

<https://doi.org/10.21122/2227-1031-2021-20-5-405-409>

УДК 539.3

## К решению контактной задачи для упругой полуполосы

Докт. техн. наук, проф. С. В. Босаков<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup>Белорусский национальный технический университет (Минск, Республика Беларусь)

© Белорусский национальный технический университет, 2021  
Belarusian National Technical University, 2021

**Реферат.** Контактные задачи для упругой полосы достаточно хорошо исследованы и освещены в отечественной научной литературе. Отчасти это вызвано тем, что в нормативных документах по фундаментостроению рекомендуется использовать эту модель упругого основания для моделирования системы «сооружение – фундамент – грунтовое основание». Обычно рассматриваются два варианта граничных условий на контакте полуполосы с жестким недеформируемым основанием. Первое граничное условие обращает в нуль вертикальные перемещения и касательные напряжения, второе – вертикальные и горизонтальные перемещения. Значительно менее исследованы контактные задачи для упругой полуполосы. В статье рассмотрена эта контактная задача при выполнении первого граничного условия обращения в нуль вертикальных перемещений и касательных напряжений на контакте полуполосы с жестким недеформируемым основанием. При проведении расчетов в традиционной постановке без учета касательных напряжений в контактной зоне используется способ Б. Н. Жемочкина, который сводит решение контактной задачи механики твердого деформируемого тела к решению статически неопределимой задачи смешанным методом строительной механики. Поэтому вначале найдены перемещения верхней грани полуполосы от равномерно распределенной по участку грани единичной нагрузки. Полученное выражение используется для составления системы уравнений способа Жемочкина. Рассмотрен случай поступательного перемещения штампа, приводится график распределения контактных напряжений под подошвой штампа.

**Ключевые слова:** контактная задача, штамп, способ Жемочкина, полуполоса

**Для цитирования:** Босаков, С. В. К решению контактной задачи для упругой полуполосы / С. В. Босаков // *Наука и техника*. 2021. Т. 20, № 5. С. 405–409. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2021-20-5-405-409>

## To Solution of Contact Problem for Elastic Half-Strip

S. V. Bosakov<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup>Belarusian National Technical University (Minsk, Republic of Belarus)

**Abstract.** Contact problems for elastic stripes have been well studied and published in domestic scientific literature. This is partly due to the fact that normative documents on the foundation structure it is recommended to use this elastic foundation model for simulation of a “structure – foundation – soil foundation” system. Two variants of boundary conditions at the contact between a half-strip and a rigid non-deformable base are usually considered. The first boundary condition nullifies the vertical displacements and tangential stresses, the second one nullifies vertical and horizontal displacements. Contact problems for an elastic half-strip are much less investigated. The paper considers this contact problem when the first boundary condition for zeroing of vertical displacements and tangential stresses at the contact of a half-strip with a rigid, non-deformable base. When performing calculations in the traditional formulation without taking into account tangential stresses in the contact zone, the Zhemochkin method has been used, which reduces the solution of the contact problem of solid mechanics to the solution of a statically indeterminate problem by the mixed method of structural mechanics. Therefore, at first, we have found the displacements of the upper edge of the half-strip from the unit load uniformly distributed over the edge section. The resulting expression is used to compose a system of equations for the Zhemochkin method. The case

---

### Адрес для переписки

Босаков Сергей Викторович  
Белорусский национальный технический университет  
просп. Независимости, 65,  
220013, г. Минск, Республика Беларусь  
Тел.: +375 17 293-93-04  
sevibo@yahoo.com

### Address for correspondence

Bosakov Siarhei V.  
Belarusian National Technical University  
65, Nezavisimosty Ave.,  
220013, Minsk, Republic of Belarus  
Tel.: +375 17 293-93-04  
sevibo@yahoo.com

of translational displacement of the die has been considered, and the graph of contact stress distribution under the die's sole has been given in the paper.

