

АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ ДЛЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СИСТЕМ КООРДИНАТ

Подшивалов В.П., Кузьмич В.А.

Белорусский национальный технический университет, г. Минск, Беларусь

Предлагается преобразование различных систем координат с использованием метода наименьших квадратов. Приводятся результаты анализа точности преобразования в различных случаях, которые могут иметь место на практике.

Комплексные инженерные изыскания наряду с другими включают в себя экологические [2]. Крупномасштабные топографические планы являются основой для отображения всех видов изысканий. Современные информационные и цифровые технологии картографирования существенно расширяют возможность применения баз данных в режиме реального времени. При этом, естественно, возникает проблема установления взаимосвязи разнообразных систем координат, в которых работают всевозможные ведомства в различные периоды времени. Один из возможных путей решения проблемы предлагается в нашей статье. При этом следует отметить существенный для практики факт, что здесь не нужно знать «ключей», связывающих системы координат, необходимы лишь связующие точки.

Вследствие разработки месторождений полезных ископаемых происходит деформация земной коры. Это приводит как к экологическим, так и к техническим проблемам. Происходит просадка земной поверхности, деформация пород над горными выработками и под отвалами, повышается сейсмическая активность, образуются провалы, пустоши, овраги, нарушается гидрогеологический баланс, плодородный слой почвы, происходит ее эрозия. Деформация почвенного слоя приводит к сбою процессов, происходящих в нем и, как следствие, к его деградации, истощению, что в свою очередь оставляет негативный отпечаток на сельском хозяйстве.

Деформация земной поверхности так же является одной из проблем маркшейдерско-геодезических служб горных предприятий, так как пункты маркшейдерского обоснования претерпевают значительные по величине изменения пространственных координат. В результате необходимо проводить постоянный мониторинг их положения и проверять геометрические связи между ними. Обычно при создании опорной маркшейдерской сети горного предприятия применяется условная система координат, а опорными пунктами являются пункты государственной геодезической сети. Как правило, возникает проблема установления связи между этими системами координат. Необходимы формулы и правила, по которым координаты точек одной системы можно получить в другой (такие «ключи», по разным причинам могут отсутствовать и часто оказываются труднодоступными).

По нашему мнению для решения этой задачи маркшейдерско-геодезическим службам целесообразно применять статистические методы. Одним из таковых является метод наименьших квадратов. Он представляется одним из эффективных методов, находящихся самое широкое применение. Достоинство метода наименьших квадратов в том, что он дает не только количественные вероятнейшие значения неизвестных величин, но и их интервальные оценки.

Допустим, что существует некоторая система $O'X'Y'$. Необходимо преобразовать координаты точек этой системы в другую систему OXY . Алгоритм исследования приведен в статье [1].

Зависимость между координатами точек устанавливается с помощью известных формул аналитической геометрии:

$$\begin{cases} x' = (x \cos \alpha - y \sin \alpha)m + a \\ y' = (x \sin \alpha + y \cos \alpha)m + b \end{cases} \quad (1)$$

где x' и y' - координаты системы $O'X'Y'$; x и y - координаты системы OXY ; α - угол разворота систем координат; a и b - координаты центра системы $O'X'Y'$ в системе OXY ; m - масштаб преобразования.

Так как надо найти 4 неизвестных величины: a, b, α, m центра одной системы в другой, то значения параметров преобразования находятся по двум связующим точкам, приводящим к системе из четырех уравнений вида (1), отсюда следуют их вероятнейшие приближенные значения:

$$\begin{cases} m_0 = \sqrt{\frac{\delta'_x{}^2 + \delta'_y{}^2}{\delta_x{}^2 + \delta_y{}^2}}; & \operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{\delta'_y \delta_x - \delta'_x \delta_y}{\delta'_x \delta'_x + \delta'_y \delta'_y} \\ a_0 = \frac{x'_1 + x'_2}{2} - m_0 \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \cos \alpha_0 - \frac{y_1 + y_2}{2} \sin \alpha_0 \right) \\ b_0 = \frac{y'_1 + y'_2}{2} - m_0 \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \sin \alpha_0 + \frac{y_1 + y_2}{2} \cos \alpha_0 \right) \end{cases} \quad (2)$$

где $\delta_x, \delta_y, \delta'_x, \delta'_y$ - обозначения приращений координат для двух связующих точек.

