УДК 518:517.392

Аппроксимация решения смешанной задачи для одномерного уравнения теплопроводности

Ласый П.Г.

Белорусский национальный технический университет

Рассматривается классическая задача о распределении температуры в тонком, однородном, теплоизолированном стержне конечной длины без источников теплоизлучения, концы которого поддерживаются при нулевой температуре и в каждой точке стержня задана начальная температура.

Математической моделью этой задачи является однородное одномерное уравнение теплопроводности $\partial_t u = a^2 \partial_{xx} u,\ x \in [0, l],\ t \geq 0$ (1)

при однородных граничных условиях и заданном начальном условии

$$u(x,\ 0) = f(x),\ \ x \in [0,\ l].$$

Точное и приближенное решение данной задачи найти методом Фурье весьма затруднительно, поскольку приходится вычислять коэффициенты ряда Фурье, да и погрешность метода оценить непросто. В настоящем докладе предлагается другой способ решения данной задачи, основанный на представлении решения с помощью специальной пси-функции

$$\Psi_k(\lambda,\ t,\ z) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda n^2 t} n^{-k} z^n,$$

являющейся быстро сходящимся степенным рядом.

Теорема. Точное решение данной смешанной задачи для уравнения теплопроводности (1) выражается через пси-функцию по формуле

$$u(x,\ t) = \frac{1}{l}\int_0^l f(s)\,\mathrm{Re}\Big(\Psi_0\big(\alpha,\ t,\ e^{i\omega(s-x)}\big) - \Psi_0\big(\alpha,\ t,\ e^{i\omega(s+x)}\big)\Big)ds,$$

где $\alpha = (\pi a / l)^2, \omega = \pi / l,$ а приближенное – по формуле

$$u(x,\ t) \approx u_n(x,\ t) = \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n} f\left(x_{k-1} + \frac{h}{2}\right)\mathrm{Im}\Big(\Psi_1\big(\alpha,\ t,\ e^{i\omega(s-x)}\big) - \Psi_1\big(\alpha,\ t,\ e^{i\omega(s+x)}\big)\Big)\Bigg|_{x_{k-1}}^{x_k},$$

$x_k = (k-1)h, h = l / n.$ Погрешность вычисления имеет первый порядок малости относительно шага h разбиения отрезка $[0,\ l]$ равномерно по этому отрезку и полуоси $t \geq t_0 > 0$. Кроме того, погрешность исчезает равномерно по $x \in [0,\ l]$ при $t \to +\infty$.

Замечание. С помощью пси-функции может быть также представлено решение уравнения теплопроводности (1) при наличии источников теплоизлучения и неоднородных граничных условиях.