**Keywords:** contact problem, stamp, Zhemochkin method, half-strip

**For citation:** Bosakov S. V. (2021) To Solution of Contact Problem for Elastic Half-Strip. *Science and Technique*. 20 (5), 405–409. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2021-20-5-405-409> (in Russian)

Контактные задачи для упругой полосы при различных условиях ее опирания решены разными авторами [1–4]. Однако крайне ограничено число опубликованных работ по решению задач для упругой полуполосы при различных граничных условиях на ее торце и продольных гранях [5, 6]. Работы по решению контактных задач для упругой полуполосы также немногочисленны [7, 8]. Автор статьи предлагает решение контактной задачи для упругой полуполосы при загрузке ее продольной грани штампом с плоской подошвой (рис. 1).

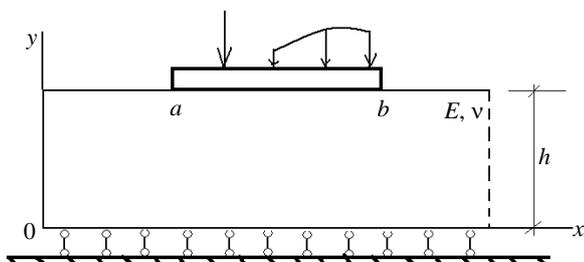


Рис. 1. Штамп на упругой полуполосе под действием вертикальной нагрузки

Fig. 1. Stamp on elastic half-strip under vertical load

Принимаем условие, что на контакте полуполосы и жесткого основания отсутствуют вертикальные перемещения и касательные напряжения. Вначале рассмотрим решение вспомогательной задачи при действии на полуполосу равномерно распределенной по участку  $(0, b)$  нагрузки  $q$  (рис. 2).

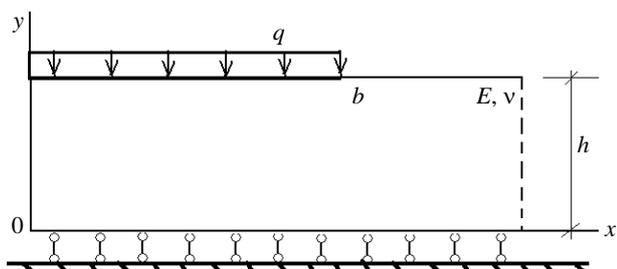


Рис. 2. Действие равномерно распределенной нагрузки на верхнюю грань полуполосы

Fig. 2. Action of uniformly distributed load on upper edge of half-strip

Очевидно, что перемещения грани полуполосы  $y = h$  от действия этой нагрузки будут равны перемещениям грани полосы  $y = h$  от действия равномерно распределенной нагрузки  $q$  на участке  $(-b, b)$  (рис. 3) за вычетом перемещений той грани от действия самоуравновешенной нормальной нагрузки, приложенной к торцу полуполосы, и вызванных действием на полосу равномерно распределенной нагрузки  $q$  на участке  $(-b, b)$ .

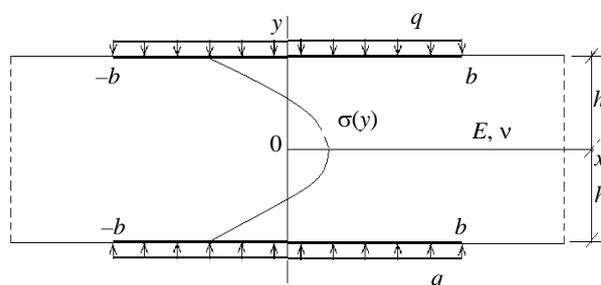


Рис. 3. Действие симметричной нагрузки на полосу

Fig. 3. Symmetrical load action on strip

Выражение для самоуравновешенной торцевой нагрузки получено на основании результатов расчетов Я. С. Уфлянда [9]

$$\sigma_x(y) = \frac{4q}{\pi} \int_0^\infty \frac{\mu \operatorname{ch} \mu - \mu \frac{y}{h} \operatorname{sh} \mu \operatorname{ch} \mu \frac{y}{h} - \operatorname{sh} \mu \operatorname{ch} \mu \frac{y}{h}}{\operatorname{sh} 2\mu + 2\mu} \times \sin \mu \frac{b}{h} d\mu. \quad (1)$$

