УДК 539.3

Две теоремы о распространении волн в упругом изотропном слое

Акимов В.А.
Белорусский национальный технический университет

Рассмотрим бесконечный упругий изотропный слой. Оси OX и OУ направим внутри слоя в его середине, а ось OZ перпендикулярно слою. Тогда нулевые граничные условия примут вид $\tau_{ZX} = \tau_{ZY} = \sigma_Z = 0$ Докажем следующую теорему

Теорема 1 В изотропном слое для первой основной динамической задачи теории упругости возможно выполнение только касательных или только нормальных однородных напряжений. Совместное равенство нулю касательных и нормальных напряжений на границах слоя невозможно.

Ранее были построены ряды перемещений для упругого слоя, которые обеспечивали тождественное выполнение нулевых касательных напряжений в задачах А и В, а также найдены выражения для нормальных напряжений . Полагая $\sigma_Z = 0$ в задаче А получим

$$\frac{\left(\nabla_2^2 + \nabla^2\right)^2}{4\nabla_1\nabla_2\nabla^2} = tg\left(h\nabla_1\right)ctg\left(h\nabla_2\right) \qquad (1)$$

В задаче В будем иметь

$$\frac{\left(\nabla_2^2 + \nabla^2\right)^2}{4\nabla_1\nabla_2\nabla^2} = tg\left(h\nabla_2\right)ctg\left(h\nabla_1\right) \qquad (2)$$

Так как левые части выражений (1) и (2) равны, то приравняем и их правые части. Тогда получим

$$tg\left(h\nabla_1\right)ctg\left(h\nabla_2\right) = tg\left(h\nabla_2\right)ctg\left(h\nabla_1\right) \qquad (3)$$

Используя известное тождество $ctgx = \frac{1}{tgx}$, перепишем (3) в виде $tg^2\left(h\nabla_1\right) = tg^2\left(h\nabla_2\right)$, откуда устанавливаем равенства $tg\left(h\nabla_1\right) = tg\left(h\nabla_2\right)$ и $tg\left(h\nabla_1\right) = -tg\left(h\nabla_2\right)$ или $tg\left(h\nabla_1\right) = tg\left(-h\nabla_2\right)$. В результате получим невозможное в динамике соотношение $\nabla_1 = \pm\nabla_2$. Отсюда и следует доказываемое утверждение.

Кроме этого, по аналогии, можно сформулировать и доказать еще одну теорему.

Теорема 2. В изотропном слое для второй основной динамической задачи теории упругости возможно выполнение только касательных или только нормальных однородных перемещений. Совместное равенство нулю касательных и нормальных перемещений на границах слоя невозможно.