УДК 51(07.07)

Метод «геометрической подстановки» в решении систем уравнений и неравенств

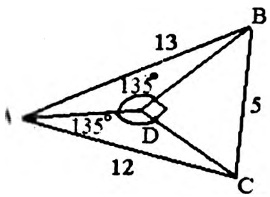
Чернявская С.В., Ревтович В.Н.
Белорусский национальный технический университет

В настоящее время на занятиях по математике всё больше внимания уделяется изучению нестандартных методов решения уравнений и неравенств. Ниже приведён пример системы алгебраических уравнений, которые могут быть рассмотрены как известные геометрические теоремы, что позволяет представить систему уравнений в виде геометрического объекта треугольника.

<u>Пример.</u> Найти значение выражения $xy + yz + zx$, если известно, что

$$x^2 + xy + \frac{y^2}{2} = 169; \quad \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2} = 25; \quad x^2 + xz + \frac{z^2}{2} = 144; \; x>0,\ y>0,\ z>0.$$

Рассмотрим первое и третье равенство как теорему косинусов для треугольника ABD со сторонами AB=13; AD=x; BD=$\frac{y}{\sqrt{2}}$ и углом 135° между AD и DB и треугольника ADC со сторонами AC=12; AD=x; DC=$\frac{z}{\sqrt{2}}$; и углом между ними 135°. Второе равенство выражает теорему Пифагора



для треугольника BDC с катетами $\frac{y}{\sqrt{2}}$ и $\frac{z}{\sqrt{2}}$ и гипотенузой 5. При этом:

$$S_{ABD} = \frac{1}{2} x \frac{y}{\sqrt{2}} \sin 135° = \frac{xy}{4};$$

$$S_{ACD} = \frac{1}{2} x \frac{z}{\sqrt{2}} \sin 135° = \frac{xz}{4}; \; S_{BCD} = \frac{yz}{4}.$$

Следовательно, выражение xy+yz+zx равно $4\,S_{ABC}$. Треугольник ABC прямоугольный, его площадь равна $S = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 5 = 30$.

Поэтому xy+yz+zx=120.

Ответ: 120.

В заключение отметим, что применение нестандартных методов позволит школьникам расширить область решаемых задач и способствовать успешной сдаче вступительных испытаний.