Нетрудно проверить, что

$$\int_{-h}^h \sigma_x(y) dy = 0. \quad (2)$$

Функцию напряжений для расчета полосы с торцевой самоуравновешенной нагрузкой примем в виде [10]

$$\Phi(x, y) = \sum_{m=1}^\infty \frac{A_m \pm iB_m}{(-a_m \pm ib_m)^2} e^{\frac{(-a_m \pm ib_m)x}{h}} \quad (3)$$

$$\times \left[ \begin{array}{c} -\operatorname{tg}(-a_m \pm ib_m) \cos\left(\frac{-a_m \pm ib_m}{h} y\right) + \\ + \frac{y}{h} \sin\left(\frac{-a_m \pm ib_m}{h} y\right) \end{array} \right],$$

где  $a_m, b_m$  – корни уравнения

$$2(a_m + ib_m) + \sin(2a_m + 2ib_m) = 0. \quad (4)$$

Численные значения  $a_m, b_m$  приведены в [8, 9]. При выполнении (4) статические краевые условия на продольных гранях  $y = h$  полуполосы автоматически выполняются. Выполнение граничных условий на торце полуполосы при  $x = 0$  приводит к двум уравнениям:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = -\frac{4q}{\pi} \int_0^\infty \frac{\mu \operatorname{ch} \mu - \mu \frac{y}{h} \operatorname{sh} \mu \operatorname{sh} \mu \frac{y}{h} - \operatorname{sh} \mu \operatorname{ch} \mu \frac{y}{h}}{\operatorname{sh} 2\mu + 2\mu} \times \frac{\sin \mu \frac{b}{h} d\mu}{\mu}; \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = 0. \quad (5)$$

Умножаем обе части первого уравнения (5) на  $\cos n\pi \frac{y}{h} dy$  и интегрируем по  $y$  в пределах  $(-h, h)$ . Второе уравнение (5) умножаем на  $\sin n\pi \frac{y}{h} dy$  и интегрируем по  $y$  в пределах  $(-h, h)$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ). При этом поменяем очередность интегрирования и используем интеграл

$$\int_{-h}^h \left( \mu \operatorname{ch} \mu - \mu \frac{y}{h} \operatorname{sh} \mu \operatorname{sh} \mu \frac{y}{h} - \operatorname{sh} \mu \operatorname{ch} \mu \frac{y}{h} \right) \frac{y}{h} \cos n\pi \frac{y}{h} dy = 4(-1)^n \pi^2 \frac{\mu \operatorname{sh} \mu}{(n^2 \pi^2 + \mu^2)^2}. \quad (6)$$

Для вычисления несобственного интеграла

$$\int_0^\infty \frac{\mu \operatorname{ch} \mu - \mu \frac{y}{h} \operatorname{sh} \mu \operatorname{sh} \mu \frac{y}{h} - \operatorname{sh} \mu \operatorname{ch} \mu \frac{y}{h}}{\operatorname{sh} 2\mu + 2\mu} \times \frac{\sin \mu \frac{b}{h} d\mu}{\mu} \quad (7)$$

примем аппроксимацию [11]

$$L(\mu) = \frac{\operatorname{sh}^2 \mu}{\operatorname{sh} 2\mu + 2\mu} = \frac{1}{2} \left( 1 - e^{-\mu} - \frac{1}{2} \mu e^{-2\mu} \right). \quad (8)$$

Погрешность такой аппроксимации можно оценить по графикам на рис. 4. Следует отметить, что погрешность вычисления (7) с учетом принятой аппроксимации будет меньше погрешности аппроксимации (8) в результате интегрирования как для интегральной величины.

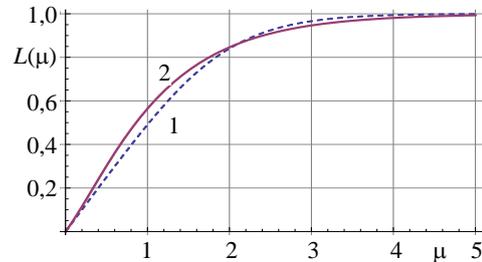


Рис. 4. Точное (1) и аппроксимированное (2) выражения для  $L(\mu)$

Fig. 4. Exact (1) and approximated (2) expressions for  $L(\mu)$

Представление (6) позволяет вычислить интеграл (7) и определить свободные члены системы линейных алгебраических уравнений (5), которая решалась способом усечения [12]. Таким образом определялись  $A_i$  и  $B_i$  в (3). По функции напряжений (3) определялись вертикальные перемещения  $V(x)$  грани  $y = h$  полуполосы от самоуравновешенной торцевой нагрузки (1).

