

*В. В. ЛЕГКОСТУП*

## МЕТОДИКА ОПРЕДЕЛЕНИЯ КИНЕМАТИЧЕСКОЙ СВЯЗИ МЕЖДУ УПРАВЛЯЮЩИМИ ЛЕТАТЕЛЬНЫМ АППАРАТОМ УСКОРЕНИЯМИ И ЕГО ЭЛЛИПТИЧЕСКИМИ КООРДИНАТАМИ В АЛЬТЕРНАТИВНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

*ОАО «АЛЕВКУРП», Минск, Республика Беларусь*

*В данной работе были получены упрощенные выражения, описывающие кинематическую связь между кинематическими параметрами движения летательного аппарата и ускорениями, действующими на него в процессе движения с использованием метода наведения по гиперболе, с помощью разностно-дальномерной навигационной системы. Полученные выражения кинематической связи необходимы для последующей задачи синтеза оптимального линейного устройства управления. Ключевой особенностью метода навигации по гиперболе является возможность уменьшения числа навигационных позиций на одну при работе бортового навигационного оборудования в пассивном режиме, осуществляя только прием навигационной информации, подобно потребителям спутниковой навигационной информации.*

**Ключевые слова:** эллиптическая криволинейная система координат, коэффициенты Ламе, разностно-дальномерная система, навигация, кинематическая связь, беспилотный летательный аппарат (БЛА), оптимальное линейное управление.

### Введение

В [1] была рассмотрена методика получения кинематической связи с целью последующего синтеза оптимального регулятора для наведения беспилотного летательного аппарата вдоль опорной гиперболы на основе разностно-дальномерной навигационной информации. Целью настоящей статьи является рассмотрение иного подхода к решению описанной задачи, а именно получению кинематической связи для задачи синтеза алгоритма управления. Это позволит несколько упростить выражения связи и придать им более наглядный смысл.

Помимо рассмотренной в [1] эллиптической системы координат существует подобная ей система координат, упоминаемая иногда как «альтернативная» эллиптическая система координат [2]. Эта система координат позволяет связать разностно-дальномерную информацию о местоположении БЛА в навигационной системе с его декартовыми координатами весьма простыми соотношениями. Декартовы координаты объекта  $x, y$  для двумерного слу-

чая выражаются через классические эллиптические координаты посредством выражений [3,4]

$$\begin{cases} x = c \cosh \mu \cos v \\ y = c \sinh \mu \sin v \end{cases} \quad (1)$$

где  $c$  – фокусное расстояние, равное половине длины базы между двумя навигационными позициями;

$\mu$  – эллиптическая координата БЛА,  $\mu \in [0, \infty)$ ;

$v$  – гиперболическая координата БЛА,  $v \in [0, 2\pi]$ .

Перейдем к другой форме представления координат объекта с использованием координатных линий в виде софокусных гипербол и эллипсов, осуществив преобразование эллиптических координат в соответствии с выражениями [3,4]

$$\begin{cases} \sigma = \cosh \mu \\ \tau = \cos v \end{cases} \quad (2)$$

где  $\sigma$  – «альтернативная» эллиптическая координата БЛА,  $\sigma \in [1, \infty)$ ;

$\tau$  – «альтернативная» гиперболическая координата БЛА,  $\tau \in [-1, 1]$ .

Декартовы координаты БЛА в таком случае будут определяться следующим образом:

$$\begin{cases} x = c \sigma \tau \\ y = \sqrt{c^2(\sigma^2 - 1)(1 - \tau^2)} \end{cases} \quad (3)$$

Использование данной формы записи эллиптических координат имеет определенные преимущества в сравнении с классическими эллиптическими координатами (1) в связи с их простой и наглядной связью с геометрическими параметрами навигационной системы и объекта наведения. Связь с разностно-дальномерными  $d_2 - d_1$  и суммарно-дальномерными  $d_2 + d_1$  координатами БЛА в рассматриваемой навигационной системе (рис. 1) описывается соотношениями

$$\begin{cases} \sigma = \frac{1}{2c}(d_2 + d_1) \\ \tau = \frac{1}{2c}(d_2 - d_1) \end{cases}, \quad (4)$$

где  $\sigma$  – эллиптическая координата БЛА в альтернативном представлении, являющаяся суммарно-дальномерной навигационной информацией;

$\tau$  – гиперболическая координата БЛА в альтернативном представлении, являющаяся разностно-дальномерной навигационной информацией;

$c$  – половина расстояния между навигационными позициями  $\Pi_0, \Pi_1$ ;

$d_1 = \sqrt{(x - x_0 - c)^2 + (y - y_0)^2}$  – дальность между БЛА и навигационной позицией  $\Pi_1$ ;

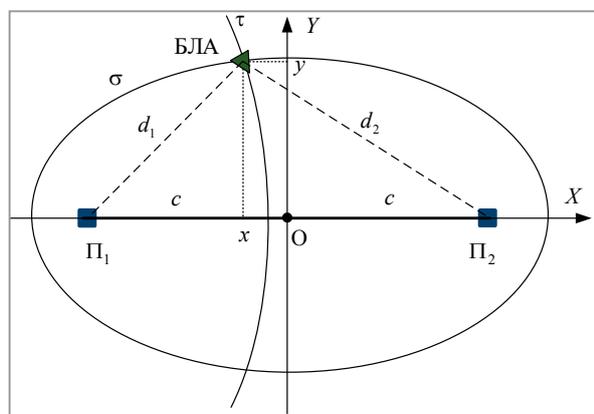


Рис. 1. Связь декартовых координат БЛА на плоскости с эллиптическими координатами в альтернативном представлении

$d_2 = \sqrt{(x - x_0 + c)^2 + (y - y_0)^2}$  – дальность между БЛА и навигационной позицией  $\Pi_2$ ;

$x_0, y_0$  – декартовы координаты центра базы навигационной системы;

$x, y$  – декартовы координаты БЛА.