Если число связующих точек больше 2-х, то, используя принцип наименьших квадратов, находятся поправки к измеренным величинам $\Delta a, \Delta b, \Delta \alpha, \Delta m$. В результате находятся вероятнейшие значения параметров преобразования:

$$\begin{aligned}
 a &= a_0 + \Delta a \\
 b &= b_0 + \Delta b \\
 \alpha &= \alpha_0 + \Delta \alpha \\
 m &= m_0 + \Delta m
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

Далее вычисляются поправки в координаты системы $O'X'Y'$ для преобразования в систему OXY Δx_i и Δy_i :

$$\begin{cases}
 \Delta x_i = A_{xi} \Delta \alpha + B_{xi} \Delta m + \Delta a + \Delta L_{xi} \\
 \Delta y_i = A_{yi} \Delta \alpha + B_{yi} \Delta m + \Delta b + \Delta L_{yi}
 \end{cases}
 \tag{4}$$

где $A_{xi}, A_{yi}, B_{xi}, B_{yi}, L_{xi}, L_{yi}$ – обозначения, приводящие уравнения, правые части которых разложены по формуле Тейлора, системы (1), к стандартному виду параметрических уравнений.

В завершении вычисляются вероятнейшие значения координат условной системы в системе OXY . Статистическая оценка производится с помощью стандартов:

$$\begin{aligned}
 \mu &= \sigma_{xy} = \sqrt{\frac{\sum_1^n (\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2)}{2(n-1)}} \\
 \sigma_\alpha &= \mu \sqrt{\sum_1^n (A_{xi}^2 + A_{yi}^2)} \\
 \sigma_m &= \mu \sqrt{\sum_1^n (B_{xi}^2 + B_{yi}^2)} \\
 \sigma_a &= \mu \sqrt{n} \\
 \sigma_b &= \mu \sqrt{n}
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

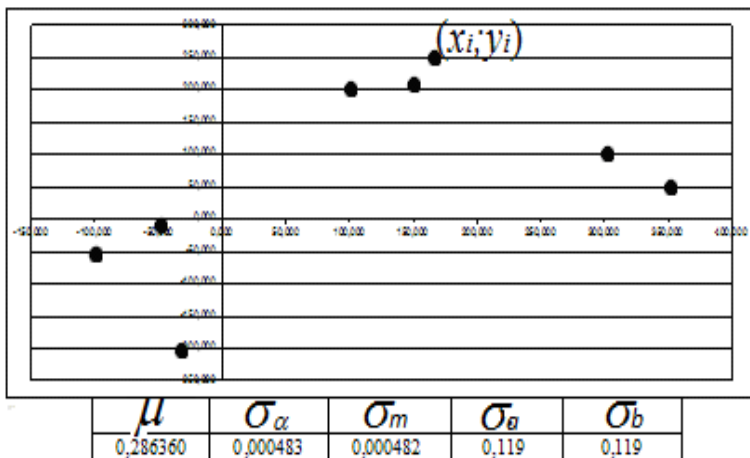
Исследования проведены на моделях, вычисления выполнены в программе Excel.

Сначала было рассмотрено 8, затем 16 пунктов с известными координатами в системе OXY (рис. 1).

Были взяты точные параметры преобразования m, a, b, α , относительно которых вычислили точные значения координат данных пунктов в условной системе $O'X'Y'$. С помощью генератора случайных чисел исказили эти значения. По предложенному методу нашли приближенные значения параметров преобразования, затем вероятнейшие поправки в координаты и, после введения этих поправок в искаженные значения координат в систе-

му $O'X'Y'$, получили вероятнейшие значения координат условной системы для преобразования в систему OXY .

а)



б)

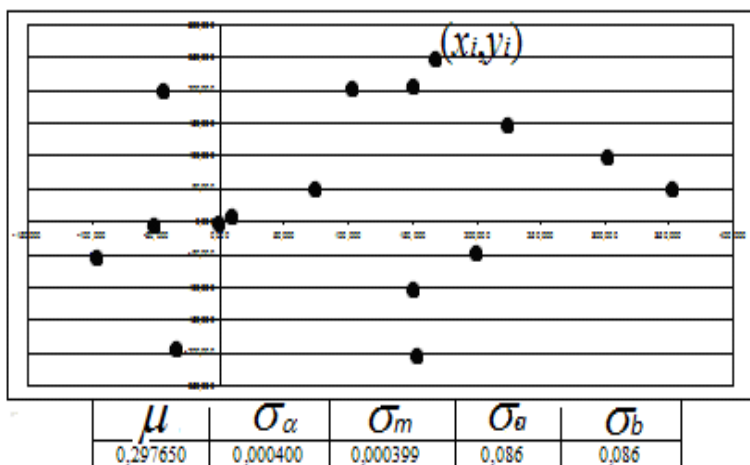
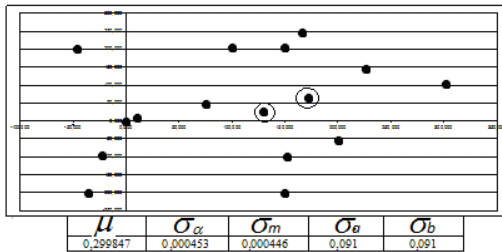