Окончательно вертикальные перемещения грани полуполосы  $y = h$  от равномерно распределенной по участку  $(a, b)$  нагрузки  $q$  определяются формулой

$$V(x) = \frac{qh(1-\nu^2)}{\pi E} \int_0^\infty L(u) \left[ \sin\left(u \frac{b-x}{h}\right) - \sin\left(u \frac{a-x}{h}\right) \right] du + V_1(x), \quad (9)$$

где  $a, b$  – границы приложения равномерно распределенной нагрузки по грани полуполосы;  $V_1(x)$  – громоздкое выражение, которое определяет перемещения верхней грани полуполосы от торцевой самоуравновешенной нагрузки.

При определении  $V(x)$  также использовалась аппроксимация (8). На рис. 5 приведены графики вертикальных перемещений верхней грани полуполосы при некоторых положениях равномерно распределенной нагрузки на верхней грани полуполосы.

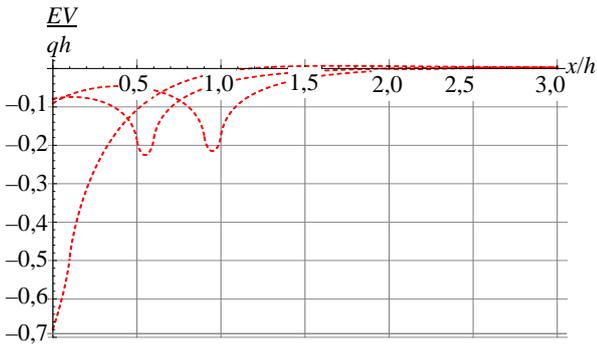


Рис. 5. Вертикальные перемещения верхней грани полуполосы при некоторых положениях равномерно распределенной по участку грани нагрузки

Fig. 5. Vertical displacements of upper edge of half-strip at some positions evenly distributed over section of load face

Рассмотрим штамп, вдавливаемый без трения вертикальной нагрузкой в верхнюю грань полуполосы (рис. 1). Ставится задача определить распределение контактных нормальных напряжений. Решим ее способом Б. Н. Жемочкина [13]. Для этого разобьем область контакта на участки равной длины и в центре каждого участка поставим жесткий стержень, через который будет осуществляться контакт штампа с полуполосой. Полученную статически неопределимую систему решаем смешанным методом строительной механики [14], приняв за неизвестные усилия в связях линейное и угловое перемещение введенного на краю штампа защемления (рис. 6).

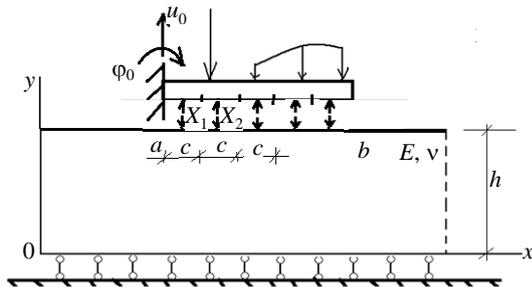


Рис. 6. Основная система смешанного метода строительной механики для расчета штампа на упругой полуполосе

Fig. 6. Basic system of mixed method on structural mechanics for die calculation on elastic half-strip

Система канонических уравнений смешанного метода строительной механики для расчета штампа имеет вид:

$$\begin{cases} \delta_{1,1}X_1 + \dots + \delta_{1,m}X_m + u_0 - \frac{c}{2}\varphi_0 = 0; \\ \dots \\ \delta_{m,1}X_1 + \dots + \delta_{m,m}X_m + u_0 - (2m-1)\frac{c}{2}\varphi_0 = 0; \quad (10) \\ -\sum_{n=1}^m X_n + R = 0; \\ \sum_{n=1}^m \frac{2n-1}{2}cX_n + Re_0 = 0, \end{cases}$$

где  $m$  – число участков Жемочкина на штампе;  $X_i$  – усилие в связи Жемочкина с номером  $i$ ;  $R, Re_0$  – равнодействующая внешней нагрузки и ее момент относительно защемления;  $\delta_{i,k}$  – перемещение центра участка Жемочкина на полуполосе с номером  $i$  от действия единичной силы, равномерно распределенной по участку с номером  $k$ .

