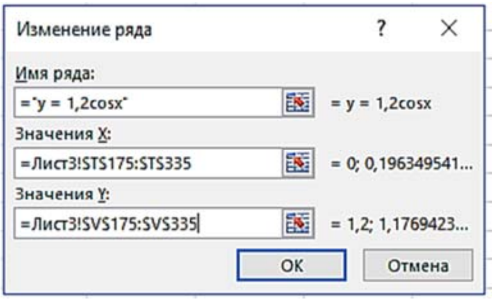


Рис. 5.7. Добавление нового ряда

Перенос кривых с одного графика на другой. Кривые не только можно добавлять, если они имеются на разных графиках, то для объединения их на одном достаточно выполнить стандартную процедуру «Копировать – Вставить».

5.2. Контрольные вопросы

1. Каковы основные типы диаграмм в Excel?
2. Этапы построения графика в Excel.
3. Как отредактировать диаграмму?
4. Как изменить цвет и стиль кривых на графике?
5. Как построить несколько кривых на одном графике?

5.3. Выполнение работы

1. Построить диаграмму начисления премий сотрудникам за первый квартал.

Фамилия	Январь	Февраль	Март	Всего
Иванов	100	90	120	
Синичкин	150	110	160	
Воробьева	130	120	140	

Указание: выделить таблицу вместе с заголовками (кроме столбца «Всего»), перейти на вкладку «Вставка». В группе «Диаграммы» выбрать тип «Гистограмма».

2. Вычислить премии за первый квартал и построить круговую диаграмму с указанием доли каждого сотрудника. *Указание*: выделить несмежные области – столбец с фамилиями, затем с нажатой клавишей Ctrl столбец «Всего». Выбрать тип диаграммы «Круговая». Дать ей название «Премии за 1 квартал». Убрать легенду. Щелкнуть правой кнопкой мыши по диаграмме. В появившемся контекстном меню выбрать пункт «Формат подписей данных». Включить в подписи имена категорий и доли.

3. Построить гистограмму изменения *Показателя* за указанные годы.

Год	2000	2005	2010	2015
Показатель	100	120	150	200

Указание: выделить строку «Показатель», на вкладке «Вставка» выбрать тип «Гистограмма». Щелкнуть в любом месте диаграммы. Откроется панель «Работа с диаграммами». На вкладке «Конструктор» нажать кнопку «Выбрать данные». Откроется окно диалога «Выбор источника данных». В области «Подписи горизонтальной оси (категории)» щелкнуть кнопку «Изменить», затем в поле «Диапазон подписей оси» указать ячейки с годами.

4. Построить температурный график за неделю в городах.

Город	пн	вт	ср	чт	пт	сб	вс
Минск	20	18	15	16	14	12	13
Витебск	18	16	14	14	13	11	10
Гродно	21	18	17	18	16	14	15

Указание: выбрать тип диаграммы «График». С помощью команд вкладки «Макет» подписать оси: горизонтальная ось – Дни недели, вертикальная ось – Температура. Изменить заливку области построения графика, цвет и тип линий.

5. Построить на отрезке [–3; 3] график функции $y_1 = 0,2e^{-x}\sin(x)$. *Указание*: построить последовательность значений x от –3 до 3 с шагом 0,5. Вычислить значения функции при соответствующих значениях аргумента. Выделить диапазон значений x, y. Выбрать тип диаграммы «Точечная».

6. На построенную в предыдущем пункте диаграмму добавить график функции $y_2 = \dfrac{2x}{x^2+1}$ на той же области определения аргумента. Изменить на диаграмме тип линии.

7. Построить поверхность гиперболического параболоида

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}, \quad a = 4,\ b = 5,\ -5 \le x \le 5,\ -5 \le y \le 5.$$

y \ x	–5	–4	…	4	5
–5	формула $z\ (x, y)$				
–4					
…					
5					

Указание: использовать смешанную адресацию в расчетной формуле. Формулу распространить на всю область. Тип диаграммы – поверхность.

Лабораторная работа № 6
РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ДЕЛЕНИЯ ПОПОЛАМ

Цель работы: получить представление о приближенных методах решения уравнений, ознакомиться с методом деления пополам.

6.1. Основные положения

Не всегда возможно найти решение уравнения $f(x) = 0$ аналитически, т. е. выразить его на языке формул и найти корень точно. Поэтому на практике приходится искать приближенные значения корней уравнений. Для этого используются различные методы приближенных вычислений. В процессе приближенного отыскания корней уравнения выделяют два этапа: отделение корня и уточнение корня. Одним из самых простых и наглядных, и вместе с тем эффективных, является метод деления пополам.

Суть метода состоит в следующем. Прежде всего, каким-либо способом (например, графически) определяется интервал, на котором находится искомый корень и корень является единственным на этом интервале. Непременным условием работоспособности метода является то, что функция на границах этого интервала имеет разный знак и, следовательно, корень находится между ними. Затем вычисляется значение функции в средней точке интервала. Знак функции в этой точке будет совпадать со знаком функции в одной из границ интервала. Это означает, что искомый корень находится на другой половине интервала. Именно она снова делится пополам, и процедура повторяется до тех пор, пока не будет найдено решение с приемлемой точностью (рис. 6.1).

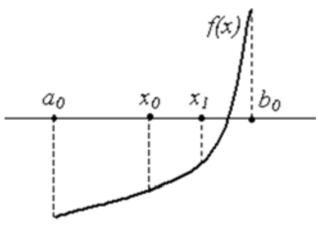


Рис. 6.1. Иллюстрация метода деления пополам

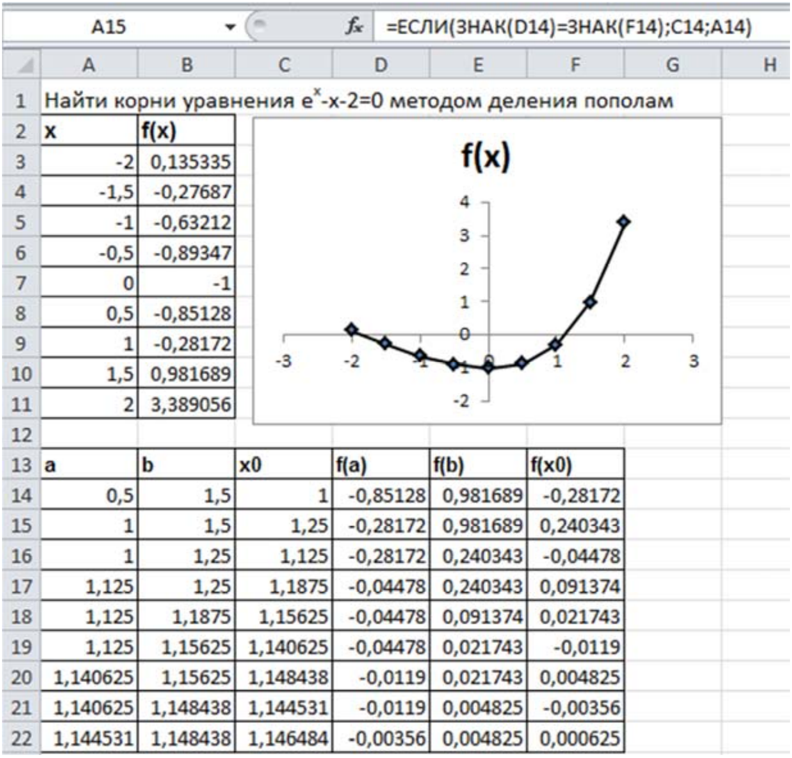
6.2. Контрольные вопросы

1. Каковы этапы нахождения приближенных значений корней уравнений?
2. Опишите алгоритм метода деления пополам.
3. Критерий окончания вычислений.

6.3. Выполнение работы

1. Найти корни уравнения $e^x - x - 2 = 0$ на отрезке [–2, 2] методом деления пополам до четырех значащих цифр.

1) Построить график функции $f(x) = e^x - x - 2$ на заданном отрезке [–2, 2] с шагом 0,5 (рис. 6.2).



x	f(x)
-2	0,135335
-1,5	-0,27687
-1	-0,63212
-0,5	-0,89347
0	-1
0,5	-0,85128
1	-0,28172
1,5	0,981689
2	3,389056

a	b	x0	f(a)	f(b)	f(x0)
0,5	1,5	1	-0,85128	0,981689	-0,28172
1	1,5	1,25	-0,28172	0,981689	0,240343
1	1,25	1,125	-0,28172	0,240343	-0,04478
1,125	1,25	1,1875	-0,04478	0,240343	0,091374
1,125	1,1875	1,15625	-0,04478	0,091374	0,021743
1,125	1,15625	1,140625	-0,04478	0,021743	-0,0119
1,140625	1,15625	1,148438	-0,0119	0,021743	0,004825
1,140625	1,148438	1,144531	-0,0119	0,004825	-0,00356
1,144531	1,148438	1,146484	-0,00356	0,004825	0,000625

Рис. 6.2. Нахождение корней методом деления пополам

2) Визуально определить отрезок [a, b], на котором находится один из корней. Значения a, b занести в первую строку таблицы. Например, в ячейку A14 можно поместить значение аргумента на левом краю отрезка a = 0,5, а в ячейку B14 – значение на правом краю b = 1,5.

a	b	x_0	$f(a)$	$f(b)$	$f(x_0)$

3) Вычислить значение аргумента в середине отрезка $x_0 = (a + b) / 2$, для этого в ячейку C14 ввести формулу =(A14+B14)/2.

4) Вычислить значение функции $f(x) = e^x - x - 2$ на левой границе отрезка при $x = a$, для этого в ячейке Д14 записать формулу =exp(A14)-A14-2.

5) Скопировать эту формулу и вставить в ячейки для вычисления $f(b)$ и $f(x_0)$ (можно протянуть маркер заполнения на две ячейки вправо), при этом ссылки на аргумент сместятся.

6) Во второй строке следует поместить координаты нового отрезка с корнем. Корень находится на той половине отрезка, где функция имеет разные знаки на концах. Для определения левого конца отрезка записать формулу с использованием логической функции ЕСЛИ: при равенстве знаков функций $f(a)$и $f(x_0)$ в качестве левой границы a берется значение x_0 из предыдущей строки, а при их неравенстве остается прежняя левая граница a. Формула в ячейке A15 имеет вид: =ЕСЛИ(ЗНАК(D14)=ЗНАК(F14);C14;A14).

7) По аналогии в ячейке B15 записать формулу для определения значения правого конца отрезка b.

8) Остальные формулы скопировать из первой строки.

9) Распространить находящиеся во второй строке формулы вниз, наблюдая за ходом вычислений. Остановить процесс можно, когда совпадет заданное число знаков в значениях x_0 в соседних строках.

10) Для вычисления второго корня – скопировать таблицу и вставить на новом месте. Записать новые значения границ отрезка a и b, где находится второй корень.

11) Excel позволяет автоматизировать процесс повторения вычислений, пока не будет достигнута заданная точность. После заполнения ячеек A15 и B15 поступить несколько иначе: вернуться

к ячейке A14 и записать в ней формулу =A15, а в ячейке B14 записать формулу =B15 (рис. 6.3).

A14 f_x =A15

	A	B	C	D	E	F
13	a	b	x0	f(a)	f(b)	f(x0)
14	1,146187	1,146194	1,146191	-1,4E-05	2,66E-06	-5,5E-06
15	1,146191	1,146194				
16						

Рис. 6.3. Реализация метода деления пополам с итеративными вычислениями

Однако для того чтобы циклические вычисления выполнялись, необходимо в меню Файл => Параметры => Формулы установить флажок «Включить итеративные вычисления» и указать предельное число итераций и относительную погрешность, по достижении которой вычислительный процесс остановится (рис. 6.4).

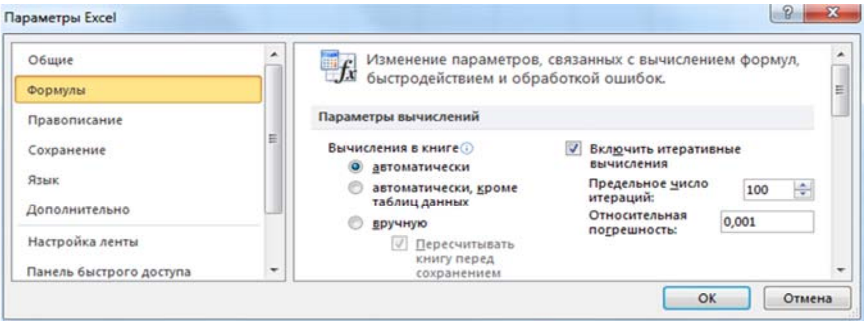


Рис. 6.4. Включение итеративных вычислений

2. Решить уравнения методом деления пополам (по вариантам)

1) $e^x \cos x = 0;$

2) $x \cdot 2^x = 1;$

3) $\sqrt{x+1} = x - 1;$

4) $x - 2\sqrt{x} - 15 = 0;$

5) $2\lg x = \lg(5x - 4);$

6) $3\cos x = \cos^2 x.$

Лабораторная работа № 7
ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНЫХ. ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ

Цель работы: научиться вычислять производные с заданной точностью, ознакомиться с итерационными методами решения уравнений, изучить метод Ньютона.

7.1. Основные положения

Вычисление первой производной. Во многих случаях вычисление производных аналитически затруднительно или вовсе невозможно (если функция задана таблично). Тогда производная вычисляется приближенно или, как говорят, численно. В основе численного вычисления производных лежит разложение функции $f(x)$ в ряд и ограничение этого ряда несколькими членами. Если отрезок оси x, на котором задана функция, разбить на множество равноотстоящих точек $\{x_i\}$, то для каждой точки x_i можно записать разложение в ряд (здесь используются обозначения $h = x_{i+1} - x_i = x_i - x_{i-1}$, $f_i, = f(x_i)$, $f_{i+1} = f(x_{i+1})$, $f_{i-1} = f(x_{i-1})$):

$$f_{i+1} = f_i + hf_i' + \frac{h^2}{2} f_i'' + \frac{h^3}{6} f_i''' + O(h^4),$$

$$f_{i-1} = f_i - hf_i' + \frac{h^2}{2} f_i'' - \frac{h^3}{6} f_i''' + O(h^4).$$

Если мы вычтем из первого уравнения второе, то получим

$$f_{i+1} - f_{i-1} = 2hf_i' + O(h^3),$$

откуда получаем

$$f_i' = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h}. \qquad (7.1)$$

Эта формула называется **формулой центральных разностей**, поскольку вычисляет значение производной в центральной точке, используя значения функции в соседних точках, и позволяет вычислить значение производных с высокой степенью точности (порядка h^2).

