УДК 511.5

Тернарное уравнение в группе алгебраических единиц

Трелина Л. А.
Белорусский национальный технический университет

Рассмотрим уравнение

$$\alpha\varepsilon+\beta\eta=1, \quad \alpha,\beta\in K, \qquad (*)$$

относительно единиц ε, η поля алгебраических чисел K. К (*) сводится диофантово уравнение

$$Cy^m=x^l F(x,z), \qquad (**)$$

$$F(X,Z)=A_0X^n+A_1X^{n-1}Z+\ldots+A_nZ^n,$$

$$A_0A_n Discr(F)\neq 0, m,n\in N, l\in Z, m\geq 2, m+n\geq 5,$$

над кольцом O_K целых элементов K в случае $z\in O_K^*$ или $y\in O_K^*$ [1].

Следующий результат относится к основной задаче для уравнений (*), (**).

Теорема 1. Существуют алгебраическое расширение L/K степени, не превосходящей явной границы $c_1(K,\alpha,\beta)$ для (*) и $c_2(K,F)$ для (**), и единицы ε,η,ξ, такие, что справедливо равенство вида (*) и $F(\xi,1)\in O_L^*$, если коэффициенты F порождают единичный идеал. Кроме того, высоты единиц ε,η,ξ эффективно ограничены.

Как следствие, найдена область $\Omega(F,C,K)$ существования решения уравнения (**) в башне числовых полей.

Представляет интерес связь между параметрами $\Omega(F,C,Q)$ и факторизацией дискриминанта $Discr(F)=(-1)^a p_1^{a_1}\ldots p_r^{a_r}$.

Теорема 2. Пусть $F(X,1)$ – неприводимый многочлен с целыми рациональными коэффициентами и пусть $\max\limits_j p_j=P$. Предположим, что $F(1,0)=1$ и в поле K существует решение уравнения (**) $x\in O_K^*$, $x\notin Q$, $z=1$, $y\in O_K$. Тогда

$$P>c_3(K,n,C)\log\log H,$$

где H – максимум значений абсолютной мультипликативной высоты $h(x)$ и $h(F)$, $c_3>0$ – эффективная величина.

[1] Baker A. Transcendental Number Theory. CUP, 1975.