Гиперболическая координата  $\tau$ , задающая гиперболу положения БЛА на плоскости при  $\tau = const$  имеет простую связь с её эксцентриситетом  $\varepsilon$ :

$$\varepsilon = \frac{1}{|\tau|}. \quad (5)$$

Сравнение координатных сеток двух рассматриваемых координатных систем приведено на рис. 2. Видно, что «классические» эллиптические координаты, приведенные на рисунке 2а, имеют регулярную структуру линий положения в виде гипербол, определенных при  $v = const$  (обозначенных красными сплошными линиями на рис. 2) в смысле изменения асимптот гипербол на один и тот же угол при изменении координаты  $v$  с фиксированным шагом. В то же время эллипсы, являющиеся линиями положения при  $\mu = const$  (обозначенных синими сплошными линиями на рис. 2), при одном и том же шаге изменения  $\mu$  увеличиваются в размерах с постоянно возрастающим шагом по дальности от центра базы.

В структуре координатных линий «альтернативной» системы координат, приведенной на рис. 2б, видно, что точки пересечения продолжения линии базы с линиями положения в виде эллипсов и гипербол располагаются друг от друга с регулярным шагом при изменении параметров  $\sigma, \tau$  с фиксированным шагом. В целом же, гиперболы при одном и том же шаге изменения  $\tau$  изменяются непропорционально в смысле шага изменения угла наклона асимптот гипербол (обозначенных зелеными штриховыми линиями на рис. 2), в отличие от «классических» эллиптических координат.

#### Методика получения кинематического звена, описывающего движение объекта в эллиптической системе координат

Получим выражения, описывающие связь действующих на БЛА ускорений и измеряемой разностно-дальномерной информацией  $\tau$ , следуя приведенной в [1] методике. Общую методику получения необходимой

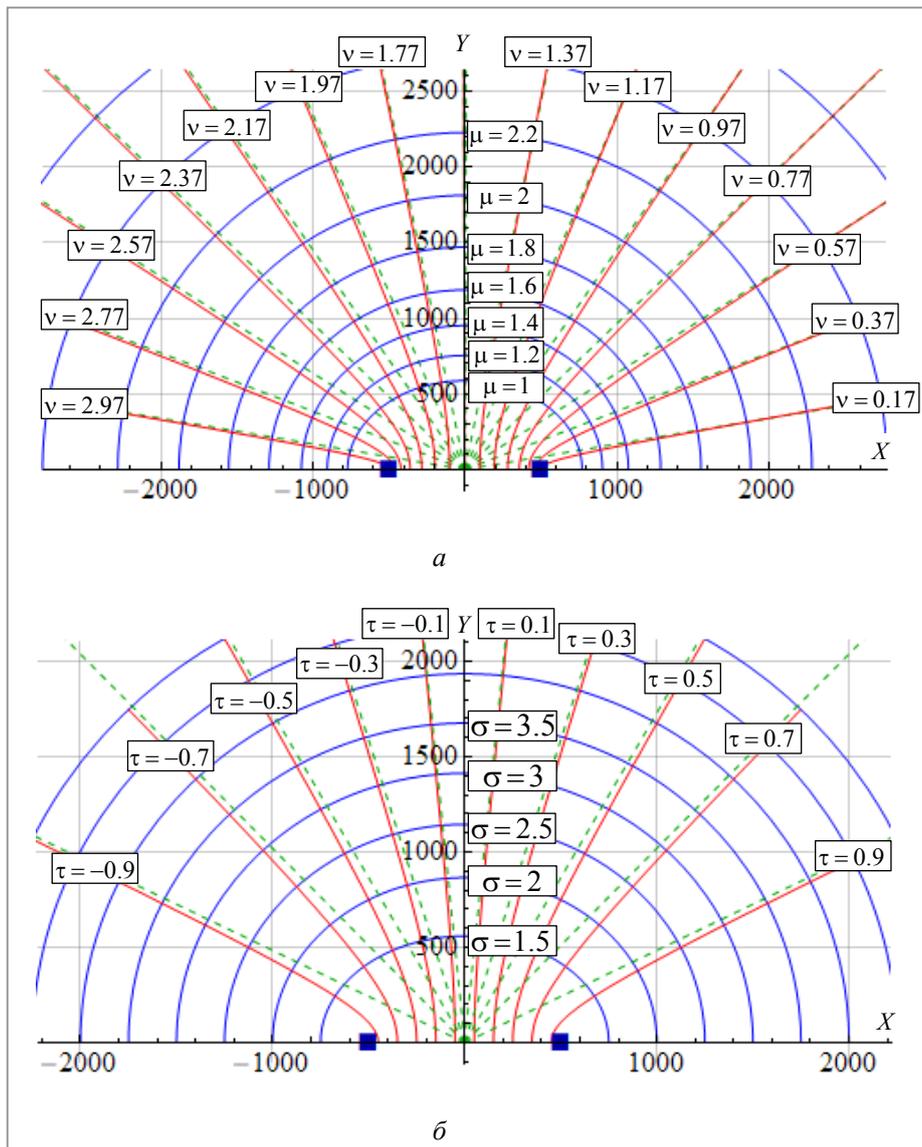


Рис. 2. Вид координатных линий «классической» (а) и «альтернативной» (б) эллиптических систем координат

кинематической связи можно определить следующими шагами:

1. определение управляющих величин и изменяемых ими параметров (объекта/среды), подлежащих оцениванию, по которым возможно замыкание обратной связи с целью осуществления автоматического управления;

2. определение управляющей и измерительной систем координат таким образом, чтобы их координатные линии (плоскостной случай) или координатные поверхности (пространственный случай) соответствовали эквипотенциальным поверхностям управляющих величин и измеряемых параметров;

3. определение закона преобразования одной системы координат в другую;

4. определение матрицы Якоби и коэффициентов Ламе данного преобразования;

5. определение разложения вектора скорости на оси измерительной системы координат;

6. сопоставление проекций сил, выраженных в управляющей системе координат на оси локального базиса измерительной системы координат.