Вычисление второй производной. Если мы не вычтем, а сложим два приведенных выше разложения функции в ряды, то получим

$$f_{i+1} + f_{i-1} = 2f_i + h^2 f_i'' + O(h^4),$$

откуда получаем приближенное выражение для вычисления второй производной

$$f_i'' = \frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}}{h^2}, \tag{7.2}$$

справедливое со вторым порядком $O(h^2)$ точности.

Решение уравнений методом Ньютона. Уравнение вида $f(x) = 0$ решается следующим образом. Сначала выбирается нулевое приближение к корню (точка x_0). В этой точке строится касательная к графику $y = f(x)$. Точка пересечения этой касательной с осью абсцисс является следующим приближением для корня (точка x_1). В этой точке снова строится касательная и т. д. Последовательность точек x_0, x_1, x_2… должна привести к истинному значению корня (рис. 7.1). Условием сходимости является $f(x_0)f''(x_0) > 0$.

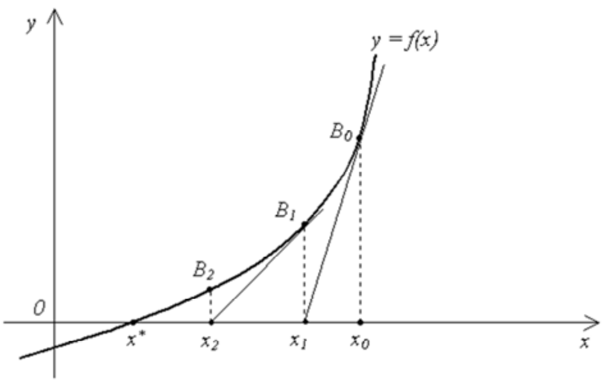


Рис. 7.1. Геометрическая интерпретация метода Ньютона

Так как уравнение касательной, проходящей через точку (x_0, $f(x_0)$), записывается в виде

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

а в качестве следующего приближения x_1 для корня исходного уравнения принимается точка пересечения этой прямой с осью абсцисс, то следует положить в этой точке $y = 0$, откуда следует уравнение для нахождения следующего приближения через предыдущее:

$$x_1 = x_0 - f(x_0) / f'(x_0). \qquad (7.3)$$

Затем вычисления повторяются.

Суть *итерационных методов* состоит в построении последовательных приближений к решению задачи. Отдельный шаг итерационного процесса называется **итерацией**. Основным преимуществом итерационных методов является однотипность выполняемых на каждом шаге операций, что облегчает составление программ.

7.2. Контрольные вопросы

1. Как численно найти первую и вторую производные?
2. Каков вычислительный алгоритм метода Ньютона?
3. Как оценить погрешность решения?
4. Как организовать итерационные вычисления?
5. Какие средства имеет Excel для поиска решений?

7.3. Выполнение работы

1. Вычислить первую и вторую производные от функции $f(x) = e^x - x - 2$ в точке $x = 1{,}5$ с точностью до четырех значащих цифр.

1) Заполнить таблицу. В качестве шага отступа от заданной точки $x = 1{,}5$ взять $h = 0{,}1$.

h	*x*	*x–h*	*x+h*	*f(x)*	*f(x–h)*	*f(x+h)*	*f '(x)*	*f ''(x)*

2) Вычислить значения функции в указанных точках.

3) Вычислить значение первой производной по формуле (7.1).

4) Вычислить значение второй производной по формуле (7.2).

5) Для оценки точности повторить вычисления с уменьшенным в два раза шагом. Для этого во второй строке положить в ячейке A4 значение =A3/2, в ячейке B4 – значение =B3. Остальные формулы скопировать из первой строки (рис. 7.2). Выделить всю вторую строку и протянуть вниз за маркер заполнения (рис. 7.2). Остановить процесс, пока не будут совпадать четыре значащие цифры в производных.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Производные $f(x)=e^x - x - 2$								
2	h	x	x-h	x+h	f(x)	f(x-h)	f(x+h)	f '	f ''
3	0,1	1,5	1,4	1,6	0,981689	0,6552	1,353032	3,489162	4,485425
4	0,05	1,5	1,45	1,55	0,981689	0,813115	1,16147	3,483557	4,482623
5	0,025	1,5	1,475	1,525	0,981689	0,896036	1,070144	3,482156	4,481922
6	0,0125	1,5	1,4875	1,5125	0,981689	0,938517	1,025562	3,481806	4,481747
7									

Рис. 7.2. Численное нахождение производных

2. Вычислить первую и вторую производные от заданных функций в указанных точках с точностью до четырех значащих цифр (по выбору).

1) $(\cos 2x + 5)(3 - x)$ $\qquad x = 2;$

2) $\sin^2(2x)$ $\qquad x = 8;$

3) $\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+4}}\sin \pi x$ $\qquad x = 0{,}7;$

4) $x^2 e^{-x}$ $\qquad x = 0{,}3;$

5) $\dfrac{\ln(x+1)}{x} e^{-x}$ $\qquad x = 0{,}5.$

3. Найти корни уравнения $e^x - x - 2 = 0$ на отрезке [–2, 2] методом Ньютона.

1) Построить график функции $f(x) = e^x - x - 2$ на заданном отрезке [–2, 2] с шагом 0,5.

2) Визуально определить начальное приближение к одному из корней x_0 (точке пересечения графика функции с осью абсцисс). Занести значение x_0 в ячейку первой строки таблицы.

x_0	$x_0–h$	x_0+h	$f(x_0)$	$f(x_0–h)$	$f(x_0+h)$	$f'(x_0)$	x_1

3) С целью последующего численного нахождения производной задать небольшое отклонение от точки x_0, например, h = 0,001 и посчитать $x_0 – h$ и $x_0 + h$.

4) Вычислить значения функции в этих точках.

5) Найти значение производной в точке x_0 по формуле (7.1).

6) Найти следующее приближение к корню x_1 по формуле (7.3).

7) Для выполнения второго шага во второй строке таблицы в ячейку для x_0 ввести ссылку на значение x_1 из первой строки. Остальные вычисления повторить, как в первой строке.

8) Вторую строку выделить и протянуть за маркер заполнения вниз, пока не совпадет заданное число знаков в значениях x_0 (рис. 7.3).

H3 | fx | =A3-D3/G3

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Найти корни уравнения e^x-x-2=0 методом Ньютона						h	0,001
2	x$_0$	x$_0$-h	x$_0$+h	f(x$_0$)	f(x-h)	f(x+h)	f '(x0)	x$_1$
3	1,5	1,499	1,501	0,981689	0,97821	0,985173	3,48169	1,218042
4	1,218042	1,217042	1,219042	0,162521	0,160142	0,164903	2,380564	1,149772
5	1,149772	1,148772	1,150772	0,007702	0,005546	0,009861	2,157475	1,146203
6	1,146203	1,145203	1,147203	2,01E-05	-0,00212	0,002168	2,146223	1,146193
7								

Рис. 7.3. Нахождение корней уравнения методом Ньютона

4. Для вычисления второго корня уравнения $e^x – x – 2 = 0$ скопировать таблицу и вставить на новом месте. Задать новое начальное приближение к этому корню.

5. Найти корни уравнения $e^x – x – 2 = 0$ на отрезке [–2, 2] методом Ньютона, используя циклические вычисления.

1) Включить в Excel итеративные вычисления: Файл => Параметры => Формулы => Включить итеративные вычисления. При необходимости можно указать предельное число шагов итерационного процесса и относительную погрешность.

2) После заполнения первой строки таблицы и получения первого значения x_1 следует это значение присвоить первой ячейке, где находится начальное приближение x_0. При этом вычислительный процесс будет зациклен (рис. 7.4).

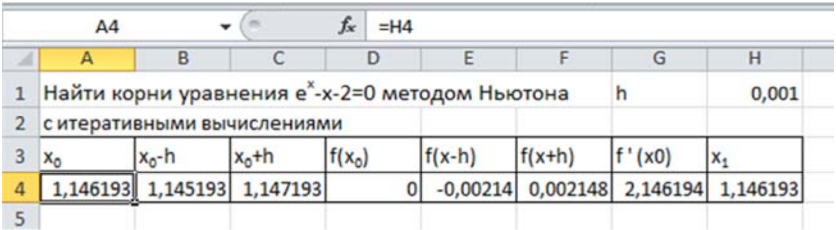


Рис. 7.4. Реализация метода Ньютона с итеративными вычислениями

6. Найти корни уравнения $e^x - x - 2 = 0$, используя встроенное средство Excel «Подбор параметра».

1) В одной ячейке задать начальное приближение к корню, в другой вычислить значение функции $f(x) = e^x - x - 2$ в этой точке.

2) Вызвать окно диалога «Подбор параметра»:

Данные => Работа с данными => Анализ «что если» => Подбор параметра.

В поле «Установить в ячейке» указать ячейку, где вычисляется функция. В поле «Значение» задать число 0. В поле «Изменяя значение ячейки» указать ячейку, где находится начальное приближение. Нажать кнопку ОК (рис. 7.5).

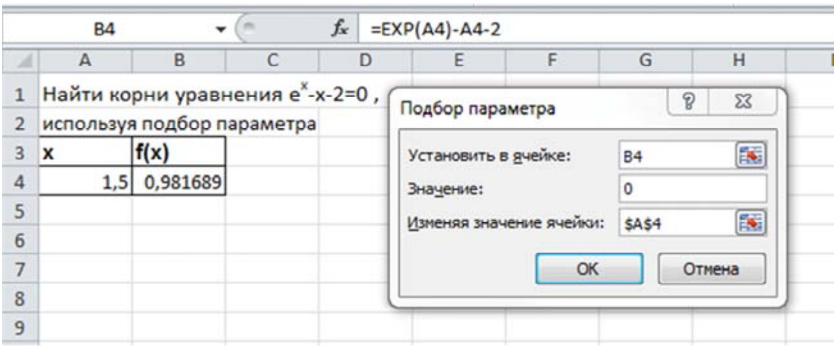


Рис. 7.5. Подбор параметра

3) После выполнения команды вместо начального приближения в ячейке будет находиться решение.

7. Найти корни уравнения $e^x - x - 2 = 0$, используя надстройку Excel «Поиск решения» (рис. 7.6).

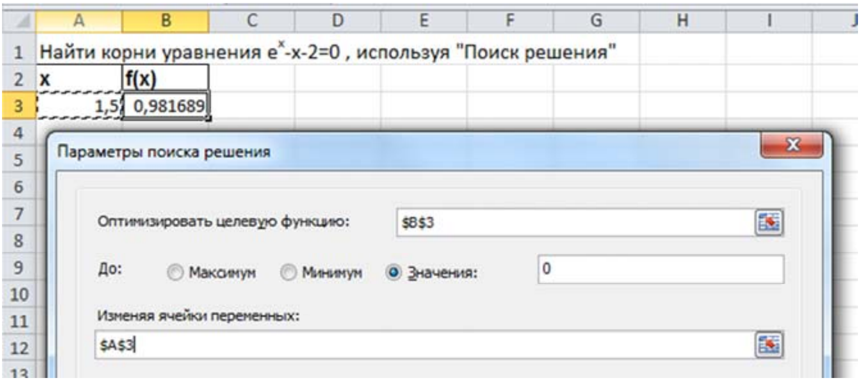


Рис. 7.6. Нахождение корня с помощью надстройки «Поиск решения»

1) В одной ячейке задать начальное приближение к корню, в другой вычислить значение функции $f(x) = e^x - x - 2$ в этой точке.

2) Открыть окно надстройки «Поиск решения»:

Данные => Анализ => Поиск решения.

3) Указать параметры поиска решения:

В поле «Оптимизировать целевую функцию» указать ячейку, где вычисляется функция, установить переключатель в положение «Значения» и ввести в поле число 0, в поле «Изменяя ячейки переменных» указать ячейку, где находится начальное приближение.

4) Нажать кнопку «Найти решение». После того, как решение будет найдено, его можно сохранить. Решение будет помещено в ячейку, где находилось начальное приближение.

8. Решить уравнения п. 2 лабораторной работы № 6 методом Ньютона (по вариантам).

Лабораторная работа № 8
ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Цель работы: ознакомиться с методами численного интегрирования.

8.1. Основные положения

Вычисление интегралов. Приближенное вычисление определенных интегралов базируется на простой, хорошо известной аналогии: геометрический смысл определенного интеграла функции есть площадь фигуры, ограниченной графиком этой функции и осью ординат (рис. 8.1).

