УДК539.3

Влияние анизотропии на волновые свойства материалов

Гончарова С.В.
Белорусский национальный технический университет.

Запишем уравнение движения трансверсально-изотропной упругой среды в виде:

$$(A_{11}\partial_1^2 + A_{66}\partial_2^2 + A_{44}\partial_3^2)u + (A_{11} - A_{66})\partial_1\partial_2 v + (A_{13} + A_{44})\partial_1\partial_3 = \rho\partial_t^2 u,$$
$$(A_{11} - A_{66})\partial_1\partial_2 u + (A_{66}\partial_1^2 + A_{11}\partial_2^2 + A_{44}\partial_3^2)v + (A_{13} + A_{44})\partial_3^2 w = \rho\partial_t^2 v,$$
$$(A_{13} + A_{44})\partial_1\partial_2 u + (A_{13} + A_{44})\partial_1\partial_3 v + (A_{44}\partial_1^2 + A_{44}\partial_2^2 + A_{33}\partial_3^2) = \rho\partial_t^2 w.$$

Здесь *u, v, w*-компоненты вектора перемещений;

A_{11}, A_{33}, A_{44}, A_{66}, A_{13}-упругие постоянные;

$\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \partial_2 = \frac{\partial}{\partial y}; \partial_3 = \frac{\partial}{\partial z}; \partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$; ρ-плотность материала.

Определитель исходной системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка можно представить в виде:

$$det = A_{33}A_{44}^2\left(\Delta^2 - \frac{\partial_t^2}{c_2^2}\right)\left(k_1^2\Delta_1^2 + \partial_3^2 - \frac{1}{c_1^2}\right)\left(k_2^2\Delta_1^2 + \partial_3^2 - \frac{1}{c_2^2}\right) \qquad (1)$$

Где $k_1 = \sqrt{\frac{A_{11}}{A_{33}}}; k_2 = \sqrt{\frac{A_{66}}{A_{44}}}$,

$\Delta_1^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2; \Delta^2 = \Delta_1^2 + \partial_3^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2;$

$c_1 = \sqrt{\frac{A_{11}}{\rho}}$ -скорость продольной волны,

$c_2 = \sqrt{\frac{A_{44}}{\rho}}$ -скорость поперечной волны.

Для изотропного же случая, когда $A_{11} = A_{33} = \rho G$. $A_{44} = A_{66} = G$ получаем det=$\rho G^3\left(\Delta^2 - \frac{1}{c_2^2}\right)^2\left(\Delta - \frac{1}{c_1^2}\right)$. (2)

Сравнивая (1) и (2) убеждаемся в том, что выражения в круглых скобках в (2) получаются из выражений в круглых скобках (1),. если положить K_1=1 и K_2=1. Эта особенность указывает на то обстоятельство, что в трансверсально-изотропной упругой среде, в отличие от изотропной кроме «чистых» продольных волн распространяются «искаженные» продольные и поперечные волны. Причем коэффициенты искажения κ_1 и κ_2 влияют только на поперечные лапласианы Δ_1.

Наличие в операторах отличных от единицы коэффициентов k_1 и k_2 позволяет утверждать о своеобразии динамических процессов, протекающих в трансверсально-изотропных средах. Предложенный выше метод представляет интерес не только с математической точки зрения, но и способствует построению более совершенных математических моделей, описывающих физические процессы в неизотропных средах.