Измеряемая навигационная величина  $\tau$  образует линии положения в виде гипербол, являющихся координатными линиями в эллиптической системе координат. Управляющие БЛА ускорения проще всего выражаются в декартовой системе координат. После определения закона преобразования

эллиптических координат в декартовы, необходимо найти матрицу Якоби этого преобразования [5]:

$$\mathbf{J}_{st} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \sigma} & \frac{\partial x}{\partial \tau} \\ \frac{\partial y}{\partial \sigma} & \frac{\partial y}{\partial \tau} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\tau & c\sigma \\ \frac{c\sigma(1-\tau^2)}{\sqrt{(\sigma^2-1)(1-\tau^2)}} & -\frac{c(\sigma^2-1)\tau}{\sqrt{(\sigma^2-1)(1-\tau^2)}} \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Коэффициенты Ламе преобразования (3) выглядят следующим образом:

$$H_\sigma = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \sigma}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \sigma}\right)^2} = \frac{c\sqrt{\sigma^2-1}}{\sqrt{\sigma^2-1}}, \quad (7)$$

$$H_\tau = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \tau}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \tau}\right)^2} = \frac{c\sqrt{\sigma^2-1}}{\sqrt{1-\tau^2}}.$$

Матрица метрического тензора  $\mathbf{g}$  рассматриваемой системы координат имеет диагональный вид:

$$\mathbf{g} = \mathbf{J}_{st}^T \mathbf{J}_{st} = \begin{bmatrix} \frac{c^2(\sigma^2-\tau^2)}{\sigma^2-1} & 0 \\ 0 & \frac{c^2(\sigma^2-\tau^2)}{1-\tau^2} \end{bmatrix}, \quad (8)$$

что свидетельствует об ортогональности этой системы координат [6].

Вычислим среднее арифметическое квадратов коэффициентов Ламе, что соответствует кинетической энергии движущейся точки, или кинетической энергии БЛА, отнесенной к его массе:

$$T = \frac{V^2}{2} = \frac{1}{2}(H_\sigma^2 + H_\tau^2) = \frac{1}{2} \left( \frac{c^2(\sigma^2-\tau^2)\dot{\sigma}^2}{\sigma^2-1} + \frac{c^2(\tau^2-\sigma^2)\dot{\tau}^2}{\tau^2-1} \right), \quad (9)$$

где  $\dot{\sigma}, \dot{\tau}$  – проекции эллиптической и гиперболической координат вектора скорости БЛА в «альтернативной» эллиптической системе координат соответственно.

Координаты вектора скорости БЛА  $\mathbf{V}$  в рассматриваемой эллиптической системе координат оказываются равными коэффициентам Ламе, умноженным на скорости изменения соответствующих координат:

$$V_\tau = H_\sigma \dot{\sigma} = \frac{c\sqrt{\sigma^2-\tau^2}\dot{\sigma}}{\sqrt{\sigma^2-1}}, \quad (10)$$

$$V_\sigma = H_\tau \dot{\tau} = \frac{c\sqrt{\tau^2-\sigma^2}\dot{\tau}}{\sqrt{\tau^2-1}},$$

где  $V_\tau$  – проекция вектора скорости на касательную к гиперболической оси орт  $\mathbf{e}_\tau$ ;

$V_\sigma$  – проекция вектора скорости на касательную к эллиптической оси орт  $\mathbf{e}_\sigma$ .

Ортогональные проекции вектора ускорения БЛА на соответствующие координатные оси локального дуального базиса эллиптической системы координат определяются в соответствии с уравнениями Лагранжа:

$$W_\tau = \frac{1}{H_\sigma} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\sigma}} - \frac{\partial T}{\partial \sigma} \right), \quad (11)$$

$$W_\sigma = \frac{1}{H_\tau} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\tau}} - \frac{\partial T}{\partial \tau} \right),$$

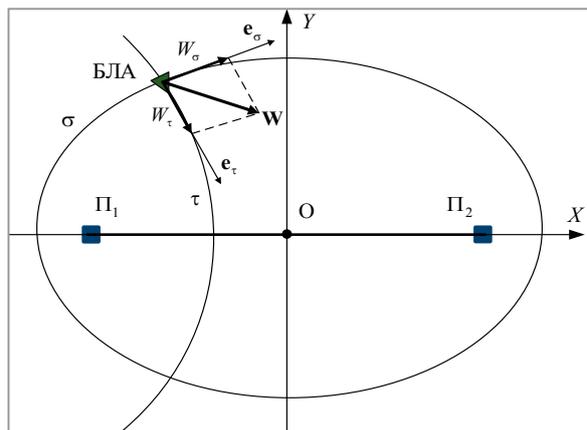


Рис. 3. Проекция вектора ускорения БЛА на базисные векторы касательного пространства эллиптической системы координат