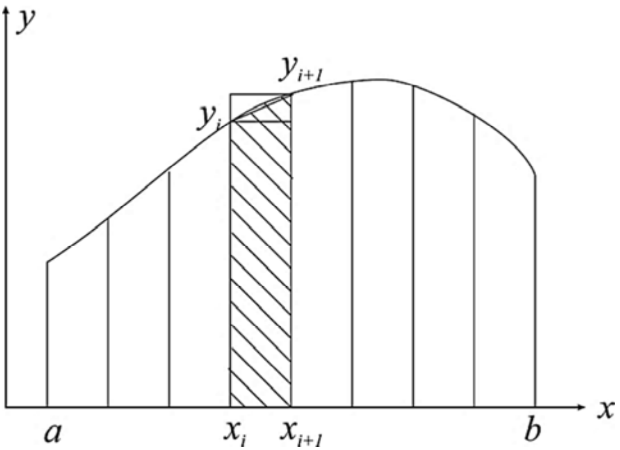


Рис. 8.1. Геометрическая интерпретация методов численного интегрирования

График функции $y = f(x)$ можно разбить на N отрезков и записать в виде

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{N} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx, \qquad (8.1)$$

после чего остается только выбрать способ вычисления соответствующего интеграла под знаком суммы. Существуют три простейших варианта приближенной записи этого интеграла, наглядный смысл которых ясен из их названия и демонстрируется на рис. 8.1:

- формула левых прямоугольников – $\sum\limits_{i=1}^{N} f(x_i)(x_{i+1} - x_i)$; (8.2)

- формула правых прямоугольников – $\sum\limits_{i=1}^{N} f(x_{i+1})(x_{i+1} - x_i)$; (8.3)

- формула трапеций – $\sum\limits_{i=1}^{N} \dfrac{f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2}(x_{i+1} - x_i)$. (8.4)

Точность вычислений выше для формулы трапеций. Формулы левых и правых прямоугольников имеют первый порядок точности, формула трапеций – второй.

Наглядная интерпретация этих формул состоит в том, какой фигурой заменяется истинная криволинейная трапеция. Понятно, что прямоугольник оставляет за своими пределами намного большую площадь (или наоборот, увеличивает ее), чем трапеция, образованная прямой линией, соединяющей две соседние точки на графике функции. Поэтому ошибка в методе трапеций намного меньше.

Однако еще лучше произвольную функцию могла бы описать парабола. Но для того, чтобы ее построить, мало двух точек, нужны три точки, через которые можно единственным образом провести параболу. Метод приближенного вычисления интегралов, основанный на замене исходной функции параболой, был разработан британским математиком Томасом Симпсоном (1710–1761) и записывается следующим образом:

$$\int\limits_a^b f\left(x\right)dx \approx \sum_{i=1, i\neq 2k}^{N-1} \left(y_i + 4y_{i+1} + y_{i+2}\right)h/3,$$

где число отрезков N должно быть четным, $h = (b - a)/N$ – длина отрезка, а индекс i принимает только нечетные значения.

Метод Симпсона имеет четвертый порядок точности и прост в программировании, что обеспечивает ему широкое применение.

8.2. Контрольные вопросы

1. В чем заключается геометрический смысл определенного интеграла?
2. Какова идея методов прямоугольников и трапеций?
3. Каковы вычислительные формулы этих методов?
4. В чем суть метода Симпсона?

8.3. Выполнение работы

1. Вычислить интеграл $\int_2^3 (e^x - x - 2)dx$.

1) Разбить область интегрирования на 10 отрезков, значения x_i от 2 до 3 с шагом 0,1 занести в таблицу. Следует учесть, что количество точек на единицу больше, чем количество отрезков.

Номер точки, i	x_i	$f(x_i)$	левых прямоугольников	правых прямоугольников	трапеций	Симпсона
1						
2						
3						
…						
11						
Значение интеграла			Σ	Σ	Σ	Σ

2) Вычислить в этих точках значения подынтегральной функции $f(x) = e^x - x - 2$.

3) В первой строке вычислить значение интеграла на участке от первой точки до второй по формуле левых прямоугольников (8.2).

4) Вычислить значение интеграла на участке от первой точки до второй по формуле правых прямоугольников (8.3).

5) Вычислить значение интеграла на участке от первой точки до второй по формуле трапеций (8.4).

6) Протянуть формулы до предпоследней точки, поскольку число частей на единицу меньше числа точек, разбивающих отрезок, затем столбцы просуммировать.

7) Вычислить значение интеграла на участке от первой точки до третьей по методу Симпсона:

$$\int_{x_1}^{x_3} f(x)\,dx \approx \left(f(x_1)+4f(x_2)+f(x_3)\right)(x_2-x_1)/3.$$

8) Выделить ячейки первой и второй строки и протянуть вниз за маркер заполнения. Затем столбец просуммировать.

9) Для контроля вычислить значение определенного интеграла аналитически. Первообразной является функция $e^x - x^2/2 - 2x$.

На рис. 8.2 представлены примеры реализации методов численного интегрирования в Excel.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1		**Вычисление интегралов**								
2		**Метод**								
3	i	**xi**	**f(x)**	**левых**	**правых**	**трапеций**	**Симпсона**		Аналитически	
4	1	2	3,38906	0,33891	0,40662	0,3727613		a	2	1,389056
5	2	2,1	4,06617	0,40662	0,4825	0,4445592	0,8159583	b	3	9,585537
6	3	2,2	4,82501	0,4825	0,56742	0,5249598				8,196481
7	4	2,3	5,67418	0,56742	0,66232	0,6148679	1,138164			
8	5	2,4	6,62318	0,66232	0,76825	0,7152835				
9	6	2,5	7,68249	0,76825	0,88637	0,8273116	1,540563			
10	7	2,6	8,86374	0,88637	1,01797	0,9521735				
11	8	2,7	10,1797	1,01797	1,16446	1,0912189	2,0409104			
12	9	2,8	11,6446	1,16446	1,32741	1,2459396				
13	10	2,9	13,2741	1,32741	1,50855	1,4179841	2,6608922			
14	11	3	15,0855							
15	Значение интеграла			7,62224	8,79188	8,2070595	8,1964879			
16										
17										

	B	C	D	E	F	G
1	**Вычисление интегралов**					
2	**Метод**					
3	**xi**	**f(x)**	**левых**	**правых**	**трапеций**	**Симпсона**
4	2	=EXP(B4)-B4-2	=C4*(B5-B4)	=C5*(B5-B4)	=(B5-B4)*(C5+C4)/2	
5	2,1	=EXP(B5)-B5-2	=C5*(B6-B5)	=C6*(B6-B5)	=(B6-B5)*(C6+C5)/2	=(B6-B4)/6*(C4+4*C5+C6)
6	2,2	=EXP(B6)-B6-2	=C6*(B7-B6)	=C7*(B7-B6)	=(B7-B6)*(C7+C6)/2	
7	2,3	=EXP(B7)-B7-2	=C7*(B8-B7)	=C8*(B8-B7)	=(B8-B7)*(C8+C7)/2	=(B8-B6)/6*(C6+4*C7+C8)
8	2,4	=EXP(B8)-B8-2	=C8*(B9-B8)	=C9*(B9-B8)	=(B9-B8)*(C9+C8)/2	
9	2,5	=EXP(B9)-B9-2	=C9*(B10-B9)	=C10*(B10-B9)	=(B10-B9)*(C10+C9)/2	=(B10-B8)/6*(C8+4*C9+C1
10	2,6	=EXP(B10)-B10-2	=C10*(B11-B10)	=C11*(B11-B10)	=(B11-B10)*(C11+C10)	
11	2,7	=EXP(B11)-B11-2	=C11*(B12-B11)	=C12*(B12-B11)	=(B12-B11)*(C12+C11)	=(B12-B10)/6*(C10+4*C11-
12	2,8	=EXP(B12)-B12-2	=C12*(B13-B12)	=C13*(B13-B12)	=(B13-B12)*(C13+C12)	
13	2,9	=EXP(B13)-B13-2	=C13*(B14-B13)	=C14*(B14-B13)	=(B14-B13)*(C14+C13)	=(B14-B12)/6*(C12+4*C13-
14	3	=EXP(B14)-B14-2				
15	Значение интеграла		=СУММ(D4:D14	=СУММ(E4:E14	=СУММ(F4:F14)	=СУММ(G4:G14)
16						

Рис. 8.2. Реализация в Excel методов численного интегрирования

10) Повторить те же вычисления с уменьшенным в два раза шагом. Сравнить полученные результаты с предыдущими вычислениями.

2. Вычислить значения определенных интегралов методом трапеций.

1) $\int_{0}^{0,6} x \cdot \mathrm{tg}(x^2+1)dx$ $\qquad$ $\int_{0}^{1} x \cdot (2+x)e^x dx;$

2) $\int_{0}^{1} \frac{x^x \cdot \ln\left(1+x^x\right)}{1+x^x}dx$ $\qquad$ $\int_{0}^{1} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+4}}\sin(\pi x)dx;$

3) $\int_{0}^{0.75} \frac{\sin^2(x)}{\sqrt{1-x^2}}e^{-(1+x)}dx$ $\qquad$ $\int_{1}^{\pi} \frac{dx}{x\left(1+\ln(x)\right)};$

4) $\int_{0}^{0.5} \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$ $\qquad$ $\int_{0}^{0.5} x \cdot tg\left(x^2+1\right)\ln(x+1)dx;$

5) $\int_{0.5}^{1} \frac{\cos(x)}{x^2+1}e^{-x}dx$ $\qquad$ $\int_{0}^{1} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+4}}\mathrm{arctg}(x)dx;$

6) $\int_{0}^{0.5} \frac{\sin(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$ $\qquad$ $\int_{0}^{1} x^3 e^{-x^2}dx;$

7) $\int_{0}^{0.5} \frac{x-\sqrt{1-x^2}}{x+\sqrt{1-x^2}}dx$ $\qquad$ $\int_{0}^{1} \sin x \cdot (5+x)e^x dx;$

8) $\int_{1}^{\pi} \frac{dx}{x \cdot (1+\ln(x))}$ $\qquad$ $\int_{0}^{1} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+4}}\cos(\pi x)dx.$

3. Вычислить интеграл от функции, заданной таблично. Имеется табличная зависимость изобарных массовых теплоемкостей газов c_p от температуры (табл. 8.1). Найти количество подведенной теплоты к выбранному газу в данном интервале изменения температур по формуле

$$q = \int_{T_1}^{T_2} c_p dT.$$

Таблица 8.1

Зависимость массовых теплоемкостей газов от температуры

Температура T °C	Массовая теплоемкость c_p, кДж/(кг_К)					
	кислород	азот	окись углерода	водород	воздух	водяной пар
600	0,9927	1,076	1,0861	14,542	1,0496	2,0092
700	1,0048	1,0869	1,0978	14,587	1,0605	2,0419
800	1,0157	1,0974	1,1091	14,641	1,0710	2,0754
900	1,0258	1,1078	1,1200	14,706	1,0815	2,1097
1000	1,035	1,1179	1,1304	14,776	1,0907	2,1436
1100	1,0434	1,1271	1,1401	14,853	1,0999	2,1771
1200	1,0509	1,1359	1,1493	14,934	1,1082	2,2106
1300	1,0580	1,1447	1,1577	15,023	1,1166	2,2429
1400	1,0647	1,1526	1,1656	15,113	1,1242	2,2743
1500	1,0714	1,1602	1,1731	15,202	1,1313	2,3048

4. Дополнительное задание. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми. *Указание*: изобразить фигуру графически, найти координаты узлов, где пересекаются графики функций. Вычислить интеграл от разности функций в найденных пределах.

1) $y = \sqrt[3]{x}$ и $y = 1 + 0,07x$;

2) $y = \ln x$ и $y = 1/x$, а также прямой $y = 3$;

3) $y = \sin x$ и $y = (\pi - x)/5$ в диапазоне от 0 до π;

4) $y = \sqrt[4]{x}\ln x$ и $y = 1/x - 1$ и прямой $x = 5$;

5) $y = -(x-2,5)^2 + 4 - 1,5x^2 e^{-0,035x^3}$ и $y = -2$;

6) $y = \sqrt{x}$ и $y = 0,75x$;

7) $y = e^x$ и $y = -1,44x^2 + 1,2x + 1,75$;

8) $y = x^2$ и $y = \cos x$.

Лабораторная работа № 9
РЕШЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Цель работы: научиться численно решать обыкновенные дифференциальные уравнения.

9.1. Основные положения

Метод Эйлера. Практически все инженерные задачи в основе своей сводятся к дифференциальным уравнениям, которые связывают физические величины и их производные. Поэтому умение решать дифференциальные уравнения является базовым в инженерной практике. В общем виде эта проблема была сформулирована французским математиком Коши и носит его имя. *Задача Коши* формулируется следующим образом:

$$y' = f\left(x, y\right), \quad y\left(x_0\right) = y_0; \quad x \in \left[x_0; x_1\right]. \tag{9.1}$$

Это означает, что нам известна связь производной от функции y с величинами x, y, известно значение искомой функции в точке x_0, необходимо найти значение функции y на всем отрезке от x_0 до x_1.

В некоторых простейших случаях задача Коши имеет аналитическое решение. Однако в случае сложных зависимостей $f\left(x, y\right)$ точных решений нет, и приходится искать приближенные решения с помощью численных методов.

Один из первых методов был предложен известным математиком и физиком Эйлером и носит его имя. Основную идею метода иллюстрирует рис. 9.1.

Поясним содержание рисунка. Предположим, что нам известно значение функции $y(x)$ в точке x_i. Обозначим эту величину как y_i. Через эту точку проходит касательная к графику функции АВ. В точке x_{i+1} эта касательная принимает значение y_{i+1}. Из графика видно, что это значение отличается от истинного значения искомой функции в точке x_{i+1}, которое равно $y(x_{i+1})$. Однако из этого же графика понятно, что при приближении точки x_{i+1} к точке x_i разница $y(x_{i+1}) - y_{i+1}$ будет уменьшаться, стремясь к нулю.

