УДК359.3

Аппроксимация функций неортогональными рядами

Акимов В.А., Кожушко В.В.
Белорусский национальный технический университет

Теория интерполирования и приближения (аппроксимации) функций была и остается одной из основных линий развитий современной теоретической и прикладной математики. Приближение функций на конечном промежутке конечными суммами алгебраических и тригонометрических полиномов является удобным для расчета видом решений многих практических задач. Большое распространение получили так называемое точечное интерполирование, квадратические приближения, средние степенные и равномерные приближения, сплайны и другие. В последнее время в связи с развитием операторных методов для решения задач стали привлекаться так называемые неортогональные ряды.

Возьмем в качестве исходного базиса, по которому осуществляется разложение некоторой заданной функции $f(x)$ в ряд типа Фурье, неортогональную тригонометрическую $\{\sin\lambda_k x, \cos\lambda_k x\}_{k=0}^{k=\infty}$ или гиперболическую $\{sh\lambda_k x, ch\lambda_k x\}_{k=0}^{\infty}$ систему функций, где $\lambda_к$ –корни некоторого уравнения $R(\lambda)=0$.

Рассмотрим способы нахождения коэффициентов разложения функций в неортогональные ряды на конкретных примерах. Первоначально определим коэффициенты $a_к$ и $b_к$ в рядах вида

$$sh(ax) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\lambda_k x, \qquad (1)$$

$$sh(ax) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\lambda_k x \quad , \qquad (2)$$

где $\lambda_к$ –корни функции Бесселя $I_0(\lambda_r)=0$, $k=1,2,3\ldots$

Поставленную задачу решают дифференциальные операторы $D_1 = \frac{d_x I_0(d_x)}{1+d_x^2/\lambda_k^2}$ для уравнений (1) и операторы $D_0=I_0(d_x)$ и $D_2=d_x D_i$ для уравнения (2), где $d_x = \frac{d}{dx}$, а $I_0(z)$- модифицированная функция Бесселя нулевого порядка.

Теперь разложим функцию $f(x) = \exp(\exp(x))$ в ряд вида $\exp(\exp(x)) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k sh(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} B_k ch(kx) + B_0$

Используем для этой цели операторы

$$D_1 = \frac{\sin\pi d_x}{k^2-d_x^2}, \qquad D_0 = \sin\pi d_x, \qquad D_2 = \frac{d_x \sin\pi d_x}{k^2-d_x^2}.$$

Отсюда получаем $B_0=1$, $A_к=B_к=1/k!$, а исходные разложения принимают вид $\exp(\exp(x)) = \sum_{k=0}^{\infty}(sh(kx) + ch(kx))/k!$

Ряды Фурье можно трактовать как частный случай неортогональных тригонометрических рядов.