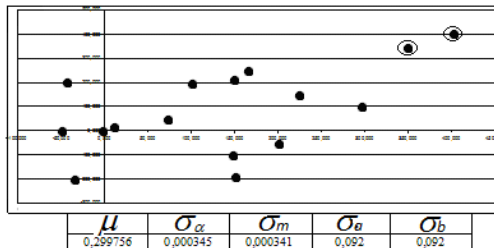
Рис.1. Расположение пунктов в системе OXY
а) 8 пунктов; б) 16 пунктов

Рассматривали различные положения связующих пунктов (и близкое и далекое относительно друг друга и остальных пунктов) (рис. 2).

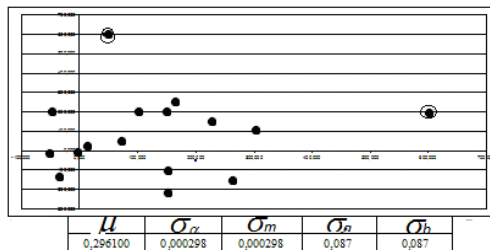
а)



б)



в)



г)

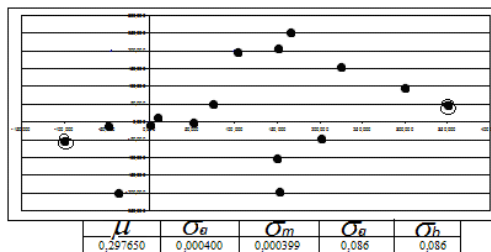


Рис. 2. Расположение двух связующих точек относительно остальных пунктов системы ОХУ

Результат исследования приведен в табл. 1 и 2.

Таблица 1 – Результат исследования

Рассматриваемые случаи	Значения параметров преобразования			
	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>m</i>	α
а	точные			
	1000,000	1500,000	1,000000	0°12'00"
	приближенные			
	999,775	1500,521	0,998920	0°08'39"
	вероятнейшие			
	999,989	1500,045	0,999896	0°11'00"
б	точные			
	1000,000	1500,000	1,000000	0°12'00"
	приближенные			
	1000,191	1500,034	0,996796	0°10'47"
	вероятнейшие			
	1000,020	1500,027	0,999755	0°11'20"
в	точные			
	1000,000	1500,000	1,000000	0°12'00"
	приближенные			
	1005,130	1502,397	0,980012	0°24'47"
	вероятнейшие			
	999,996	1500,009	0,999988	0°11'36"
г	точные			
	1000,000	1500,000	1,000000	0°12'00"
	приближенные			
	1002,034	1500,445	0,973119	0°13'22"
	вероятнейшие			
	999,993	1500,013	1,000025	0°11'27"

Таблица 2 – Вероятнейшие ошибки параметров связи

Рассматриваемые случаи	Ошибки параметров преобразования			
	a , м	b , м	m	α , ° ' "
а	до обработки			
	0,225	0,521	0,001080	0°03'21"
	после обработки			
	0,011	0,045	0,000104	0°01'00"
б	до обработки			
	0,191	0,034	0,003204	0°01'13"
	после обработки			
	0,020	0,027	0,000245	0°00'40"
в	до обработки			
	5,130	2,397	0,019988	0°12'47"
	после обработки			
	0,004	0,009	0,000012	0°00'24"
г	до обработки			
	2,034	0,445	0,026881	0°01'22"
	после обработки			
	0,007	0,013	0,000025	0°00'33"

Проведенные исследования позволили сделать следующие выводы:

1. Работает известный принцип метода наименьших квадратов применительно к данной ситуации. Значительно приближаются искаженные значения параметров преобразования и координат пунктов к истинным.
2. Существенное увеличение числа связующих пунктов не оказывает значительного влияния на точность преобразования.
3. Расположение связующих точек влияет на значения поправок к координатам и параметрам преобразования. Чем дальше удалены связующие пункты друг от друга по координатам, тем точнее параметры преобразования и ближе к истинным значения координат пунктов.

Литература

1. Подшивалов, В. П. Оценка параметров преобразования координат на плоскости методом наименьших квадратов / В. П. Подшивалов // Автоматизированные технологии изысканий и проектирования. – М., 2010. - № 7. – С. 69-71
2. Подшивалов В.П. О проблемах комплексных инженерных изысканий при переходе к использованию современных научно-технических возможностей / В.П. Подшивалов, А.С. Назаров // Инженерные изыскания – М., 2010. - № 11. – С. 60-62