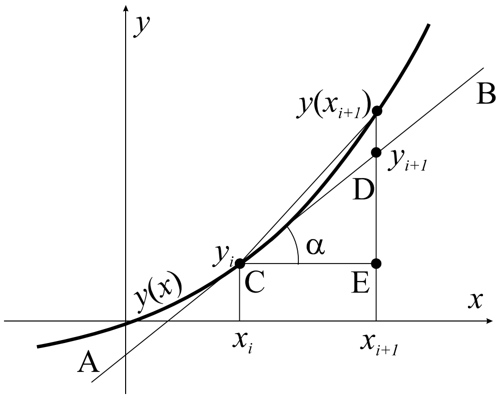


Рис. 9.1. Геометрическая интерпретация метода Эйлера

Эйлер строго показал, что эта разница имеет порядок расстояния h между соседними точками x_i и x_{i+1}. Тогда, исходя из треугольника CDE, можно записать

$$\mathrm{DE}/\mathrm{CE} = \mathrm{tg}\alpha.$$

Так как $\mathrm{DE} = y_{i+1} - y_i$, а $\mathrm{CE} = x_{i+1} - x_i$, то можно записать

$$y_{i+1} - y_i = (x_{i+1} - x_i) \cdot \mathrm{tg}\alpha = h \cdot \mathrm{tg}\alpha.$$

Но α – это угол наклона касательной к графику функции, тангенс которого, как известно, равен производной этой функции. Тогда это уравнение можно переписать в виде

$$y_{i+1} - y_i = y'(x_i)h = h \cdot f(x_i, y_i).$$

Так как искомая функция и найденное значение отличаются на величину порядка $O(h)$, то можно записать

$$y(x_{i+1}) = y_i + hf(x_i, y_i) + O(h).$$

Вычислительный алгоритм записывается следующим образом:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i). \tag{9.2}$$

Ошибка накапливается и в конце заданного отрезка может быть весьма значительной. С уменьшением шага эта ошибка уменьшается. Поэтому критерием заданной точности может быть изменение искомой функции на правом краю заданного отрезка при уменьшении шага. Как правило, шаг уменьшают вдвое. Если найденная функция при этом не изменяется в требуемом количестве значащих цифр, то решение считается найденным с приемлемой точностью.

Метод Рунге – Кутты. Метод Эйлера чрезвычайно нагляден, но в связи с низкой точностью в практике численных решений применяется редко. Намного чаще применяется более громоздкий, но намного более точный метод, который разработали в XIX веке математики Рунге и Куттá. Метод Рунге – Кутты записывается следующим образом:

$$y_{i+1} = y_i + h\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right)/6;$$

$$k_1 = f\left(x_i, y_i\right)\ ; \quad k_2 = f\left(x_i + h/2, \quad y_i + k_1 h/2\right)\ ; \qquad (9.3)$$

$$k_3 = f\left(x_i + h/2, \quad y_i + k_2 h/2\right)\ ; \quad k_4 = f\left(x_i + h, \quad y_i + k_3 h\right).$$

Метод имеет четвертый порядок точности. Последовательность реализации метода состоит из пяти шагов: сначала поочередно, исходя из имеющихся в условии данных, вычисляются коэффициенты k, затем находится значение функции y_{i+1}.

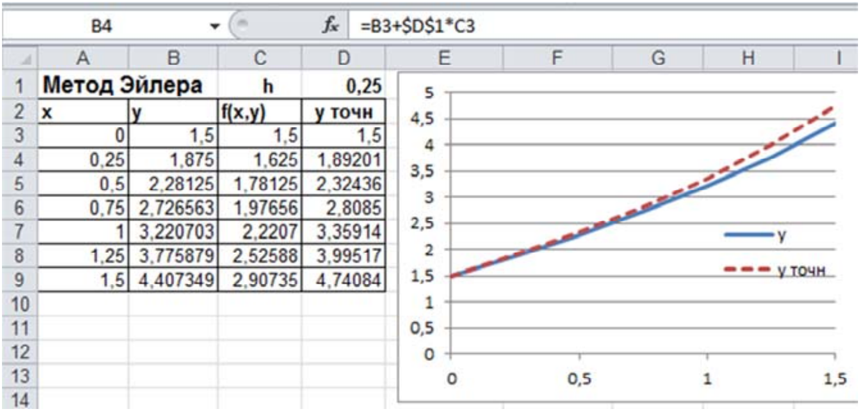
9.2. Контрольные вопросы

1. Как формулируется задача Коши?
2. Что является решением дифференциального уравнения?
3. В чем суть метода Эйлера?
4. Какой порядок точности имеет метод Рунге – Кутты?

9.3. Порядок выполнения работы

1. Решить в Excel обыкновенное дифференциальное уравнение $y' = y - x$ с заданными начальными условиями $x_0 = 0$; $y_0 = 1{,}5$ на отрезке от 0 до 1,5 методом Эйлера. Сравнить с точным решением. Построить графики.

1) Разбить область решения на отрезки величиной h = 0,25. В первой строке таблицы в Excel в ячейки A3 и B3 ввести начальные значения величин x_0 и y_0, известные из условия задачи. В ячейке C3 вычислить значение функции $f(x, y) = y - x$ при заданных начальных данных (рис. 9.2).



B4 f_x =B3+$D$1*C3

	A	B	C	D
1	**Метод Эйлера**		h	0,25
2	x	y	f(x,y)	y точн
3	0	1,5	1,5	1,5
4	0,25	1,875	1,625	1,89201
5	0,5	2,28125	1,78125	2,32436
6	0,75	2,726563	1,97656	2,8085
7	1	3,220703	2,2207	3,35914
8	1,25	3,775879	2,52588	3,99517
9	1,5	4,407349	2,90735	4,74084

Рис. 9.2. Решение дифференциального уравнения методом Эйлера

2) Во второй строке ввести формулы: значение x равно значению x из предыдущей строчки плюс шаг h; значение y вычисляется в соответствии с выражением (9.2). Из ячейки B3 берется предыдущее значение функции y и прибавляется правая часть уравнения из ячейки C3, умноженная на шаг h из ячейки D1. Следующие строки создаются путем копирования предыдущих строк.

3) По точкам x и y построить график найденной таблично функции $y(x)$.

4) Задача имеет точное решение, равное $y = x + 1 + 0{,}5 \cdot e^x$. Вычислить по этой формуле точные значения и добавить их на график.

5) Выполнить вычисления с шагом h, уменьшенным вдвое. Полученную зависимость добавить на график. Сравнить значения функций на конце отрезка.

2. Найти решение предыдущей задачи методом Рунге – Кутты.

1) Заполнить таблицу, представленную на рис. 9.3. Значение x меняется от 0 до 1,5 с шагом 0,25. Вычислить значения k по формулам (9.3).

	A	B	C	D	E	F
16	**Метод Рунге-Кутты**			**h**	**0,25**	
17	**x**	**y**	**k1**	**k2**	**k3**	**k4**
18	0	1,5	1,5	1,5625	1,5703125	1,64257813
19	0,25	1,892008	1,64201	1,72226	1,732290904	1,82508119
20	0,5	2,32435	1,82435	1,92739	1,940273916	2,05941821
21	0,75	2,808479	2,05848	2,19079	2,207327624	2,36031092
22	1	3,359105	2,3591	2,52899	2,550229106	2,74666225
23	1,25	3,995114	2,74511	2,96325	2,990520413	3,24274389
24	1,5	4,740756	3,24076	3,52085	3,555861904	3,87972112

B19 =B18+$E$16/6*(C18+2*D18+2*E18+F18)

Рис. 9.3. Решение дифференциального уравнения методом Рунге – Кутты

2) Полученную зависимость добавить на график п. 1.

3. Найти решение обыкновенного дифференциального уравнения $y' = f(t, y)$ на интервале $[t_0; t_1]$ с заданными начальными условиями $y(t_0) = y_0$.

1) $y' = t^3 \cos(y/\sqrt{5})$, $\quad t_0 = 0;\ t_1 = 1;\ y_0 = 3;$

2) $y' = \dfrac{y}{1-t^2}$, $\quad t_0 = 0;\ t_1 = 0,5;\ y_0 = 1;$

3) $y' = \ln t \cos(y/3)$, $\quad t_0 = 1;\ t_1 = 2;\ y_0 = 0;$

4) $y' = \dfrac{ty}{\sqrt{t^2-4}}$, $\quad t_0 = 2,5;\ t_1 = 5;\ y_0 = 1;$

5) $y' = y\sqrt{\dfrac{1+t}{1-t}}$, $\quad t_0 = -1;\ t_1 = 0,99;\ y_0 = 1;$

6) $y' = \dfrac{t}{2y} \cdot \dfrac{2-t}{(1-t)^2}$, $\quad t_0 = 2;\ t_1 = 3,615;\ y_0 = 1;$

7) $y' = \dfrac{y^2 \ln t}{t}$, $t_0 = 0{,}01;\ \ t_1 = 3;\ \ y_0 = 1;$

8) $y' = \dfrac{\operatorname{ctg} t}{y^2}$, $t_0 = 0{,}04;\ \ t_1 = 3{,}1;\ \ y_0 = 1.$

4. Решить следующую задачу.

Бассейн был наполнен холодной водой. Чтобы повысить температуру в бассейне, открыли кран с горячей водой. Зависимость температуры воды в бассейне T от температуры горячей воды, поступающей в бассейн $T_{вх}$, объема бассейна V и объемной скорости потока горячей воды $Q = dV / dt$ описывается дифференциальным уравнением (предполагается идеальное смешивание, потери тепла не учитываются):

$$\frac{dT}{dt} = \frac{Q}{V}\left(T_{вх} - T\right).$$

Температура воды в бассейне в начальный момент времени T_0 = = 10,2 °C. Температура горячей воды $T_{вх}$ = 54,4 °C. Бассейн наполняется со скоростью Q = 30 л/мин и всего в него вмещается V = = 3000 л воды.

Необходимо найти зависимость температуры воды в бассейне от времени в течение 60 мин.

Построить график. По графику визуально определить время, в течение которого температура воды поднимется до 26 °C.

Лабораторная работа № 10
МЕТОД КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

Цель работы: ознакомиться с методом конечных разностей, научиться решать дифференциальные уравнения с частными производными.

10.1. Основные положения

Многие задачи, связанные с процессами теплопроводности и диффузии, распространением электромагнитных полей в проводящих средах, движением вязкой жидкости и др., сводятся к решению уравнений с частными производными.

Уравнение теплопроводности. Процесс переноса тепла, как известно, подчиняется закону Фика́, который в общем виде записывается следующим образом:

$$\vec{q} = -\lambda(T)\,\mathrm{grad}T, \tag{10.1}$$

где $\vec{q}$ – плотность потока тепла;

λ – теплопроводность;

T – температура.

Знак «минус» в выражении (10.1) показывает, что поток тепла направлен в сторону, противоположную градиенту температуры, т. е. тепло распространяется в направлении от горячей области к холодной. Если в исследуемой области нет источников тепла, то в установившемся режиме, когда распределение температуры в области не изменяется, все тепло, которое попадает внутрь области, должно полностью ее покидать. Математически это означает, что

$$\mathrm{div}\vec{q} = 0, \tag{10.2}$$

что с учетом (10.1) для двухмерного случая может быть записано как

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial y}\right) = 0. \tag{10.3}$$

Если в рассматриваемой области имеется источник тепла с объемной плотностью A, то уравнение (10.2) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial y}\right)=-A. \tag{10.4}$$

В случае постоянной теплопроводности уравнение (10.4) может быть записано в виде:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=-\frac{A}{\lambda}=-Q. \tag{10.5}$$

Метод конечных разностей. Решение уравнения (10.5) аналитически возможно только для областей простой формы: прямоугольник, круг, кольцо. В остальных ситуациях точное решение этого уравнения невозможно. Тогда приходится использовать приближенные методы решения таких уравнений.

Приближенное решение уравнения (10.5) в области сложной формы методом конечных разностей состоит из нескольких этапов: 1) построение сетки; 2) построение разностной схемы; 3) решение системы алгебраических уравнений.

Рассмотрим последовательно каждый из этапов и реализацию с помощью пакета Excel.

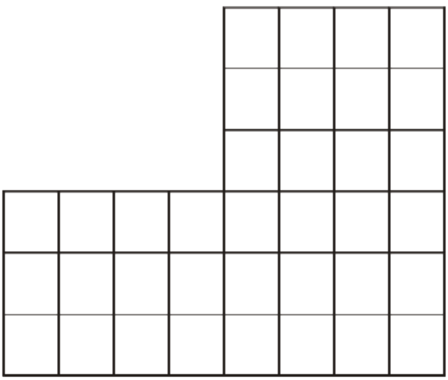


Рис. 10.1. Сетка

Построение сетки. Пусть область имеет форму, показанную на рис. 10.1. Нанесем на область равномерную сетку, состоящую из квадратов со стороной h. Вместо того чтобы искать непрерывное решение уравнения (10.5), определенное в каждой точке области, будем искать приближенное решение, определенное только в узловых точках сетки, т. е. в углах квадратов.

Построение разностной схемы. Для построения разностной схемы рассмотрим произвольный внутренний узел сетки Ц (центральный) (рис. 10.2). С ним соседствуют четыре узла: В (верхний), Н (нижний), Л (левый) и П (правый). Расстояние между узлами в сетке равно h. Тогда, используя выражение для приближенной записи вторых производных в уравнении (10.5), можно записать:

$$\frac{T_{\text{Л}} - 2T_{\text{Ц}} + T_{\text{П}}}{h^2} + \frac{T_{\text{В}} - 2T_{\text{Ц}} + T_{\text{Н}}}{h^2} = -Q,$$

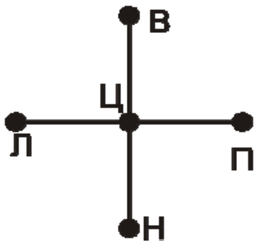


Рис. 10.2. Схема взаимосвязей узлов в сетке

откуда легко получить выражение, связывающее значение температуры в центральной точке с ее значениями в соседних точках:

$$T_{\text{Ц}} = \frac{T_{\text{Л}} + T_{\text{П}} + T_{\text{В}} + T_{\text{Н}}}{4} + \frac{Qh^2}{4}. \quad (10.6)$$

Такая схема, в которой производные заменяются конечными разностями, а для поиска значений в точке сетки используются только значения в ближайших соседних точках, называется **центрально-разностной схемой**, а сам метод – методом конечных разностей.

Уравнение, аналогичное (10.6), мы получаем для каждой точки сетки, которые, таким образом, оказываются связанными друг с другом. То есть мы имеем систему алгебраических уравнений, в которой число уравнений равно числу узлов сетки. Решать такую систему уравнений можно различными методами.