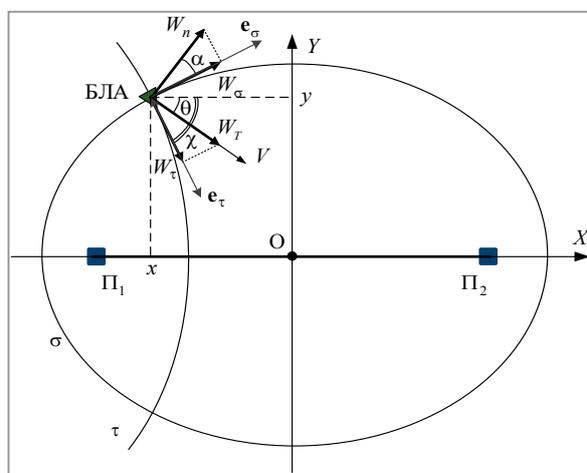


Рис. 4. Проекция вектора ускорения БЛА на оси скоростной декартовой системы координат

где  $W_\tau$  – проекция вектора ускорения на нормаль к эллиптической оси;

$W_\sigma$  – проекция вектора ускорения на нормаль к гиперболической оси.

Подставляя выражение (9) в (11) и производя дифференцирование получим

$$W_\tau = \frac{c}{(\sigma^2 - 1)^{3/2} (\tau^2 - 1) \sqrt{\sigma^2 - \tau^2}} [\sigma \dot{\sigma} (1 - \tau^2) + \sigma \dot{\tau} + \sigma^3 \dot{\tau}^2 (2 + \sigma^2) + 2\sigma \dot{\tau} \ddot{\tau} (\sigma^2 - 1) (1 - \tau^2) + \ddot{\sigma} \sigma^2 (1 - \sigma^2 + \tau^2 (\sigma^2 - \tau^2)) + \ddot{\sigma} \tau^2 (\tau^2 - 1)], \quad (12)$$

$$W_\sigma = \frac{c}{(\sigma^2 - 1) (\tau^2 - 1)^{3/2} \sqrt{\tau^2 - \sigma^2}} [\tau \dot{\tau} (1 - 2\sigma^2 + \sigma^4) + \tau \dot{\sigma}^2 + \tau^3 \dot{\sigma}^2 (\tau^2 - 2) + 2\tau \sigma \dot{\sigma} (\tau^2 - 1) (1 + \sigma^2) + \ddot{\tau} \tau^2 (1 - \tau^2 + \sigma^2 (\tau^2 - \sigma^2)) + \ddot{\sigma} \sigma^2 (\sigma^2 - 1)]. \quad (13)$$

Так как эллиптическая система координат является ортогональной, то ковариантные и контравариантные координаты любого вектора совпадают.

Управление траекторией полета БЛА как правило осуществляется аэродинамически или газодинамически, изменяя вектор нормального ускорения. При этом вектор скорости БЛА может быть ориентирован различным образом по отношению к осям эллиптической системы координат, связанной с навигационными позициями. В общем случае для сопоставления вектора ускорения, выраженного в скоростной системе координат БЛА и проекций этого вектора на оси эллиптической системы координат, необходимо знать угловую ориентацию  $\theta$  вектора скорости БЛА на плоскости и его эллиптические координаты  $\sigma, \tau$  (рис. 4).

Выражение для угла наклона  $\chi$  касательной к гиперболе в точке с координатами  $\sigma, \tau$  имеет вид

$$\chi = \arctan \left( \frac{\sigma \sqrt{1 - \tau^2}}{\tau \sqrt{\sigma^2 - 1}} \right). \quad (14)$$

Следовательно, угол между нормальным ускорением БЛА и касательным к эллиптической оси ортом  $e_\sigma$  определяется соотношением

$$\alpha = \chi - \theta.$$

Тогда закон преобразование проекций ускорения из скоростной системы координат БЛА в эллиптическую примет вид

$$\begin{pmatrix} W_\tau \\ W_\sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_T \\ W_n \end{pmatrix}. \quad (15)$$

С целью упрощения синтеза оптимального линейного регулятора будем полагать, что угол  $\alpha$  достаточно мал (менее  $10^\circ - 15^\circ$ ), то есть БЛА совершает управляемое движение вдоль выбранной методом наведения кинематической линии в виде гиперболы. Также будем пренебрегать углом атаки, считая его достаточно малым [7]. Тогда линеаризуем (15) и оставим наиболее значимые члены для каждой компоненты ускорения:

$$\begin{aligned} W_\sigma &= W_n, \\ W_\tau &= W_T. \end{aligned} \quad (16)$$

Из рис. 4 и выражений (16) видно, что управление траекторией движения БЛА осуществляется в основном через эллиптическую проекцию ускорения  $W_\sigma$ , поэтому для задачи управления главный интерес представляет выражение (13). Гиперболическая проекция ускорения  $W_\tau$  непосредственно в изменении гиперболы положения при движении БЛА не участвует. Однако она оказывает влияние на качество управления ввиду того, что, благодаря действию сил двигательной установки, аэродинамического сопротивления поверхностей и веса изменяется скорость движения БЛА, что в конечном итоге изменяет характеристики объекта управления, делая его нестационарным.

