УДК 517.968

О полилогарифмах и дзета-функции Римана

Мелешко И.Н.
Белорусский национальный технический университет

Полилогарифмами порядка s названы функции комплексного переменного, определяемые в круге единичного радиуса следующими рядами

$$L^s(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^s}z^k,\quad L_*^s(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)}{k^s}z^k.$$

При $s = 1$ полилогарифмы представляют собой логарифмические функции

$$L^1(z)=-\ln(1-z),\quad L_*^1(z)=-\ln(1+z).$$

Полилогарифм второго порядка

$$L^2(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}z^k$$

принято называть дилогарифмом Эйлера.

Ряды, которыми определены полилогарифмы, входят в представлени решений многих задач механики, математической физики и прикладной математики. Эти специальные функции нашли применение также в теории аналитических функций, алгебраической геометрии, теории чисел и других разделах математики.

При исследовании полилогарифмов была замечена их связь с известной дзета-функцией Римана.

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^z}$ равномерно сходится во всякой области, в которой $\mathrm{Re}\,z\ge 1+\delta,\ \delta>0$. Следовательно, в такой области этот ряд является аналитической функцией от z. Последняя называется дзета-функцией Римана

$$\zeta_R(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^z},\ \mathrm{Re}\,z\ge 1+\delta,\ \delta>0.$$

Эта функция играет важную роль в теории чисел. Вопрос о распределении нулей дзета-функции Римана не имеет полного решения до настоящего времени.

Риман выдвинул гипотезу, что все нули функции $\zeta_R(z)$, лежащие в полосе $0\le \mathrm{Re}\,z\le 1$, расположены на прямой $\mathrm{Re}\,z=\frac{1}{2}$. Доказано, что на этой прямой лежит бесконечное множество нулей дзета-функции Римана