Решение системы алгебраических уравнений. Метод итераций. Пусть в граничных узлах температура задана и равна 20, а мощность теплового источника равна 100. Размеры нашей области заданы и равны по вертикали 6, а по горизонтали 8, так что сторона квадрата сетки (шаг) h = 1. Тогда выражение (10.6) для вычисления температуры во внутренних точках принимает вид

$$T_{\text{Ц}} = \frac{T_{\text{Л}} + T_{\text{П}} + T_{\text{В}} + T_{\text{Н}}}{4} + \frac{100 \cdot 1^2}{4}. \quad (10.7)$$

Поставим в соответствие каждому узлу ячейку на листе Excel. В ячейках, соответствующих граничным точкам, введем число 20 (на рис. 10.3 они выделены серым цветом). В остальных ячейках запишем формулу (10.7). Например, в ячейке F2 она будет выглядеть следующим образом: =(F1 + F3 + E2 + G2)/4 + 100*(1^2)/4.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1					**20**	**20**	**20**	**20**	**20**
2					**20**	99,87924	122,5	99,1316	**20**
3					**20**	137,017	170,9892	134,0264	**20**
4	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	157,1994	190,4133	145,9849	**20**
5	**20**	82,6162	107,9191	121,4933	138,2522	181,3674	187,4797	139,4997	**20**
6	**20**	82,54573	107,5667	119,8021	130,1482	142,5384	138,6381	104,5345	**20**
7	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**

Рис. 10.3. Схема ячеек на листе Excel, соответствующая расчетной области

Записав эту формулу в ячейку F2, можно ее скопировать и вставить в остальные ячейки области, соответствующие внутренним узлам. При этом появится сообщение Excel о циклической ссылке. Перейдите в окно Файл => Параметры => Формулы, установите флажок в разделе «Итеративные вычисления», указав при этом в качестве относительной погрешности величину 0,00001, а в качестве предельного количества итераций – 10000. Такие значения обеспечат малую счетную погрешность и гарантируют, что итерационный процесс дойдет до заданной погрешности.

Однако эти значения не обеспечивают малую погрешность самого метода, так как последняя зависит от погрешности при замене вторых производных конечными разностями. Очевидно, что эта погрешность тем меньше, чем меньше шаг сетки, т. е. размер квадрата, на котором строится разностная схема. Это означает, что точно вычисленное значение температуры в узлах сетки, представленное на рис. 10.3, на самом деле может оказаться совсем не соответствующим действительности. Существует единственный метод проверить найденное решение: найти его на более мелкой сетке и сравнить с предыдущим. Если эти решения отличаются мало, то можно считать, что найденное распределение температуры соответствует действительности.

Уменьшим шаг вдвое. Вместо 1 он станет равным ½. Число узлов изменится. По вертикали вместо 7 узлов станет 13 (12 квадратов, т. е. 13 узлов), а по горизонтали вместо 9 станет 17 узлов. При этом не следует забывать, что величина шага уменьшилась вдвое и теперь в формуле (10.7) вместо 1^2 нужно в правой части подставлять $(1/2)^2$. В качестве контрольной точки, в которой будем сравнивать найденные решения, возьмем точку с максимальной температурой, отмеченную на рис. 10.3 желтым цветом. Результат вычислений показан на рис. 10.4.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
1					20	20	20	20	20								
2					20	99,9	122,5	99,1	20								
3					20	137,0	171,0	134,0	20								
4	20	20	20	20	20	157,2	190,4	146,0	20								
5	20	82,6	107,9	121,5	138,3	181,4	187,5	139,5	20								
6	20	82,5	107,6	119,8	130,1	142,5	138,6	104,5	20								
7	20	20	20	20	20	20	20	20	20								
8																	
9																	
10									20	20	20	20	20	20	20	20	20
11									20	51,4	69,7	79,4	82,4	79,2	69,3	51,1	20
12									20	70,7	102,9	120,6	126,0	119,9	102,0	70,0	20
13									20	83,7	125,7	149,0	156,0	147,7	123,6	82,1	20
14									20	93,3	142,0	168,9	176,5	166,1	137,6	89,7	20
15									20	102,5	155,1	183,0	189,9	177,6	146,1	94,2	20
16	20	20	20	20	20	20	20	20	20	116,6	168,1	193,1	197,6	183,2	149,9	96,2	20
17	20	46,8	61,9	71,0	76,9	81,5	86,3	93,7	109,4	150,7	182,4	198,8	199,1	182,9	149,0	95,5	20
18	20	60,3	84,9	100,2	110,2	117,8	125,0	134,2	148,2	169,4	187,1	195,6	192,2	175,2	142,6	91,9	20
19	20	64,4	92,2	109,6	121,0	129,4	136,7	144,8	154,9	166,6	175,9	179,2	174,0	158,1	129,3	84,6	20
20	20	60,3	84,9	100,1	109,9	116,9	122,7	128,6	134,9	141,2	145,7	146,4	141,4	128,9	106,9	72,2	20
21	20	46,8	61,9	70,9	76,6	80,6	83,8	86,8	89,8	92,6	94,4	94,3	91,2	84,3	72,1	52,3	20
22	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20

Рис. 1.4. Результат вычислений

Видно, что уменьшение шага привело к существенному изменению значения температуры в контрольной точки – на 4 %. Для повышения точности найденного решения следует еще уменьшить шаг сетки. Для h = ¼ получим в контрольной точке 199,9, а для h = = 1/8 соответствующее значение равно 200,6. Можно сделать вывод, что дальнейшее уменьшение шага не приведет к существенному изменению температуры в контрольной точке и точность найденного решения можно считать удовлетворительной.

Используя возможности пакета Excel, можно построить поверхность температуры, наглядно представляющую ее распределение в исследуемой области (рис. 10.5).

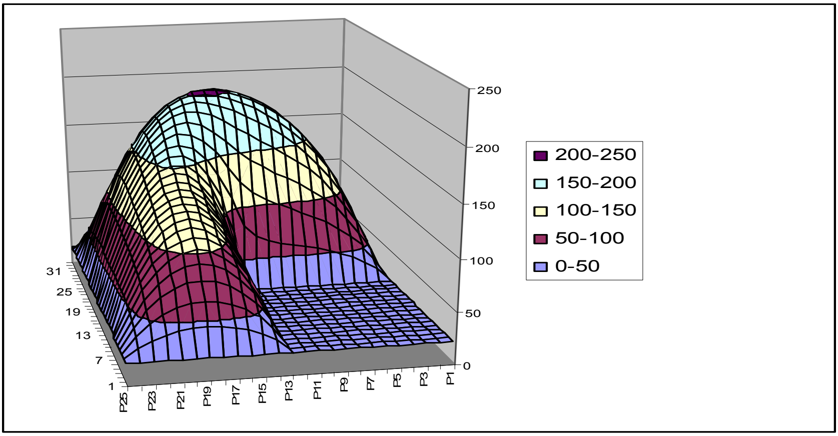


Рис. 10.5. Распределение температуры

10.2. Контрольные вопросы

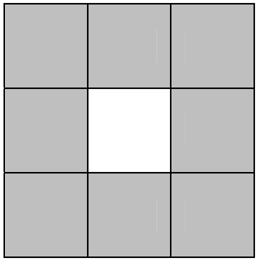
1. Каким уравнением описывается распределение температуры на плоскости пластины?
2. В чем идея метода конечных разностей?
3. Каковы этапы приближенного решения уравнения методом конечных разностей?
4. Как строится разностная схема?
5. Как приближенно вычислить вторую производную?
6. Как разрешить в Excel выполнять итеративные вычисления?
7. Каков критерий окончания расчетов?

10.3. Выполнение работы

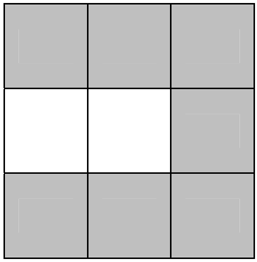
Рассчитать методом конечных разностей поле распределения температуры внутри заданных областей. Считать, что размер одного квадрата равен 1. Распределение температуры описывается уравнением

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=-Q.$$

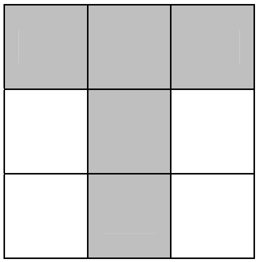
1. Температура внешних границ области равна 10 °С, а внутренняя поверхность нагрета до температуры 45 °С, $Q = 270$.



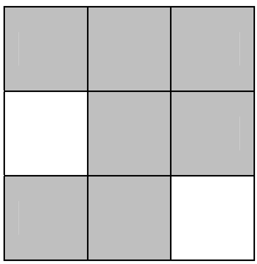
2. Температура верхней, правой и нижней границ области равна 20 °С, а левая и внутренняя поверхность имеют температуру 125 °С, $Q = 200$.



3. Температура всех границ верхних трех квадратов равна 20 °С, а двух нижних 75 °С, $Q = 100$.



4. Температура верхней и правой границ области равна 8 °С, а всех остальных 44 °С, $Q = 185$.



Лабораторная работа № 11
АППРОКСИМАЦИЯ ДАННЫХ

Цель работы: научиться строить формулы, описывающие экспериментальные данные.

11.1. Основные положения

Аппроксимация экспериментальных данных. Зачастую, получив совокупность экспериментальных данных, требуется построить функцию, приближенно описывающую эти данные и сглаживающую случайные отклонения, возникающие из-за погрешностей эксперимента. Такую функцию называют **аппроксимирующей**, а сам процесс построения функции – **аппроксимацией**.

Метод наименьших квадратов. Математически задача может быть сформулирована следующим образом: если известна совокупность экспериментальных данных $y_i = f(x_i)$, которая аппроксимируется функцией $p(x)$, то должно выполняться требование: величина квадрата ошибки (отклонения экспериментальных данных от аппроксимирующей функции)

$$G = \sum_{i=1}^{N} \left[y_i - p(x_i) \right]^2$$

должна быть минимальной. Задача сводится к поиску минимума функции G относительно коэффициентов аппроксимирующей функции.

Рассмотрим простейший пример, когда аппроксимирующая функция является линейной, т. е. $p(x) = a_0 + a_1x$. Тогда

$$G(a_0, a_1) = \sum_{i=1}^{N} (y_i - a_0 - a_1 x_i)^2.$$

Поиск минимума этой функции означает, что ее производные по неизвестным коэффициентам a_0 и a_1 должны быть равны нулю.

После дифференцирования получаем систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Решив систему, получаем выражения для коэффициентов a_0 и a_1:

$$a_0 = \frac{\sum y_i \sum x_i^2 - \sum x_i \sum x_i y_i}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2},$$

$$a_1 = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}.$$

В Excel реализован метод наименьших квадратов.

Для нахождения коэффициента a_0 линейной функции $y = a_0 + a_1 x$ используется статистическая функция

ОТРЕЗОК(известные_значения_y;известные_значения _x).

Коэффициент линейной функции a_1 находят с помощью статистической функции

НАКЛОН(известные_значения_y;известные_значения_x).

В обеих функциях известные_значения_y – это интервал ячеек, содержащих числовые зависимые точки данных (y_i);

известные_значения_x – множество независимых точек данных (x_i).

Массив значений коэффициентов $\{a_n, \ldots, a_1, a_0\}$ линейной функции $y = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x_n$ возвращает функция

ЛИНЕЙН(известные_значения_y; известные_значения_x; константа;статистика).

Если аргумент константа имеет значение ИСТИНА или опущен, то константа a_0 вычисляется обычным образом, если аргумент константа имеет значение ЛОЖЬ, то значение a_0 полагается равным 0. Функция ЛИНЕЙН может также возвращать дополнительную регрессионную статистику. Поскольку возвращается массив значений, функция должна задаваться в виде формулы массива, т. е. выделяется группа ячеек, в которых необходимо создать формулу, вводится формула, а затем нажимаются клавиши CTRL+SHIFT+ENTER.

Вычисляет на основе линейной аппроксимации будущее значение y, соответствующее заданному значению x, функция

ПРЕДСКАЗ(новое_значение_x;известные_значения_y; известные_значения_x).

Возвращает значения y для заданного массива новые_значения_х в соответствии с линейной аппроксимацией следующая функция:

ТЕНДЕНЦИЯ(известные_значения_у; известные_значения _ х; новые_значения_х; константа).

Если аргумент константа имеет значение ИСТИНА или опущен, то a_0 вычисляется обычным образом, Если аргумент константа имеет значение ЛОЖЬ, то коэффициент a_0 полагается равным 0.

Если экспериментальная зависимость имеет нелинейный характер, то для того, чтобы воспользоваться описанными выше средствами Excel, эту зависимость пытаются линеаризовать путем логарифмирования и введением новых переменных:

$$
\begin{array}{lcl}
y=ae^{bx} & \Rightarrow & \mathrm{n}y=\ln\,(ae^{bx})=\ln a+bx; \\
y=ax^{b} & \Rightarrow & \ln y=\ln\,(ax^{b})=\ln a+b\,\ln x; \\
y=ab^{x} & \Rightarrow & \ln y=\ln\,a+x\,\ln b; \\
y=1/(a+bx) & \Rightarrow & 1/y=\,a+bx; \\
y=a+b/x & \Rightarrow & y=a+b(1/x);\ yx=ax+b,\ \text{если } x \text{ мало.}
\end{array}
$$

В Excel имеется функция ЛГРФПРИБЛ, которая вычисляет параметры экспоненциальной кривой $y = bm^x$, аппроксимирующей заданные значения, и функция РОСТ, которая вычисляет значения для новых значений x в соответствии с экспоненциальной аппроксимацией.

Excel позволяет построить аппроксимирующую кривую на основе диаграммы. Для этого необходимо построить график с исходными данными и, кликнув правой клавишей мыши по одной из точек, вызвать контекстное меню, выбрать пункт «Добавить линию тренда». Откроется окно «Формат линии тренда» (рис. 11.1).