Теперь попытаемся упростить выражение (13). Для этого перегруппируем члены так, чтобы получилось выражение

$$\begin{aligned} W_\sigma &= \\ &= c [\tau (\tau^2 - 1)^2 (\dot{\sigma})^2 - 2\sigma (\sigma^2 - 1) (\tau^2 - 1) \dot{\sigma} \dot{\tau} + (\sigma^2 - 1) \times \\ &\quad \times ((\sigma^2 - 1) \tau (\dot{\tau})^2 - (\sigma^2 - \tau^2) (\tau^2 - 1) \ddot{\tau})] / \\ &\quad / (\sigma^2 - 1) (\tau^2 - 1)^{3/2} \sqrt{\tau^2 - \sigma^2}. \end{aligned} \quad (17)$$

Затем произведем сокращения, приводя к виду:

$$W_{\sigma} = c \left[ \frac{\tau \sqrt{(\tau^2 - 1)} (\dot{\sigma})^2}{(\sigma^2 - 1) \sqrt{\tau^2 - \sigma^2}} - \frac{2\sigma \dot{\sigma} \dot{\tau}}{\sqrt{(\tau^2 - 1)} \sqrt{\tau^2 - \sigma^2}} + \frac{(\sigma^2 - 1) \tau (\dot{\tau})^2}{(\tau^2 - 1)^{3/2} \sqrt{\tau^2 - \sigma^2}} + \frac{\sqrt{(\tau^2 - \sigma^2)} \ddot{\tau}}{\sqrt{(\tau^2 - 1)}} \right]. \quad (18)$$

Для определения существенных членов выражения (18) определим приблизительный диапазон изменения параметров движения БЛА. Примем в расчет скорость движения БЛА в районе 100 м/с ( $\dot{\sigma} \approx 0.1$ ), траектория движения БЛА проходит вдоль заданной гиперболы (в таком случае  $\dot{\tau} \ll 1$ ), целевая точка не находится вблизи базы навигационной системы, а также не используются при наведении БЛА траектории с высокой кривизной, приводящие к большим динамическим ошибкам. При этом выберем рассматриваемый диапазон эллиптических координат точки цели так:  $\tau \in [-0.3, 0.3]$ ,  $\sigma > 2$ . Подставляя данные диапазоны изменения величин в (18) можно заключить, что третий член значительно меньше остальных, поэтому его отбросим его, получая

$$W_{\sigma} = c \left[ \frac{\tau \sqrt{(\tau^2 - 1)} (\dot{\sigma})^2}{(\sigma^2 - 1) \sqrt{\tau^2 - \sigma^2}} - \frac{2\sigma \dot{\sigma} \dot{\tau}}{\sqrt{(\tau^2 - 1)} \sqrt{\tau^2 - \sigma^2}} + \frac{\sqrt{(\tau^2 - \sigma^2)} \ddot{\tau}}{\sqrt{(\tau^2 - 1)}} \right]. \quad (19)$$

Далее уберем  $\tau^2$  ввиду его малости по сравнению с окружающими членами:

$$W_{\sigma} = c \left[ \frac{\tau (\dot{\sigma})^2}{(\sigma^2 - 1) \sigma} + 2\dot{\sigma} \dot{\tau} + \sigma \ddot{\tau} \right]. \quad (20)$$

Первый член (20) вносит значительный вклад в районе линии базы, когда  $\sigma$  невелико (приблизительно когда  $1 < \sigma < 2$ ) или при больших абсолютных значениях  $\tau$  ( $|\tau| > 0.4$ ). Используя метод замораживания коэффициентов и преобразование Лапласа [8] получим следующее операторное уравнение для (20):

$$\frac{\tau(s)}{W_{\sigma}(s)} = \frac{1}{c \left( \frac{\dot{\sigma}^2}{\sigma(\sigma^2 - 1)} + 2\dot{\sigma}s + \sigma s^2 \right)}. \quad (21)$$

Полученное выражение можно привести к форме колебательного типового звена [8] вида

$$\frac{\tau(s)}{W_{\sigma}(s)} = \frac{K_{K3(I)}}{1 + 2\xi_{K3(I)} T_{K3(I)} s + T_{K3(I)}^2 s^2}, \quad (22)$$

где  $K_{K3(I)} = \frac{\sigma(\sigma^2 - 1)}{c\dot{\sigma}^2}$  – коэффициент усиления звена;

$T_{K3(I)} = \frac{\sigma}{\dot{\sigma}} \sqrt{\sigma^2 - 1}$  – постоянная времени звена;

$\xi_{K3(I)} = \sqrt{\sigma^2 - 1}$  – коэффициент демпфирования звена.

При этом следуя ограничению на кривизну траектории движения БЛА можно прийти к выводу, что, либо  $\sigma$  должно быть по крайней мере в несколько раз больше единицы, либо  $\tau$  должно стремиться к нулю. В обоих случаях первый член в (20) окажется значительно меньше оставшихся и тогда им тоже можно пренебречь. Таким образом, получаем кинематическую связь в виде

$$W_s = c [2\dot{\sigma} \dot{\tau} + \sigma \ddot{\tau}], \quad (23)$$

что в операторной форме будет выглядеть как

$$\frac{\tau(s)}{W_{\sigma}(s)} = \frac{1}{c s (2\dot{\sigma} + \sigma s)}. \quad (24)$$

Полученное выражение является последовательным соединением апериодического и интегрирующего звеньев:

$$\frac{\tau(s)}{W_{\sigma}(s)} = \frac{K_{K3(II)}}{s(1 + T_{K3(II)} s)}, \quad (25)$$

где  $K_{K3(II)} = \frac{1}{2\dot{\sigma}c}$  – коэффициент усиления звена;

$T_{K3(II)} = \frac{\sigma}{2\dot{\sigma}}$  – постоянная времени звена.