После решения системы (10) обычными методами строительной механики определяются изгибающие моменты и поперечные силы в сечениях штампа. Особый интерес представляет случай поступательного перемещения штампа. При этом  $\varphi_0 = 0$  и в системе (10) пропадают последний столбец и последняя строка. Величина расстояния от защемления до точки приложения равнодействующей, вызывающей поступательное перемещение штампа, определится из формулы

$$e = \frac{1}{R} \sum_{n=1}^m X_n \frac{2n-1}{2}c. \quad (11)$$

На рис. 7 приведен график распределения контактных напряжений под штампом при его поступательном перемещении при  $a = 0$  и  $b = h$ . Также получено  $e = 0,6539h$ . При расчете штамп разбивался на десять участков.

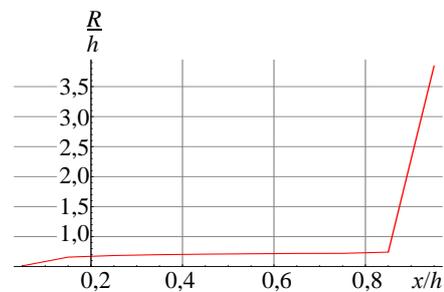


Рис. 7. Распределение контактных напряжений под штампом при его поступательном перемещении

Fig. 7. Distribution of contact stresses under stamp during its translational movement

## ВЫВОД

Предложена несложная методика расчета штампа на упругой полуполосе. Она основана на способе Б. Н. Жемочкина и позволяет рассчитывать также балки конечной жесткости, расположенные на упругой полуполосе. Для этого в выражениях для коэффициентов и свободных членов системы (10) необходимо добавить слагаемые, учитывающее изгибную жесткость балки [13]. Полученные результаты могут найти применение в машиностроении.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Развитие теории контактных задач в СССР / под ред. Л. А. Галина. М.: Наука, 1976. 496 с.
2. Ворович, И. И. Неклассические смешанные задачи теории упругости / И. И. Ворович, В. М. Александров, В. А. Бабешко. М.: Наука, 1979. 222 с.
3. Александров, В. М. Некоторые задачи о действии двух штампов на упругую полосу / В. М. Александров, В. А. Кучеров // Инженерный журнал. Механика твердого тела. 1968. № 4. С. 110–123.
4. Попов, Г. Я. Контактные задачи для линейно-деформируемого основания / Г. Я. Попов. Киев; Одесса: Вища шк., 1982. 168 с.
5. Гомилко, А. М. Метод однородных решений в смешанной задаче для полуполосы / А. М. Гомилко, В. Т. Гринченко, В. В. Мелешко // Прикладная механика. 1990. Т. 26, № 2. С. 98–108.
6. Гомилко, А. М. О методах однородных решений и суперпозиции в статических граничных задачах для упругой полуполосы / А. М. Гомилко, В. Т. Гринченко, В. В. Мелешко // Прикладная механика. 1986. Т. 22, № 8. С. 84–98.
7. Бородачев, Н. М. Плоская контактная задача для упругого тела конечной ширины / Н. М. Бородачев // Известия АН СССР. Отделение технических наук. Механика и машиностроение. 1962. № 6. С. 170–172.
8. Босаков, С. В. Контактная задача для упругой полуполосы / С. В. Босаков // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-тэхн. навук. 1997. № 4. С. 119–121.
9. Уфлянд, Я. С. Интегральные преобразования в теории упругости / Я. С. Уфлянд. Л.: Наука, 1968. 402 с.
10. Gaudon, F. A. Generalized Plane Stress in a Semi-Infinite Strip under Arbitrary End – Load / F. A. Gaudon, W. M. Shepeterd // Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences. 1964. Vol. 281, No 01385. P. 184–206. <https://doi.org/10.1098/rspa.1964.0177>.
11. Босаков, С. В. Две контактные задачи о вдавливании кольцевого штампа в упругий слой / С. В. Босаков // Проблемы вычислительной механики и прочности конструкций: сб. науч. тр. Днепр: Лира, 2019. Вып. 29. С. 9–16.
12. Канторович, Л. В. Приближенные методы высшего анализа / Л. В. Канторович, В. А. Крылов. М.; Л.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1962. 408 с.
13. Жемочкин, Б. Н. Практические методы расчета фундаментных балок и плит на упругом основании / Б. Н. Жемочкин, А. П. Синицин. М.: Стройиздат, 1962. 262 с.
14. Ржаницын, А. Р. Строительная механика / А. Р. Ржаницын. М.: Высш. шк., 1991. 439 с.