Отметим, что Excel предлагает в качестве аппроксимирующих функций не только прямую («Линейная»), но и экспоненту (e^x, «Экспоненциальная»), логарифмическую функцию ($\ln x$), полиномиальную ($a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$) с показателем максимальной степени до 6, степенную (a^x). Кроме того, установив флажки «показывать уравнение на диаграмме» и «поместить на диаграмму величину достоверности аппроксимации (R^2)», можно вывести на диаграмму уравнение аппроксимирующей линии и среднеквадратичное отклонение от исходных данных.

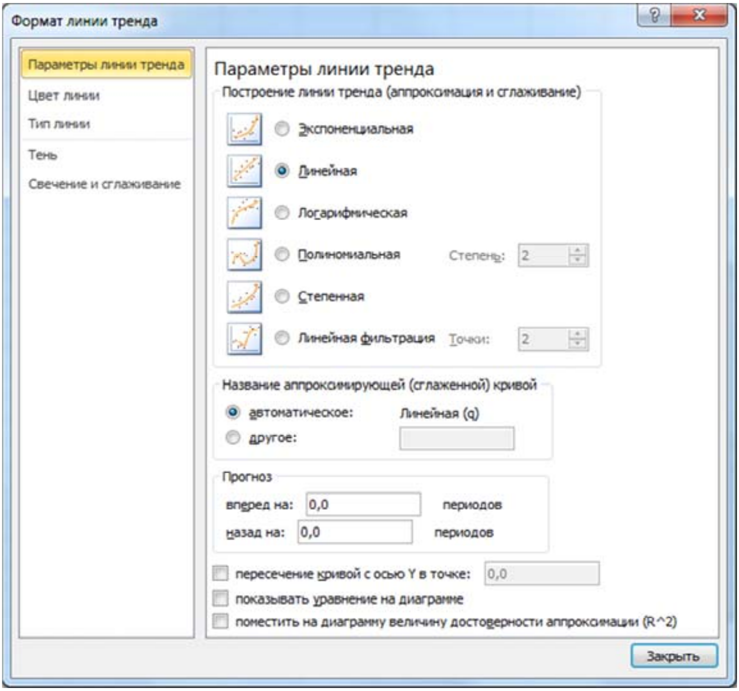


Рис. 11.1. Построение линии тренда

11.2. Контрольные вопросы

1. Что такое аппроксимация?
2. В чем заключается идея метода наименьших квадратов?
3. Какие функции Microsoft Excel позволяют найти коэффициенты линейной аппроксимирующей функции?
4. Как получить значение функции в промежуточных точках?
5. Как построить линию тренда?

11.3. Выполнение работы

1. Описать экспериментальную зависимость $y(x)$ линейной функцией $f(x) = a + bx$. Построить график: эксперимент – маркеры, теория – непрерывная линия. Для экспериментальных точек на график добавить линию тренда и вывести уравнение прямой.

1)

x	2	4	6	8	10
y	5,5	6,3	7,2	8	8,6

Решение представлено на рис. 11.2.

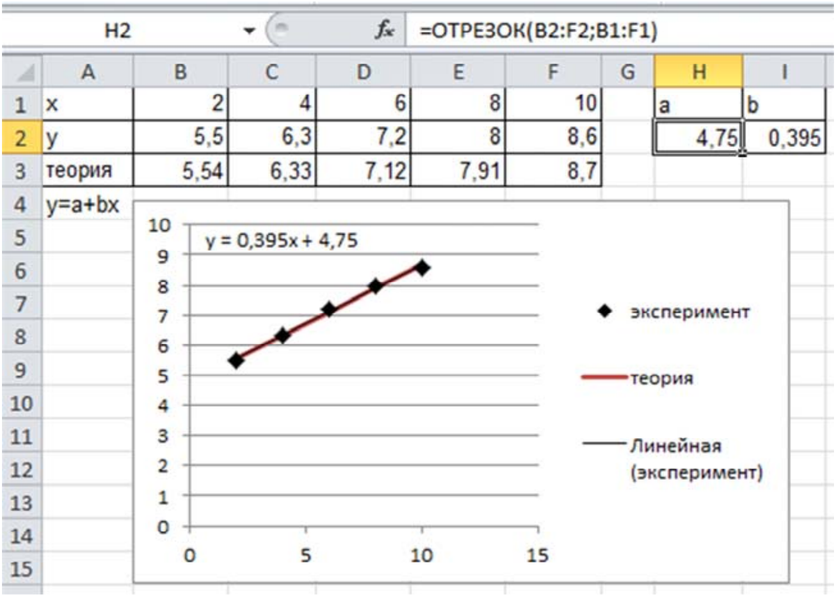


Рис. 11.2. Аппроксимация данных линейной функцией

2)

x	–20	–10	0	10	20	30	40	50	60
y	60	71	76	81	87	98	103	111	120

3)

x	10	12	14	16	18	20	22	24	26
y	15	13	11	8,5	7	4	2,5	1	–1

4)

x	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2	2,2	2,4	2,6
y	5,2	5	4,5	4,4	3,9	3,8	3,7	3,3	3,1

2. В таблицах представлены экспериментальные данные. Имеется предположение, какой зависимостью они могут быть аппроксимированы. Найти значения коэффициентов, построить график аппроксимирующей функции вместе с исходными табличными данными:

1) экспоненциальная зависимость $y = ae^{bx}$

x	6,9	12,9	19,8	26,7	35,1
y	21,4	15,7	12,1	8,5	5,2

2) степенная зависимость $y = ax^b$

x	1	2	3	4	5	6
y	3	12	27	48	75	108

3) показательная зависимость $y = ab^x$

x	1	2	3	4	5
y	6	7	8,7	10,4	12,4

4) гиперболическая зависимость $y = a + b/x$

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	12,2	6,8	5,2	4,6	3,9	3,7	3,5	3,2

5) $Y = C_1 + C_2\sqrt{x}$

x	0,1	0,3	0,7	1,0	1,4	1,9	2,3	2,9	3,5	4,1	7,0
y	0,85	1,23	1,65	1,9	2,25	2,41	2,61	2,96	3,23	3,49	4,43

6) $Y = c_0 + c_1x + c_2x^2$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	298	299	301	304	306	309	312	316	319	322

7) $Y = C_1\sin(x) + C_2\cos(2x)$

x	0,1	0,3	0,7	1,0	1,4	1,9	2,3	2,9	3,5	4,1	7,0
y	0,53	0,50	0,22	–0,04	–0,28	–0,22	0,10	0,53	0,31	–0,34	0,21

8) $Y = C_1\ln(x) + C_2 / x$

x	0,1	0,3	0,7	1,0	1,4	1,9	2,3	2,9	3,5	4,1	7,0
y	2,73	0,93	0,47	0,53	0,70	0,97	1,15	1,29	1,51	1,67	2,14

3. В табл. 11.1 приведены данные, полученные в результате экспериментов по изучению зависимости напряжения от относительной деформации для образца сплава металла. Определить модуль упругости, равный тангенсу угла наклона прямой, описывающей экспериментальные данные.

Деформация	0,0000	0,0015	0,0030	0,0045	0,0060
Напряжение, МПа	0	168	336	504	672

4. Имеется табличная зависимость изобарных массовых теплоемкостей газов от температуры (табл. 8.1). Описать эту зависимость для выбранного газа квадратичным полиномом.

5. Предположим, что застройщик оценивает стоимость группы небольших офисных зданий в традиционном деловом районе. Предполагается, что существует линейная зависимость между независимыми переменными x_1 (общая площадь в квадратных метрах), x_2 (количество офисов), x_3 (количество входов), x_4 (время эксплуатации здания в годах) и зависимой переменной y (оценочная цена здания под офис):

$$y = m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + m_4 x_4 + b.$$

x_1	x_2	x_3	x_4	y
2310	2	2	20	142 000
2333	2	2	12	144 000
2379	3	2	43	150 000
2402	2	3	53	139 000
2425	4	2	23	169 000
2471	2	2	34	142 900
2494	3	3	23	163 000
2517	4	4	55	169 000
2540	2	3	22	149 000

Определить оценочную стоимость здания под офис в том же районе (здание имеет площадь 2500 квадратных метров, три офиса, два входа, построено 25 лет назад).

Лабораторная работа № 12
ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ

Цель работы: научиться использовать среду Excel для поиска оптимальных решений.

12.1. Основные положения

В общем виде задачи оптимизации формулируются следующим образом: имеется некая целевая функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, на аргументы которой наложен ряд ограничений $g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le b_i$, где число ограничений $i = 1\ldots m$. Требуется найти такие значения аргументов (в рамках ограничений), для которых целевая функция принимает максимальное (минимальное или заданное) значение.

В Excel для решения задач оптимизации используется инструмент «Поиск решения». Этот инструмент расположен на вкладке «Данные». Если этот инструмент на указанной вкладке отсутствует (в стандартных настройках он действительно отсутствует), то вывести его можно следующим образом: в диалоговом окне «Параметры» (Файл => Параметры) выбрать категорию «Надстройки» и в поле «Управление» выбрать значение «Надстройки» (установлено по умолчанию), а затем нажать кнопку «Перейти». В открывшемся окне «Надстройки» установить флажок напротив «Поиск решения» (рис. 12.1).

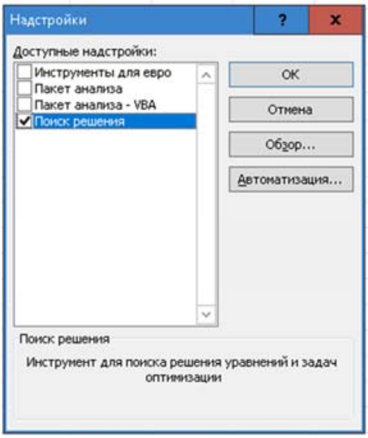


Рис. 12.1. Установка надстройки «Поиск решения»

Сформулируем типичную задачу оптимизации – определение оптимального ассортимента продукции. Пусть предприятие изготавливает четыре вида продукции: П1, П2, П3 и П4. Для производства продукции используются ресурсы: трудовые, материальные, финансовые. Максимальный запас этих ресурсов, приведенный к неким безразмерным денежным единицам, расход ресурсов на единицу производства продукции каждого вида представлены в табл. 12.1.

Таблица 12.1

Распределение ресурсов

Ресурсы	Расход на единицу продукции				Запас
	П1	П2	П3	П4	
Трудовые	8	3	4	4	800
Материальные	7	8	12	10	2000
Финансовые	15	14	13	14	2900
Минимальное выпускаемое количество	12		3		
Максимальное выпускаемое количество	30	25			

Максимальное и минимальное выпускаемое количество некоторых видов продукции может быть вызвано как требованиями рынка, так и госзаказом.

Прибыль от реализации единицы каждого вида продукции равна 8, 10, 7 и 8 денежным единицам соответственно.

Задача состоит в том, чтобы определить, какое количество каждого вида продукции нужно производить, чтобы обеспечить максимальную прибыль.

Математическая модель поставленной задачи имеет вид:

• обозначим количество производимой продукции каждого вида x_1, x_2, x_3 и x_4;

• получаемая прибыль (целевая функция) описывается выражением

$$\text{Прибыль} = 8x_1 + 10x_2 + 7x_3 + 8x_4;$$

• в связи с ограниченностью ресурсов и требованием к выпускаемому количеству должны выполняться следующие ограничения:

$$\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 4x_4 \le 800, \\ 7x_1 + 8x_2 + 12x_3 + 10x_4 \le 2000, \\ 15x_1 + 14x_2 + 13x_3 + 14x_4 \le 2900, \\ 12 \le x_1 \le 30, \\ 0 \le x_2 \le 25, \\ x_3 \ge 3, \\ x_4 \ge 0. \end{cases}$$

Поскольку речь идет о выпускаемой продукции, то все значения переменных x_i должны быть неотрицательными.

Создадим на листе Excel таблицу, в которую введем исходные данные (рис. 12.2).

	A	B	C	D	E	F	G
1		Продукция					
2		x_1	x_2	x_3	x_4		
3	Объем выпускаемой продукции					Прибыль (целевая функция)	
4	Прибыль от реализации	8	10	7	8	=СУММПРОИЗВ(B3:E3;B4:E4)	
5							
6		Ограничения					
7	Ресурсы	П1	П2	П3	П4	Затраты ресурсов	Запас
8	Трудовые	8	3	4	4	=СУММПРОИЗВ(B8:E8;$B$3:$E$3)	800
9	Материальные	7	8	12	10	=СУММПРОИЗВ(B9:E9;$B$3:$E$3)	2000
10	Финансовые	15	14	13	14	=СУММПРОИЗВ(B10:E10;$B$3:$E$3)	2900
11	Минимальное количество	12		3			
12	Максимальное количество	30	25				

Рис. 12.2. Лист Excel с исходными данными

Здесь в ячейках B3:E3, выделенных цветом, будут располагаться найденные в ходе решения значения количества производимой продукции. С ними связаны ячейки, в которых записаны выражения для целевой функции (ячейка F4) и расхода ресурсов (ячейки F8:F10).

В группе «Анализ» вкладки «Данные» выберем «Поиск решения». Откроется окно диалога «Параметры поиска решения», в котором установим следующие параметры:

• в поле «Оптимизировать целевую функцию» устанавливаем «Максимум» и адрес целевой ячейки F4;

• в поле «Изменяя ячейки переменных» указываем адреса ячеек со значениями искомых переменных B3:E3;

• в области «В соответствии с ограничениями» нажимаем кнопку «Добавить» для размещения ограничений. Откроется окно диалога (рис. 12.3).

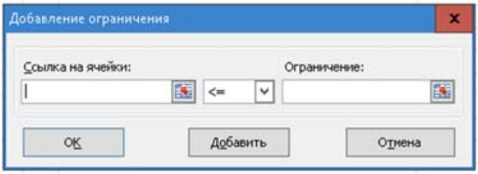


Рис. 12.3. Добавление ограничений

В левом поле вводим адрес ячейки с расходом ресурса (например, F8), в среднем – характер ограничения (≥, =, ≤), а в правом – либо непосредственно величину ограничения, либо ссылку на ячейку, в которой эта величина содержится (в нашем случае G8). Проделываем эту процедуру (нажимая кнопку «Добавить» в этом окне) со всеми имеющимися в задаче ограничениями, включая ограничение $x_i \geq 0$. В результате получаем (рис. 12.4).