Член  $2\dot{\sigma} \dot{\tau}$  вносит существенный вклад при неуправляемом движении или при выводе БЛА на кинематическую траекторию метода наведения, когда гиперболическая скорость  $\dot{\tau}$  и эллиптическая скорость  $\dot{\sigma}$  оказывают существенное влияние, что имеет место вблизи линии базы навигационной системы. Для остальных случаев выражение (23) можно упростить до

$$W_{\sigma} = c \sigma \ddot{\tau}. \quad (26)$$

Что представляет собой двойное интегрирующее звено:

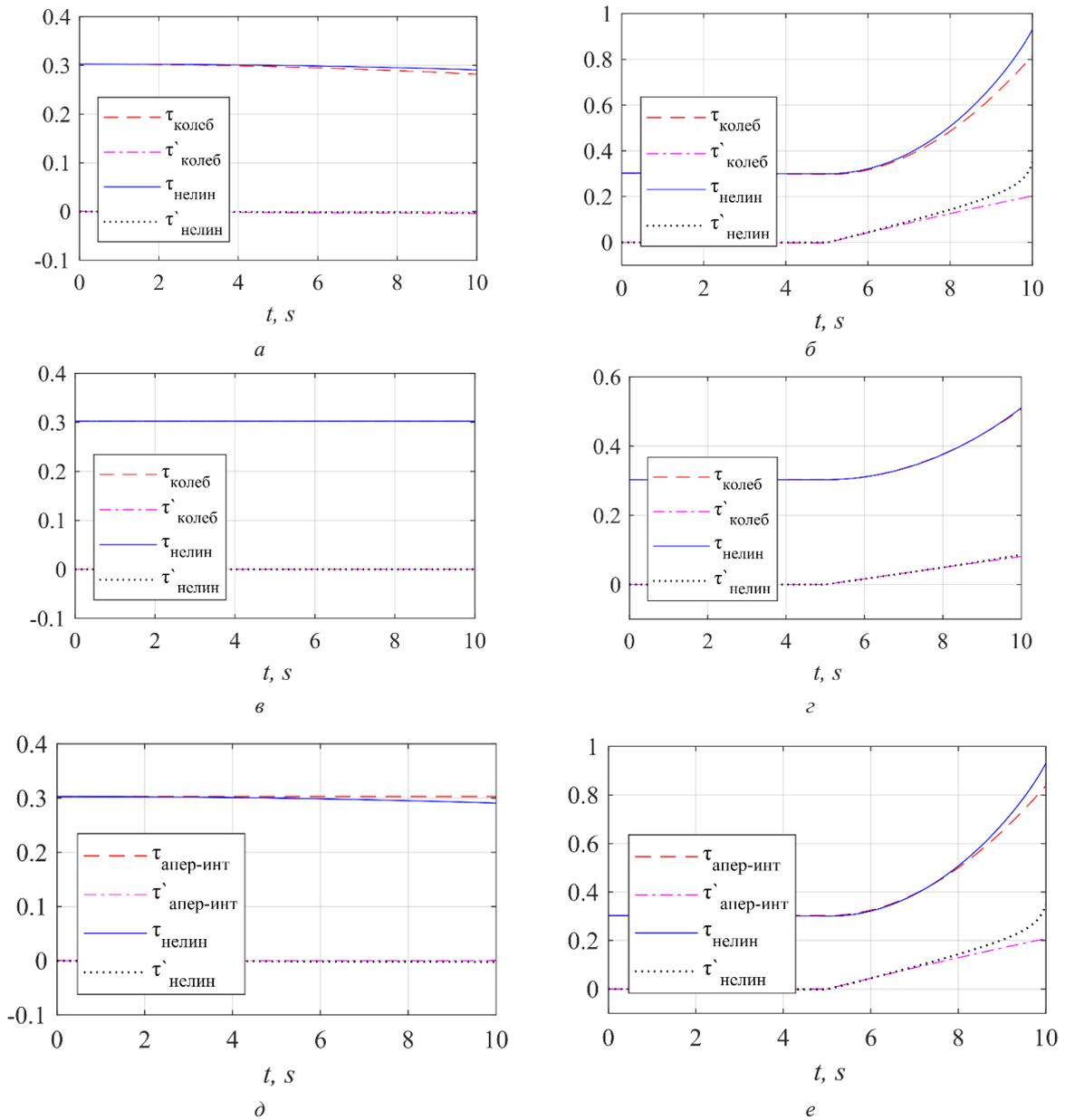
$$\frac{\tau(s)}{W_{\sigma}(s)} = \frac{K_{\text{кз(III)}}}{s^2}, \quad (27)$$

где  $K_{\text{кз(III)}} = \frac{1}{c\sigma}$  – коэффициент усиления звена.

**Результаты и их обсуждение**

Полученное нелинейное выражение (13) кинематической связи позволяет точно составить закон выработки управляющих ускорений для движения БЛА по заданной гиперболе. Это выражение возьмем за эталонное для сравнения с ним упрощенных выражений. На данном этапе наибольший интерес представляют полученные линеаризованные формы выражения (13),

а именно (20), (23) и (26). Для сравнения точности динамики упрощенных выражений с динамикой исходного выражения было проведено компьютерное моделирование для разных дальностей БЛА от центра базы навигационной системы. На рис. 5 показаны графики эволюции координаты  $\tau(t)$  и ее производной  $\tau'(t)$  для исходной нелинейной связи (13) ( $\tau_{\text{нелин}}$ ), для связи, описываемой колебательным звеном (22) ( $\tau_{\text{колеб}}$ , рисунок 5а–5з), для связи, описываемой соединением аperiodического и интегрирующего звеньев (25) ( $\tau_{\text{апер+инт}}$ , рисунок 5д–5з) и для связи, описываемой двойным интегрирующим звеном (27) ( $\tau_{\text{инт+инт}}$ , рисунок 5и–5л). Длина базы  $c = 1000\text{м}$ , опорная гипербола



