УДК 517.925

Линейные системы с кососимметрической матрицей коэффициентов

Веременюк В.В.
Белорусский национальный технический университет

Рассматривается линейная система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(t)x, x \in \mathbf{R}^n, t \in \mathbf{R}, \qquad (1)$$

с непрерывной ограниченной матрицей $A(t)$. Через $X(t)$ обозначим фундаментальную матрицу (ФМ) этой системы (см., напр., [1]).

Утв 1. Если матрица $A(t)$ – кососимметрическая при любом $t \in \mathbf{R}$, то ее ФМ $X(t)$ можно выбрать ортогональной, т.е. $X^T(t) = X^{-1}(t)$.

Для доказательства заметим, что для любых ненулевых решений $x(t)$ и $y(t)$ системы (1) $\frac{d}{dt}(x(t), y(t)) \equiv 0$. Это означает, что нормы $\|x(t)\| \equiv const$ при любом $t \in \mathbf{R}$ для любого решения $x(t)$ системы (1), и угол между любыми ненулевыми решениями $x(t)$ и $y(t)$ системы (1) есть величина постоянная.

Как следствие получаем утверждение (далее $diag\{a(t)\}$ обозначает диагональную матрицу с элементами $a(t)$ на диагонали).

Утв 2. Если $A(t) = P(t) + B(t)$, где $P(t) = diag\{p(t)\}$, $B^T(t) = -B(t)$, то ФМ системы (1) представляется в виде $X(t) = C(t) \cdot diag\{\hat{p}(t)\}$, где $\hat{p}(t) = EXP\left(\int_0^t p(s)\, ds\right)$, $C(t)$ – ортогональная матрица.

Выберем матрицу $C(t) = X_B(t)$ – ортогональная ФМ системы $\dot{x} = B(t)x$ и сделаем ляпуновское преобразование системы (1) $x = C(t)y$. Т.к. $C^T(t)\dot{C}(t) = C^T(t)B(t)C(t)$ и $C^T(t)P(t)C(t) = P(t)$, то преобразованная система примет вид $\dot{y} = -C^T(t)\dot{C}(t)y + C^T(t)P(t)C(t)y + C^T(t)B(t)C(t)y =$ $= P(t)y$. Ее ФМ, очевидно, равна $diag\{\hat{p}(t)\}$.

Если существует предел $\lambda = \lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t p(s)\, ds$, то система (1) с матрицей вида, указ. в утв.2 – правильная [1], и все ее показатели Ляпунова равны λ

Литература

1. Демидович, Б.П. Лекции по матем. теории устойчивости. М., 1967.