

**Применение теории оптимизации
в уравнительных вычислениях**

Гармаза О.Е.

Белорусский национальный технический университет

При изучении проблем экономики, планирования, управления, организации производства и др. все более широкое применение находит новое научное направление, получившее название "исследование операций"[1].

При решении тех или иных задач каждое операционное исследование последовательно проходит три основных этапа:

1. постановка задачи и построение математической модели изучаемого процесса или явления;
2. анализ полученной модели и нахождение метода решения;
3. реализация найденного решения и результатов исследований на практике.

Во многих случаях процесс формализации задачи осуществляется путем выбора соответствующего критерия эффективности решения, определяющегося целевой функцией

$$\phi = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (1)$$

и системой ограничений

$$a_k \leq \psi_k(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_k, \quad k = 1, q, \quad (2)$$

где x_i - параметры, являющиеся неизвестными при поиске оптимального решения; a_k, b_k - некоторые постоянные.

Большой класс геодезических задач, связанных с оптимальным планированием работ, проектированием геодезических сетей, разработкой рациональных методов обработки измерений и др., решается одним из математических аппаратов теории исследования операций методом математического программирования. Этот метод включает линейное, нелинейное, динамическое программирование и отличается от непосредственного программирования на ЭВМ, но без ЭВМ, как правило, не используется.

Если показатель эффективности (1) является линейной функцией независимых переменных x_i и ограничения (2), определяющие область допустимых значений переменных, представляют собой линейные зависимости, то такие задачи решаются методами линейного программирования. Область его применения в геодезии разнообразна - создание проектов полевых геодезических работ; поиск оптимальных высот геодезических знаков; уравнивательные вычисления и др.

Математический аппарат линейного программирования для уравнивательных вычислений используется в основном при реализации метода наименьших модулей.

На возможность применения в определенных условиях метода наименьших модулей указывал еще Лаплас, в 1757 г. Боскович и в 1887 г. Эджворт. Но лишь в настоящее время в связи с внедрением быстродействующих ЭВМ появились реальные предпосылки для привлечения этого метода к решению практических задач.

Известно, что широкий класс экстремальных задач решается с помощью нелинейного программирования, рассчитанного на тот случай, когда критерий эффективности (1) и (или) ограничения (2) выражаются нелинейными зависимостями от параметров x_i . При этом, исходя из типа задачи, используют методы: выпуклое, квадратичное, сепарабельное, стохастическое и целочисленное программирование.

Если при поиске экстремума критериальной функции предусматриваются многоэтапные процессы, изменяющиеся во времени, то применяется динамическое программирование. Задачи этого типа имеют важное значение, например, при уравнивании геодезических сетей, когда необходимо учитывать их многоэтапную структуру.

Сепарабельное программирование является в некотором смысле модифицированным методом линейного программирования, когда критериальная функция (1), как и ограничения (2), представлены в виде суммы линеаризованных функций только одной переменной.

Стохастическое программирование применяется в тех случаях, когда при поиске оптимального решения существенную роль играют случайные факторы. Здесь целевая функция представля-

ет собой некоторую числовую характеристику случайной функции параметров.

Наибольшее применение в практике геодезических вычислительных работ получили методы квадратичного программирования, рассчитанные на те случаи, когда целевая функция (1) квадратична, а ограничения, которых может и не быть линейны. Если рассматривается задача по отысканию экстремума квадратичной формы без ограничений (2), то оптимизация выполняется по методу наименьших квадратов, являющемуся частным случаем квадратичного программирования. Академик Л.В.Канторович впервые указал на возможность применения квадратичного программирования при математической обработке наблюдений. В настоящее время при решении геодезических экстремальных задач используют квадратичное программирование главным образом для оптимального проектирования и уравнивания геодезических сетей.

Н.А. Тараничев один из первых предложил выполнять уравнивание геодезических сетей путем минимизации квадратичной формы способом Ньютона без составления и решения системы нормальных уравнений. В этом методе исходные нелинейные уравнения, связывающие результаты измерений с искомыми параметрами, линеаризуются с помощью разложения уравнений в ряд Тейлора. Поскольку линеаризация и решение системы линейных уравнений выполняется на каждой итерации, то в качестве начальных неизвестных (координат определяемых пунктов) используются достаточно грубые их значения, выбранные с карты или схемы.

Применение квадратичного программирования для уравнивания геодезических сетей не ограничивается на использовании метода Ньютона. Существуют и другие методы минимизации квадратичной формы, различающиеся по характеристикам эффективности их применения. Например, М.В.Красикова, Л.Грюндич и К.Линквиц и др. применили для решения систем линейных уравнений методом сопряженных градиентов. Х.И.Тимов использовал для тех же целей способ Д.Била.

Методы уравнивания, основанные на теории математического программирования обладают следующими положительными особенностями:

1. В методах математического программирования рассматриваются решения оптимизационных задач с ограничениями линейного и нелинейного характера в виде равенств или неравенств. Согласно исследованиям В.Г. Назаренко, уравнивание высокоточных геодезических сетей методом квадратичного программирования на основе принципа наименьших квадратов с учетом ограничений на величины поправок в результаты измерений обеспечивает лучшее согласование поправок с их истинными значениями.

2. Методы квадратичного программирования позволяют выполнять решение больших систем уравнений вычислительными алгоритмами, наиболее приспособленными к их реализации на ЭВМ.

3. Методы нелинейного программирования позволяют выполнять решение системы нелинейных уравнений без линеаризации исходных параметрических уравнений. В результате предварительные значения параметров в большинстве случаев могут быть получены без привлечения дополнительных сведений о геодезической сети. Последнее позволяет сократить объем исходной информации и способствует повышению качества программ, составленных для ЭВМ.

4. Методами нелинейного программирования возможно уравнивание геодезических сетей не только по методу наименьших квадратов, но и другим способом в соответствии с выбранной критериальной функцией.

Литература

1. Аоки М. Введение в методы оптимизации. Основы и приложения нелинейного программирования. Перевод с английского.- М.: 1977. –343 с.
2. Мицкевич В.И., Абу Дака Имад. Оценка точности пространственных засечек методами нелинейного программирования // Геодезия и картография.- 1994. - №1.-С. 22-24.
3. Мицкевич В.И., Ялтыхов В.В. Уравнивание и оценка точности геодезических засечек под различными критериями оптимальности решения // Геодезия и картография. – 1994, - №7. – С.14-16.