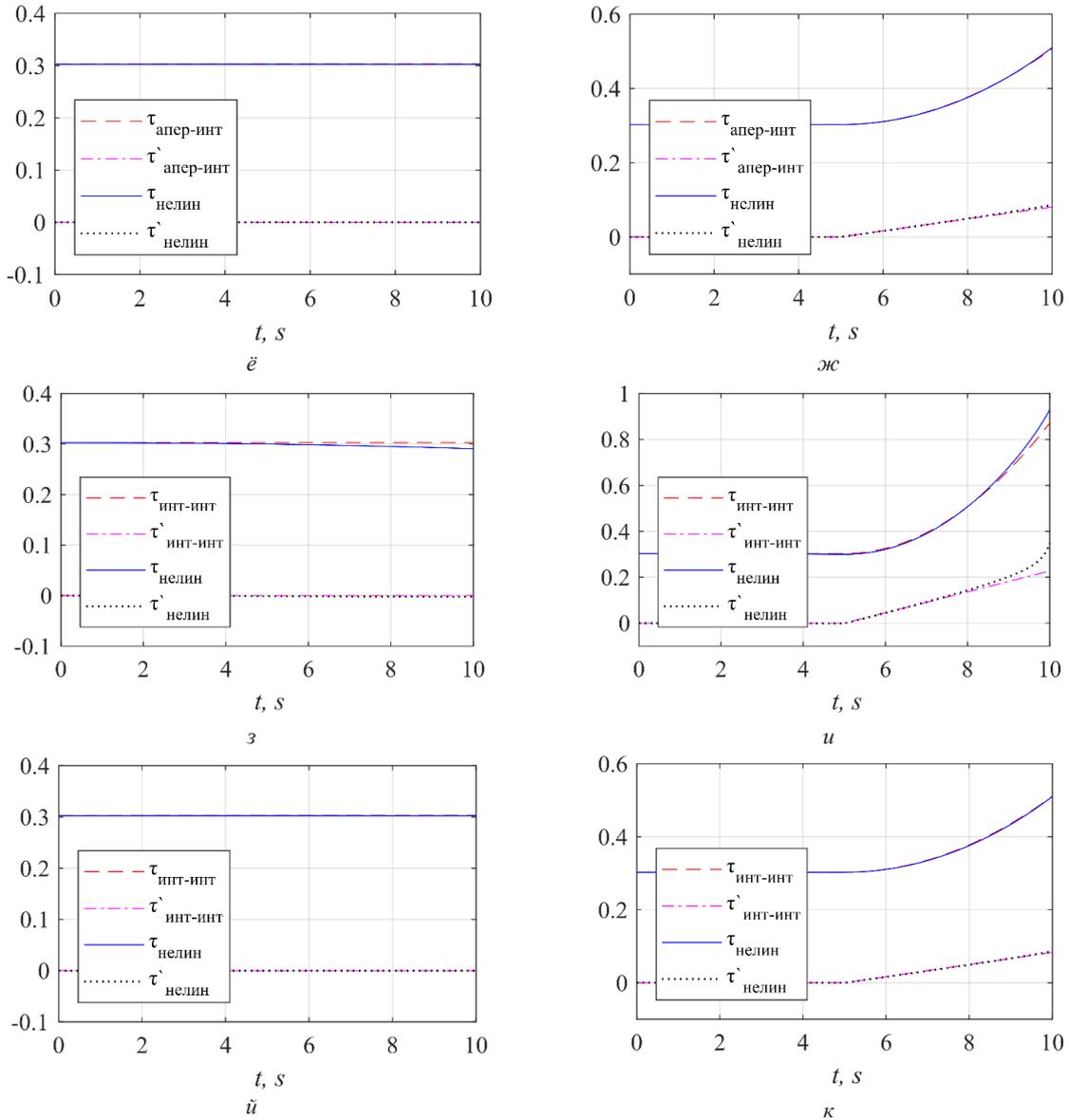


Рис. 5. Сравнительный анализ динамики нелинейной связи ( $\tau_{\text{нелин}}, \tau'_{\text{нелин}}$ ), соответствующей выражению (13) и линейризованным вариантам в виде колебательного ( $\tau_{\text{колеб}}, \tau'_{\text{колеб}}$ ), аperiodически-интегрирующего ( $\tau_{\text{апер+инт}}, \tau'_{\text{апер+инт}}$ ) и двойного интегрирующего ( $\tau_{\text{инт+инт}}, \tau'_{\text{инт+инт}}$ ) звеньев.

$\tau_0 = 0.3$ . На рисунках б, г, е, ж, и, к приведены результаты моделирования для случая воздействия управляющего ускорения  $W_{\sigma} = 50 \text{ м/с}^2$  в виде ступенчатого воздействия в момент времени  $t = 5 \text{ с}$ . На рисунках а, б, д, е, з, и координата  $\sigma = 1.1$ . На рисунках в, г, ё, ж, й, к координата  $\sigma = 3.1$ .

Также стоит отметить, что выражения (25) (27) полностью соответствуют выражениям кинематической связи, используемым в задачах телеуправления объектами в полярной системе координат, например с помощью метода пропорциональной навигации [7,8], что

косвенно подчеркивает верность линеаризации, так как произведение  $c\sigma$  фактически описывает некоторую «обобщенную» бистатическую дальность.