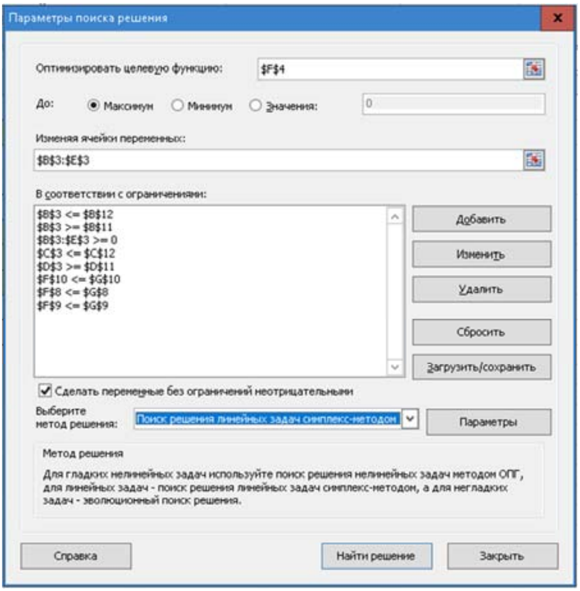


Рис. 12.4. Параметры поиска решения

После чего можно нажать кнопку «Найти решение». В результате получаем следующий результат:

	A	B	C	D	E	F	G
1		Продукция					
2		x_1	x_2	x_3	x_4		
3	Объем выпускаемой продукции	12,00	25,00	3,00	154,25	Прибыль (целевая функция)	
4	Прибыль от реализации	8	10	7	8	1601	
5							
6		Ограничения					
7	Ресурсы	П1	П2	П3	П4	Затраты ресурсов	Запас
8	Трудовые	8	3	4	4	800	800
9	Материальные	7	8	12	10	1862,5	2000
10	Финансовые	15	14	13	14	2728,5	2900
11	Минимальное количество	12		3			
12	Максимальное количество	30	25				

Рис. 12.5. Результаты решения

При решении задач оптимизации часто, исходя из практического смысла, на переменные накладывается условие целочисленности. Это условие задается в окне «Добавление ограничения» в центральном поле.

12.2. Контрольные вопросы

1. Как в общем виде формулируется задача оптимизации?
2. Как в Excel осуществляется поиск оптимальных решений?
3. Как установить и вызвать надстройку «Поиск решения»?
4. Как вводятся параметры поиска решения?

12.3. Выполнение работы

1. Решить задачу оптимизации, найдя экстремум функции в соответствии с заданием при действующих ограничениях. Учесть, что все решения должны быть положительными и целыми:

1) $4x_1 + 15x_2 + 2x_3 \rightarrow \max$;
$3x_1 - x_3 >= 11$;
$-2x_1 + x_2 + 2x_3 >= 21$;
$4x_1 + x_2 <= 47$;

2) $x_1 - 5x_2 + 7x_3 + 40 \rightarrow \max$;
$2x_1 + 3x_2 - 7x_3 >= 15$;
$-x_1 + 5x_2 - x_3 >= 24$;
$3x_1 + 5x_2 - 6x_3 <= 30$;

3) $3x_1 - 5x_2 + 9x_3 \to \min;$
$3x_1 - 2x_3 >= 21;$
$-x_1 + 2x_2 - 6x_3 <= 27;$
$2x_1 + 7x_3 <= 71;$

4) $2x_1 - 4x_2 + 6x_3 \to \min;$
$4x_1 - 3x_3 >= 29;$
$-3x_1 + 3x_2 - 9x_3 <= 44;$
$3x_1 + 8x_3 <= 91.$

2. Решить задачу об использовании сырья. Для изготовления трех видов продукции П1, П2 и П3 на предприятии используются три вида сырья: С1, С2 и С3, причем сырье С2 должно быть израсходовано полностью. Данные приведены в табл. 12.2.

Таблица 12.2

Исходные данные задачи о сырье

Виды сырья	Расход на единицу продукции			Запас
	П1	П2	П3	
С1	1	2	0	12
С2	1	0	1	4
С3	2	2	0	14
Прибыль	3	2	1	

Составить план выпуска продукции, чтобы при его реализации предприятие получало максимальную прибыль. Искомые значения должны быть целыми.

3. Решить транспортную задачу. Определить оптимальный план перевозок продукции в контейнерах со складов в пункты реализации, минимизируя суммарные транспортные расходы. Нужно перевести весь груз из трех складов в два пункта, причем весь груз должен быть перевезен во все пункты. Стоимость перевозки единицы груза со склада в пункт, а также объемы продукции на складах и объемы потребления для каждого пункта реализации представлены в табл. 12.3.

Таблица 12.3

Исходные данные для транспортной задачи

	Стоимость перевозки единицы груза		Объем грузов на складах
	Пункт 1	Пункт 2	
Склад 1	17	6	18
Склад 2	12	13	75

Окончание табл. 12.3

	Стоимость перевозки единицы груза		Объем грузов на складах
	Пункт 1	Пункт 2	
Склад 3	9	8	31
Объем грузов на пунктах	45	79	

Указание: записать на лист данные о стоимости перевозки единицы груза с каждого склада в каждый пункт a_{ij}.

Определить ячейки для неизвестных x_{ij} – объем перевозок из склада i в пункт j.

Записать в ячейке целевую функцию, равную сумме затрат на перевозки.

Вычислить объем перевезенных грузов из каждого склада.

Вычислить сумму грузов в каждом из двух пунктов.

В окне диалога «Поиск решения» указать ячейки, где находится целевая функция, переменные, а также ввести ограничения с указанием соответствующих ячеек. Все значения переменных должны быть целыми и неотрицательными. Целевую ячейку положить равной минимальному значению (рис. 12.6).

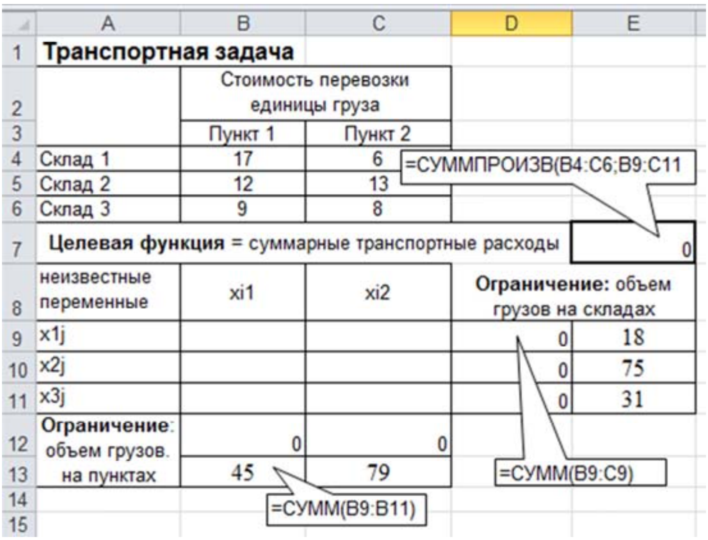


Рис. 12.6. Отображение исходных данных для транспортной задачи

Лабораторная работа № 13
ЭКОНОМИЧЕСКИЕ РАСЧЕТЫ

Цель работы: ознакомиться с возможностями пакета Excel для проведения экономических расчетов.

13.1. Основные положения

Понятие сложного процента. Финансовые ресурсы, полученные из внешних источников, требуется оплачивать. При вложении финансовых ресурсов в банк, банк оплачивает вкладчику оговоренный в договоре процент от вложенной суммы и, наоборот, кредитополучатель, взявший кредит в банке, через определенные договором периоды возвращает не только основной долг, но и проценты по нему.

Как правило, банк устанавливает процентные выплаты за определенный период. Если периодов несколько, а начисленный процент вкладчиком не изымается, то на него начисляется процент. Проценты начисляются по схеме сложного процента.

Пример. Пусть на банковский вклад 1000 рублей на протяжении пяти лет начисляются 10 % годовых. Определить сумму, полученную по истечении срока вклада.

1000 + 10 %*1000 = 1100 руб.
1100 + 10 %*1100 = 1210 руб.
1210 + 10 %*1210 = 1331 руб.
1331 + 10 %*1331 = 1464,1 руб.
1464,1 + 10 %*1464,1 = 1610,51 руб.

В общем виде формула вычислений в соответствии с правилом сложного процента выглядит следующим образом:

$$S = V(1 + p)^N, \qquad (13.1)$$

где S – начисленная сумма;
V – вклад;
p – банковский процент;
N – количество периодов.

Таким образом, стоимость суммы 1000 руб., взятой банком у вкладчика на пять лет, оказалась для банка равной 610,51 руб., а вернуть в сумме банку пришлось 1610,51 руб.

Отсюда следует вывод: 1000 руб. сегодня равны 1610,51 руб. через пять лет. Иначе чистая приведенная (к сегодняшнему дню) стоимость 1610,51 руб. через пять лет равна 1000 руб. сегодня. Смысл понятия «чистая приведенная стоимость» состоит в приведении к сегодняшнему дню стоимости финансовых ресурсов, запланированных к выплатам в заданные периоды в будущем.

Величина V в формуле (13.1) является чистой приведенной стоимостью величины S и вычисляется по формуле $V = S/(1 + p)^{N}$.

Финансовые функции Excel. Для определения будущей стоимости сделанной инвестиции (банковского вклада) через заданное количество периодов при постоянной банковской ставке используется **функция БС**. В приведенном выше примере для вычисления будущей стоимости 1000 рублей при процентной ставке 10 % по истечении 5 лет следует в ячейке с помощью кнопки «Вставить функцию» вызвать окно ввода финансовой функции БС и ввести исходные данные:

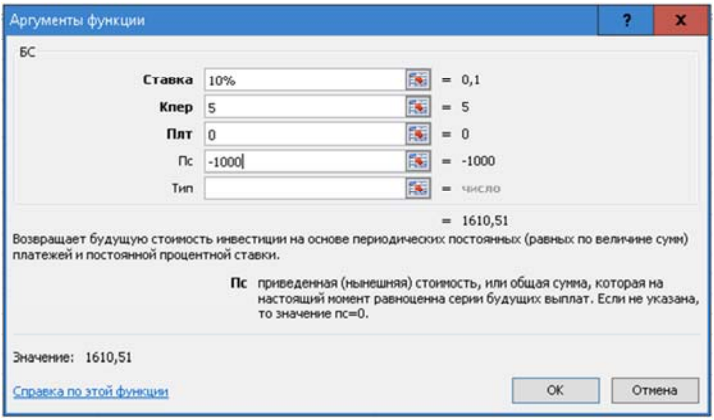


Рис. 13.1. Аргументы функции БС

Здесь аргумент «Ставка» обозначает величину ставки в процентах, по которой вносится инвестиция, «Кпер» – количество периодов, «Плт» – величину платежа за каждый период, «Пс» – сумму инвестиции, «Тип» – 0 (или отсутствие данных) означает, что выплаты в конце каждого периода, 1 – в начале. Отметим, что во всех финансовых функциях используется следующий принцип: если инвестор вносит деньги, то сумма берется со знаком «минус», если получает, то со знаком «плюс». Поэтому величина 1000 руб. в графе «Пс» записана со знаком «минус».

Функция ЧПС определяет величину чистой приведенной стоимости заранее известных выплат.

Пример. Компания приобретает теплообменник за 40000 руб. Известно, что его эксплуатация приведет к экономии энергоресурсов: в первый и второй годы по 7000 руб., а в последующие годы по 5500 руб. ежегодно. Требуется определить срок окупаемости теплообменника.

На лист Excel внесем в одну колонку исходные данные, а во вторую – величину чистой приведенной стоимости выплат за прошедший период и добавим со знаком «минус» стоимость инвестиции, получив тем самым текущую стоимость инвестиции (рис. 13.2):

	A	B	G	H
10		0,1		
11	Номер периода	%	ЧПС	Остаточная стоимость
12	0	-40000		-40000
13	1	7000	=ЧПС($B$10;$B$13:B13)	=ЧПС($B$10;$B$13:B13)+$H$12
14	2	7000	=ЧПС($B$10;$B$13:B14)	=ЧПС($B$10;$B$13:B14)+$H$12
15	3	5500	=ЧПС($B$10;$B$13:B15)	=ЧПС($B$10;$B$13:B15)+$H$12
16	4	5500	=ЧПС($B$10;$B$13:B16)	=ЧПС($B$10;$B$13:B16)+$H$12
17	5	5500	=ЧПС($B$10;$B$13:B17)	=ЧПС($B$10;$B$13:B17)+$H$12
18	6	5500	=ЧПС($B$10;$B$13:B18)	=ЧПС($B$10;$B$13:B18)+$H$12
19	7	5500	=ЧПС($B$10;$B$13:B19)	=ЧПС($B$10;$B$13:B19)+$H$12

Рис. 13.2. Определение чистой приведенной стоимости и срока окупаемости

Здесь в первой колонке записан номер периода, во второй – сумма выплат (экономии), в третьей – чистая приведенная стоимость выплат, сделанных до данного периода, в последней – остаточная стоимость. Телообменник окупается тогда, когда остаточная стоимость становится положительной.

Функция ВСД. Функция **ВСД** в Excel используется для расчета внутренней ставки доходности на основе имеющихся числовых данных о финансовых потоках, принимаемых в качестве первого аргумента, и возвращает соответствующее приближенное значение.

Внутренняя ставка доходности представляет собой такое значение процентной ставки, при которой стоимость всех финансовых потоков будет равна 0 (нулю), то есть инвестор сможет возместить свои убытки, связанные с финансированием инвестиционного проекта, но без получения какой-либо прибыли.