Поступила 17.03.2021

Подписана в печать 20.05.2021

Опубликована онлайн 30.09.2021

## REFERENCES

1. Galin L. A. (ed.) (1976) *Development of the Theory of Contact Problems in the USSR*. Moscow, Nauka Publ. 496 (in Russian).
2. Vorovich I. I., Aleksandrov V. M., Babeshko V. A. (1979) *Nonclassical Mixed Problems of Elasticity Theory*. Moscow, Nauka Publ. 222 (in Russian).
3. Aleksandrov V. M., Kucherov V. A. (1968) Some Problems on the Action of Two Punches on an Elastic Strip. *Inzheneryi Zhurnal. Mekhanika Tverdogo Tela = Mechanics of Solids*, (4), 110–123 (in Russian).
4. Popov G. Ya. (1982) *Contact Problems for Linearly Deformable Base*. Kiev; Odessa, Vishcha Shkola Publ. 168 (in Russian).
5. Gomilko A. M., Grinchenko V. T., Meleshko V. V. (1990) Method of Homogeneous Solutions in a Mixed Problem for a Half-Strip. *Soviet Applied Mechanics*, 26 (2), 193–202. <https://doi.org/10.1007/bf00887116>.
6. Gomilko A. M., Grinchenko V. T., Meleshko V. V. (1986) Methods of Homogeneous Solutions and Superposition in Static Boundary-Value Problems for an Elastic Half Strip. *Soviet Applied Mechanics*, 22 (8), 770–778. <https://doi.org/10.1007/bf00911331>.
7. Borodachev N. M. (1962) Plane Contact Problem for an Elastic Body of Finite Width. *Izvestiya AN SSSR. Otdelenie Tekhnicheskikh Nauk. Mekhanika i Mashinostroenie* [Izvestia of the Academy of Sciences of the USSR. Department of Technical Sciences. Mechanics and Engineering], (6), 170–172 (in Russian).
8. Bosakov S. V. (1997) Contact Problem for an Elastic Half-Strip. *Vestsi Natsyyanal'nai Akademii Navuk Belarusi. Seryya Fizika-Tekhnichnykh Navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physical-Technical Series*, (4), 119–121 (in Russian).
9. Uflyand Y. S. (1968) *Integral Transformations in Elasticity Theory*. Leningrad, Nauka Publ. 402 (in Russian).
10. Gaudon F. A., Shepeterd W. M. (1964) Generalized Plane Stress in a Semi-Infinite Strip under Arbitrary End – Load. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 281 (01385), 184–206. <https://doi.org/10.1098/rspa.1964.0177>.
11. Bosakov S. V. Two Contact Problems on the Indentation of a Ring Die into an Elastic Layer. *Problemy Vychislitel'noi Mekhaniki i Prochnosti Konstruktsii: Sb. Nauchn. Trudov = Problems of Computational Mechanics and Strength of Structures: Collection of Scientific Papers*. Dnipro, Lira Publ., 29, 9–16 (in Russian).
12. Kantorovich L. V., Krylov V. A. (1962) *Approximate Methods of Higher Analysis*. Moscow; Leningrad, State Publishing House of Physical and Mathematical Literature. 408 (in Russian).
13. Zhemochkin B. N., Sinitsin A. P. (1962) *Practical Methods for Calculating Foundation Beams and Slabs on an Elastic Foundation*. Moscow, Stroizdat Publ. 262 (in Russian).
14. Rzhantsyn A. R. (1991) *Structural Mechanics*. Moscow, Vysshaya Shkola Publ. 439 (in Russian).

Received: 17.03.2021

Accepted: 20.05.2021

Published online: 30.09.2021