УДК 519.95

Одно применение функций гипергеометрического типа в теории дробного интегродифференцирования

Овчаренко Е.В.
Национальный технический университет Украины
«Киевский политехнический институт»

В последнее время в теории специальных функций происходит процесс расширения и обобщения многих уже известных классов функций, которые позволяют решать новые задачи прикладной математики, математической физики, квантовой теории поля и др. Рассмотрим (τ,β) – обобщение гипергеометрической функции Гаусса в виде [1]:

$$ {}_2F_1^{\tau,\beta}(a,b;c;z) \equiv {}_2F_1^{\tau,\beta}(z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \times $$
$$ \times \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}\, {}_2\Psi_1\left[\begin{matrix}(a,1);(c,\tau); \\ (c,\beta);\end{matrix}\Big| zt^{\tau}\right]dt, $$

где $\{a,b,c\} \in C, \mathrm{Re}\,c > \mathrm{Re}\,b > 0$, $\{\tau,\beta\} \subset R, \tau > 0, \beta > 0$, $\tau - \beta \le 1$; Γ – классическая гамма-функция [2], ${}_2\Psi_1$ функция типа Райта.

Лемма. Пусть $\{\alpha,\gamma\} \subset C$, $\mathrm{Re}\,\alpha > 0, \mathrm{Re}\,\gamma > 0$, $s \in C, \omega > 0$, тогда:

$$ (I_{0+}^{\alpha} t^{\gamma-1}\, {}_2F_1^{\tau,\beta}(a,b;c;rt^{\omega}))(x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha+\gamma)}\, x^{\alpha+\gamma-1}\, {}_3F_2^{\tau,\beta,\omega}(a,b,\gamma;c,\alpha+\gamma;rx^{\omega}), $$

$$ (I_{0-}^{\alpha} t^{-\gamma}\, {}_2F_1^{\tau,\beta}(a,b;c;\frac{r}{t^{\omega}}))(x) = \frac{\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma)}\, x^{\alpha-\gamma}\, {}_3F_2^{\tau,\beta,\omega}(a,b,\gamma-\alpha;c,\gamma;\frac{r}{x^{\omega}}), $$

где I_{0+}^{α}, I_{0-}^{α} – операторы Римана-Лиувиля [3]:

$$ (I_{0+}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt,\ (x>0), (I_{0-}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^{\infty} \frac{f(t)}{(t-x)^{1-\alpha}}dt, $$

$(x > 0)$, ${}_3F_2^{\tau,\beta,\omega}$ – функция типа Райта.

Литература

1. Вирченко, Н.А., Румянцева, Е.В. Про (τ,β) – обобщение гипергеометрической функции Гаусса и ее применение // Доклады НАН Украины. – 2008. – № 4. – С. 12-19.
2. Бейтмен, Г, Эрдейи, А. Высшие трансцендентные функции / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – Т.1. – М.: Наука, 1965. – 296 с.
3. Вирченко, Н.А., Рыбак, В.Я. Основы дробного интегродифференцирования / Н.А. Вирченко, В.Я. Рыбак. – К., 2007. – 364 с.