Пример. Строительной компании требуется автокран стоимостью 65000 рублей. Стоимость аренды автокрана у другой компании составляет 9700 рублей в год, а срок полезного использования составляет 10 лет, по истечению которых остаточная стоимость автокрана составит всего 12000 рублей, а он возвращается в собственность арендодателю. Альтернативным вариантом является привлечение стороннего капитала со ставкой 15 % годовых. Какой вариант более выгодный?

Заполнение таблицы (рис. 13.3) финансовых потоков и вычисление внутренней ставки доходности (формула в ячейке D14 имеет вид =ВСД(D2:D12)) показывает, что она равна 12 % – ниже 15 %, т. е. аренда выгоднее, чем приобретение за счет кредита. Диапазон ячеек, передаваемых в качестве аргумента, должен содержать не менее одного отрицательного и одного положительного чисел.

	A	B	C	D
1	**Период**	**Цена**	**Отчисления**	**Финансовые потоки**
2	Договор	65000	9700	55300
3	1-й год		9700	-9700
4	2-й год		9700	-9700
5	3-й год		9700	-9700
6	4-й год		9700	-9700
7	5-й год		9700	-9700
8	6-й год		9700	-9700
9	7-й год		9700	-9700
10	8-й год		9700	-9700
11	9-й год		9700	-9700
12	10-й год	-12000		-12000
13				
14				**12%**

Рис. 13.3. Расчет внутренней ставки доходности

Функция ПЛТ в Excel используется для расчета фиксированного значения суммы периодических взносов для выплат задолженностей при условии, что процентная ставка является постоянной величиной.

Пример. Взят ипотечный кредит для покупки квартиры стоимостью 100000 руб. Начальный взнос за счет собственных средств составил 20 % стоимости квартиры, остальное банковский кредит со ставкой 14 %. Срок кредита 15 лет, выплаты производятся ежемесячно. Требуется определить сумму ежемесячных выплат, если они являются равномерными, т. е. кредит взят на условиях аннуитета.

Вносим на лист Excel начальные данные (рис. 13.4):

	A	B
1		**ПЛТ()**
2	Ипотека	100000
3	Срок	15
4	Начальный взнос	0,2
5	Периодичность	12
6	Ставка	0,14
7	Ежемесячные выплаты	=ПЛТ(B6/12;B5*B3;B2*(1-B4))

Рис. 13.4. Расчет ежемесячных выплат

В ячейке B7 в функции ПЛТ внесены следующие аргументы:

• B6/12 – месячная ставка по кредиту, т. к. выплаты производятся ежемесячно, а в ячейке B6 внесена годовая ставка;

• B5*B3 означает количество периодов выплат, т. к. в ячейке B3 указано количество лет, а выплаты помесячно, т. е. необходимо внести количество месяцев;

• B2*(1-B4) означает сумму кредита, т.к. часть стоимости квартиры (20 %) покупатель внес из собственных средств и только 80 % стоимости оплатил из кредитных средств.

Функция ОСПЛТ определяет величину платежа, направленного на погашение основного долга при кредите в форме аннуитета. Так как суммарный платеж в этом случае остается постоянным (его вычисляет функция ПЛТ), то ясно, что оплата основного долга должна при этом возрастать, а процентные выплаты – падать. Пример расчета выплат основного долга по тому же кредиту, что и в предыдущем примере, показан на рис. 13.5 для периодов под номерами 1; 10; 100; 179 и 180:

	A	B	C
1		ПЛТ()	ОСПЛТ()
2	Ипотека	100000	=ОСПЛТ(B6/12;1;180;80000)
3	Срок	15	=ОСПЛТ(B6/12;10;180;80000)
4	Начальный взнос	0,2	=ОСПЛТ(B6/12;100;180;80000)
5	Периодичность	12	=ОСПЛТ(B6/12;179;180;80000)
6	Ставка	0,14	=ОСПЛТ(B6/12;180;180;80000)
7	Ежемесячные выплаты	=ПЛТ(B6/12;B5*B3;B2*(1-B4))	

Рис. 13.5. Расчет величины выплат для погашения основной суммы по кредиту

Смысл аргументов функции ОСПЛТ следующий:

• первый аргумент – ставка по кредиту за период (в данном примере – за месяц);

• второй – номер периода, за который производится выплата;

• третий – количество периодов;

• четвертый – сумма кредита.

Все выплаты являются затратами и поэтому записываются со знаком «минус». Видно, что в начале выплат сумма платежа по основному долгу невелика и, следовательно, в сумме ежемесячных выплат основную часть составляют процентные выплаты.

В Excel существует эффективный механизм анализа влияния параметра на конечный результат, который называется «Таблица данных». Предположим, что планируется получение кредита в размере 100000 рублей на срок 3 года с ежемесячной выплатой процентов и основной суммы банку на условиях аннуитета (см. пример выше). Прежде чем взять кредит, необходимо проанализировать, как зависит величина выплат от процентной ставки. Для этого вначале выполним базовый расчет для ставки 12 % и рядом заполним возможные значения процентной ставки (рис. 13.6):

	A	B	C	D	E	F
1	Сумма кредита	-100000				
2	Количество периодов	36				
3	Ставка	0,12	0,13	0,14	0,15	0,16
4	Выплаты	=ПЛТ(B3/12;B2;B1)				

Рис. 13.6. Расчет выплат в зависимости от величины ставки

Для анализа возможных выплат необходимо выделить диапазон ячеек B3:F4, в котором находится тестовый расчет и возможные значения аргумента и функции, и на вкладке «Данные», в группе «Работа с данными» в разделе «Анализ «что если»…», выбрать «Таблица данных», после чего в открывшемся окне диалога в первое поле ввести координаты ячейки, в которой находится переменная ставка B3, после чего таблица заполнится, что даст возможность провести необходимый анализ.

При наличии двух переменных (например, процентная ставка и количество периодов) можно построить таблицу с двумя переменными. Для этого предварительно выполняется тестовый расчет, его результат вносится в левую угловую ячейку таблицы, а по вертикали горизонтали от этой ячейки вносятся возможные значения переменных, например, представляет интерес выяснить, как изменяется величина выплат, если процентная ставка изменяется от 5 % до 15 %, а срок кредитования от двух до четырех лет:

В этом случае необходимо выделить диапазон B4:I10 и в окне диалога «Таблица данных» указать ячейки с переменными: количество периодов и ставка (рис. 13.7):

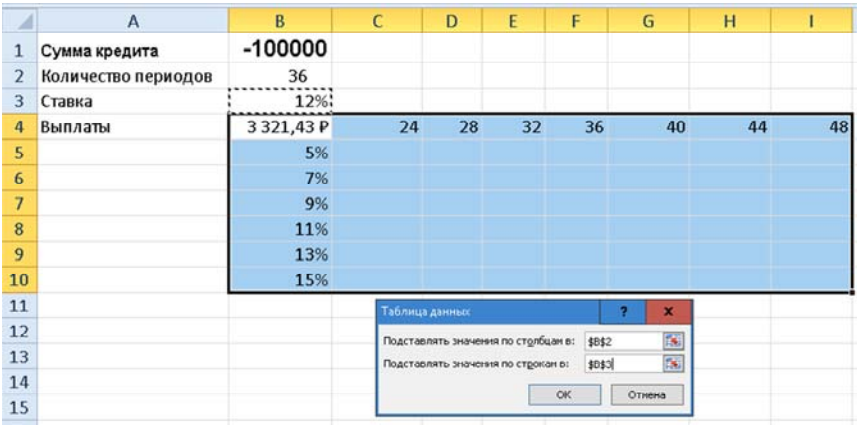


Рис. 13.7. Расчет выплат в зависимости от ставки
и количества периодов

Функция КПЕР определяет количество периодов, за которые инвестиции с известной ставкой доходности и равномерными выплатами полностью окупаются.

Пример. Сумма инвестиций 14 000 000, ежегодные выплаты по ним 2 000 000, банковская ставка на протяжении срока инвестиций постоянная и равна 10 %. Количество периодов, за которые эти инвестиции полностью окупаются не равно 7 годам, так как чистая приведенная стоимость денег падает с каждым годом. Расчет производим с помощью функции КПЕР (рис. 13.8). Первый аргумент функции КПЕР – банковская ставка, второй – выплаты в каждый период, а третий – объем инвестиций. Так как инвестиции – это затраты, то они берутся со знаком «минус».

	A	B
1	Объем инвестиций	140000000
2	Ежегодный доход	12000000
3	Ставка (дисконт)	0,03
4	Срок окупаемости	=КПЕР(B3;B2;-B1)

Рис. 13.6. Расчет выплат в зависимости от ставки и количества периодов

В результате, с учетом дисконтирования (чистой приведенной стоимости) инвестиции окупаются не за 13,5 года (140/12), а за 14,57 года при ставке 3 %.

13.2. Контрольные вопросы

1. Как вычисляются сложные проценты?
2. Что такое «чистая приведенная стоимость»?
3. Какие задачи можно решить с использованием финансовых функций Excel?
4. Как определить будущую стоимость инвестиции?
5. Какая функция позволяет выполнить расчет внутренней ставки доходности?
6. Какая функция используется для расчета фиксированного значения суммы периодических выплат для погашения кредита?
7. Какая функция определяет количество периодов, за которые инвестиции с известной ставкой доходности и равномерными выплатами полностью окупаются?

13.3. Выполнение работы

1. Определить сумму на счете по истечении срока вклада, если проценты по вкладу начислялись ежемесячно и капитализировались. Воспользоваться функцией БС.

Вариант	1	2	3
Сумма банковского вклада	10 000	3 000	8 000
Срок	10 лет	11 лет	5 лет
Периодичность начисления процентов	12 раз в год	12 раз в год	12 раз в год
Ставка	8 %	5 %	6 %
Конечная сумма на счете	?	?	?

2. Определить чистую приведенную стоимость проекта. Воспользоваться функцией ЧПС.

Вариант	1	2	3
Объем инвестиций	570 млн. руб.	290 млн. руб.	90 млн. руб.
Срок	3 года	4 года	2 года
Годовые доходы	270 млн. руб. 330 млн. руб. 290 млн. руб.	80 млн. руб. 90 млн. руб. 95 млн. руб. 85 млн. руб.	50 млн. руб. 60 млн. руб.
Чистая приведенная стоимость проекта	?	?	?
Ставка	17 %	12 %	14 %

3. Оценить целесообразность проекта, исходя из его внутренней нормы доходности. Воспользоваться функцией ВСД.

Вариант	1	2	3
Затраты по проекту	850 млн. руб.	1250 млн. руб.	1250 млн. руб.
Срок реализации	5 лет	5 лет	5 лет
Доходы по годам	200 млн. руб. 185 млн. руб. 195 млн. руб. 210 млн. руб. 220 млн. руб.	300 млн. руб. 330 млн. руб. 350 млн. руб. 370 млн. руб. 390 млн. руб.	300 млн. руб. 330 млн. руб. 350 млн. руб. 370 млн. руб. 390 млн. руб.
Рыночная ставка	10 %	12 %	12 %

4. Определить ежемесячные выплаты по ипотеке, воспользовавшись функцией ПЛТ.

Вариант	1	2	3
Ипотека	100 000	700 000	200 000
Срок	7 лет	3 года	8 лет
Начальный взнос	10 %	14 %	10 %
Периодичность	12 раз в год	1 раз в год	12 раз в год
Ставка	11 %	6 %	5 %
Ежемесячные выплаты	?	?	?

5. Определить размер основного платежа за каждый год при выплате займа в форме аннуитета. Воспользоваться функцией ОСПЛТ.

Вариант	1	2	3
Сумма займа	12 млн. руб.	20 млн. руб.	12 млн. руб.
Срок займа	4 года	5 лет	5 лет
Основной платеж за каждый год	?	?	?
Ставка	22 %	18 %	12 %

6. Определить срок окупаемости инвестиций. Воспользоваться функцией КПЕР.

Вариант	1	2	3
Объем инвестиций	10 897 000	15 500 000	10 000 000
Срок	? лет	? лет	? лет
Периодичность начисления дивидендов	1 раз в год	1 раз в год	1 раз в год
Сумма выплат	2 000 000	1 950 000	15 000 000
Ставка	14,5 %	11,5 %	12,0 %

Литература

1. Плотников, А. Д. Численные методы: учебное пособие / А. Д. Плотников. – Минск: Новое знание, 2007. – 174 с.
2. Рудикова, Л. В. Microsoft Excel для студента / Л. В. Рудикова. – Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2007 – 368 с.
3. Гельман, В. Я. Решение математических задач средствами Excel : практикум / В. Я. Гельман. – СПб.: 2003. – 240 с.
4. Васильков, Ю. В. Компьютерные технологии вычислений в математическом моделировании : учеб. пособие / Ю. В. Васильков, Н. Н. Василькова. – М.: Финансы и статистика, 2001. – 256 с.
5. Разоренова, Т. Р. Лабораторный практикум по информатике «Электронные таблицы MS Excel» / Т. Р. Разоренова, Т. А. Галай, О. В. Альшевская. – Минск: БНТУ, 2000. – 56 с.
6. Мачула, В. Г. Excel 2010. Лучший самоучитель : учебное пособие / В. Г. Мачула, О. В. Мачула. – М.: АСТ: Астрель; Владимир, ВКТ, 2011. – 416 с.
7. Курицкий, Б. Я. Поиск оптимальных решений средствами Excel 7.0 / Б. Я. Курицкий. – Санкт-Петербург, 1997. – 384 с.
8. Ларсен, Рональд У. Инженерные расчеты в Excel / Рональд У. Ларсен. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2002. – 544 с.
9. Васильев, А. Н. Научные вычисления в Microsoft Excel / А. Н. Васильев. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2004. – 512 с.

Учебное издание

КРАКОВ Михаил Самуилович
ПОГИРНИЦКАЯ Светлана Георгиевна

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И ОБРАБОТКА ДАННЫХ

Пособие

Редактор *Е. О. Германович*
Компьютерная верстка *Е. А. Беспанской*

Подписано в печать 12.08.2021. Формат 60×84 $^1/_{16}$. Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 5,12. Уч.-изд. л. 4,00. Тираж 100. Заказ 661.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.