**Заключение**

Приведенный в данной статье вывод упрощенных линейных кинематических связей является необходимой ступенью в задаче синтеза оптимального линейного контура управления БЛА. Были получены как полные нелинейные кинематические связи управляющих БЛА ускорений с его обобщенными координатами,

которыми в данном случае являлись эллиптические координаты в альтернативном представлении. Также были получены и линеаризованные выражения связи с разной степенью детализации и соответствия реальным нелинейным выражениям. Полная нелинейная кинематическая связь может быть использована при синтезе контура управления с помощью нелинейных методов, таких как метод линеаризации обратной связью, метод «backstepping», метод аналитического конструирования агрегированных регуляторов (АКАР) и некоторые другие. Для использования же широко распространённых и хорошо изученных линейных методов синтеза, таких как метод размещения полюсов, метод получения желаемой логарифмической

амплитудно-фазо-частотной характеристики (ЛАФЧХ), метод аналитического конструирования обобщенного регулятора (АКОР) в постановке Лётова-Калмана, необходимо использовать линейные кинематические связи. Также было проведено компьютерное моделирование динамики кинематических величин в соответствии с полученными полным нелинейным и упрощёнными линейными кинематическими связями. Анализ показал, что динамика упрощённых линеаризованных выражений связей согласуется с динамикой полной нелинейной связи в определенной интересующей с точки зрения обеспечения процесса наведения по гиперболе области параметров системы.

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Легкоступ В. В., Маркевич В. Э.** Методика определения кинематической связи между управляющими летательным аппаратом ускорениями и его эллиптическими координатами для задачи наведения по разностно-дальномерной информации // Системный анализ и прикладная информатика. – 2021. – № 1.
2. **Корн Г.** Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1970.
3. **Hazewinkel, M. (Ed.),** Encyclopaedia of Mathematics, Vol. 10 (Index), Kluwer, 1994 (ISBN:1–55608–009–3).
4. **Morse, P. M. and Feshbach, H.** Methods of Theoretical Physics, Part I. New York: McGraw-Hill, p. 657, 1953.
5. **Алферов Г. В.** Методическое пособие. Механика в криволинейных координатах. Санкт-Петербург 2006.
6. **Bowen R. M., and Wang C.-C.** Introduction to Vectors and Tensors, Springer, New York, 1976.
7. **Кун А. А., Лукьянов В. Ф., Шабан С. А.** Основы построения систем управления ракетами. В 3-х ч. – Минск: Издание академии, 2001, 131 с.
8. **Орлов Е. В.** Проектирование систем телеуправления. – Ижевск: Издательский дом «Удмуртский университет», 200. 272 с.

### REFERENCES

1. **Legkostup V. V., Markevich V. E.** Methodology for determining the kinematic relationship between acceleration control aircraft and its elliptical coordinates for guidance problems based on differential rangefinder information // System Analysis and Applied Informatics. – 2021. – No. 1.
2. **Korn G.** Spravochnik po matematike dlya nauchnykh rabotnikov i inzhenerov / G. Korn, T. Korn. – M.: Nauka, 1970.
3. **Hazewinkel, M. (Ed.),** Encyclopaedia of Mathematics, Vol. 10 (Index), Kluwer, 1994 (ISBN:1–55608–009–3).
4. **Morse, P. M. and Feshbach, H.** Methods of Theoretical Physics, Part I. New York: McGraw-Hill, p. 657, 1953.
5. **Alferov G. V.** Metodicheskoye posobiye. Mekhanika v krivolinyeynykh koordinatakh. Sankt – Peterburg 2006.
6. **Bowen R. M., and Wang C.-C.** Introduction to Vectors and Tensors, Springer, New York, 1976.
7. **Kun A. A., Luk'yanov V. F., Shaban S. A.** Osnovy postroyeniya sistem upravleniya raketami. V 3-kh ch. – Minsk: Izdaniye akademii, 2001, 131 s.
8. **Orlov Ye. V.** Proyektirovaniye sistem teleupravleniya. – Izhevsk: Izdatel'skiy dom «Udmurtskiy universitet», 200. 272 s.

*Поступила*  
05.03.2021

*После доработки*  
17.06.2021

*Принята к печати*  
01.09.2021

*LEGKOSTUP V. V.*

## METHODOLOGY OF DETERMINING OF THE TRANSFER FUNCTION OF ENGAGEMENT KINEMATICS OF ACCELERATIONS OF AN AIRCRAFT AND ITS ELLIPTIC COORDINATES IN ALTERNATIVE REPRESENTATION

*JSC «ALEVKURP» (Minsk, Republic of Belarus)*

*In this work, simplified expressions have been obtained that describe the kinematics parameters of the aircraft movement and its accelerations. These expressions are needed to obtain an optimal linear control law in order to provide movement of the aircraft using the hyperbola guidance method with a time difference of arrival navigation system. The key feature of the hyperbola navigation method is the ability to reduce the number of navigation positions by one when the on-board navigation equipment operates in a passive mode, carrying out only the reception of navigation information, like consumers of satellite navigation information.*

**Keywords:** *curvilinear elliptic coordinate system, Lamé coefficients, navigation, kinematics of navigation and guidance, UAV, TDoA.*



**Легкоступ Виктор Валерьевич** – магистр технических наук, научный сотрудник ОАО «АЛЕВКУРП».

**Legkostup Victor Valeryevich** – staff researcher, JSC “ALEVKURP”, Minsk, Belarus.

E-mail: legkostupvv@gmail.com