УДК [624:539.3]:004.02

Оптимизация статически неопределимой фермы методом сокращения ресурсов на прочность

Шевчук Л.И., Вербицкая О.Л.
Белорусский национальный технический университет

Статически неопределимые конструкции, в частности статически неопределимые фермы, нашли широкое применение в строительстве. Такие конструкции отличаются экономичностью и обладают способностью приспособляемости. Однако, расчет статически неопределимых конструкций и получение рациональных проектных решений гораздо более трудоемкие чем расчет статически определимых систем. Поэтому для получения рациональных статически неопределимых конструкций требуется применять специальные методы оптимизации. Одним из таких эффективных методов является метод сокращения ресурсов [1].

Рассматривается задача оптимизации плоской статически неопределимой стержневой системы (фермы). В качестве целевой функции принята масса фермы.

$$G(\vec{A}) = \min G(\vec{A}), \qquad \vec{A} \in R_n, \tag{1}$$

где $\vec{A}$ – вектор параметров оптимизации, в качестве которых приняты площади поперечных сечений элементов фермы.

$$\vec{A} = \left(A_1, A_2, \ldots, A_n\right)^T, \tag{2}$$

n – число элементов в ферме.

Приняты конструктивные ограничения для площади поперечных сечений элементов фермы

$$A_i \geq A_{\lim}, \qquad i = 1,2,\ldots,n, \tag{3}$$

где $A_{\lim}$ – конструктивно минимально допустимая площадь поперечного сечения элемента фермы.

Кроме того, ставятся ограничения по прочности

$$\sigma_{adm} - |\sigma_i| \geq 0, \tag{4}$$

где σ_{adm} – допускаемое напряжение в элементе фермы.

Для расчета взята статически неопределимая ферма с крестообразной решеткой. Ферма состоит из шести панелей верхнего пояса, шести панелей нижнего пояса, семи стоек и двенадцати раскосов. Статический расчет фермы выполняется методом конечных элементов [2].

Узлы конечного элемента могут смещаться только в горизонтальном и вертикальном направлениях. Поэтому элемент имеет четыре степени свободы. Из таких элементов строится конечно-элементная модель статически неопределимой фермы. Элементы соединяются друг с другом и с опорами шарнирами. Полагаем, что материал фермы деформируется по закону Гука. Нагрузка собирается в равнодействующие силы и прикладывается к узлам верхнего пояса фермы. В результате расчета определяются значения продольных сил и напряжений в сечениях элементов фермы.

При проведении численных исследований поперечные сечения элементов фермы приняты в виде кольца с наружным диаметром равным d и толщиной кольца $t = 0.1d$.
Момент инерции, радиус инерции и гибкость стержня могут быть выражены через площадь поперечного сечения.

$$d^2 = \frac{A}{0.2826}. \tag{5}$$

$$J_x = J_y = 0.02897\left(\frac{A}{0.2826}\right)^2 = 0.3627A^2. \tag{6}$$

$$i_x = i_y = \sqrt{\frac{J_x}{A}} = \sqrt{\frac{0.3627A^2}{A}} = 0.6023\sqrt{A}. \tag{7}$$

$$\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_x} = \frac{1 \cdot l}{0.6023\sqrt{A}} = \frac{l}{0.6023\sqrt{A}} \tag{8}$$

где μ – коэффициент приведения, равный $\mu = 1$, так как принято шарнирное закрепление стержней фермы в ее узлах; l – длина элемента.

Как показывают расчеты, часть элементов фермы (элементы нижнего пояса, некоторые стойки и раскосы) испытывают растяжение, а часть – сжатие. Независимо от этого условие прочности выражаем одной общей формулой

$$\sigma = \frac{N}{A} \le \sigma_{adm}, \tag{9}$$

где N – растягивающая продольная сила в элементе; A – площадь поперечного сечения элемента; σ_{adm} – допускаемое напряжение, принимаемое в зависимости от того, растянут или сжат стержень, а также от его гибкости (10). Если используются формула Эйлера или Ясинского, то вводится коэффициент запаса.

$$\sigma_{adm} = \begin{cases} R, & N > 0; \\ 3.5761\dfrac{EA}{k_{rezw}l^2}, & N < 0;\ \lambda \ge 100; \\ a - 1.660\dfrac{bl}{k_{rezw}\sqrt{A}}, & N < 0;\ 50 < \lambda < 100; \\ R, & N < 0;\ \lambda \le 50, \end{cases} \tag{10}$$

где k_{rezw} – коэффициент запаса прочности, $k_{rezw} > 1$.

Оптимизация фермы выполняется методом сокращения ресурсов прочности. Предполагаем, что требуемая по условию прочности площадь поперечного сечения элементов фермы на каком-то малом отрезке обратно пропорциональна напряжению в этом элементе. Тогда

$$\frac{\sigma}{\sigma_{adm}} = \frac{A_*}{A}. \tag{11}$$

Отсюда выражаем требуемую площадь сечения элемента при использовании полного ресурса прочности

$$A_* = \frac{\sigma}{\sigma_{adm}} A, \tag{12}$$

где A_* – проектируемая площадь сечения рассматриваемого элемента; A – фактическая площадь сечения элемента; σ_{adm} – допускаемое напряжение; σ – расчетное напряжение в элемента.

Однако, зависимость (12) не является точной, так как не учитывается влияние других элементов фермы на усилие в рассматриваемом элементе в связи с тем, что ферма статически неопределимая. Поэтому для планирования площадей поперечных сечений стержней фермы в очередном приближении использовать полный ресурс прочности "опасно". В этом случае следует применять релаксацию площадей поперечных сечений стержней фермы на очередном приближении (13).

$$A_{**} = A\left[1+\omega\left(\frac{|\sigma|}{\sigma_{adm}}-1\right)\right], \tag{13}$$

где A – площадь поперечного сечения рассматриваемого стержня фермы на текущем приближении; A_{**} – прогнозируемая площадь поперечного сечения рассматриваемого стержня, полученная с использованием релаксации для последующего приближения; ω – множитель релаксации, который может принимать значения $0 \le \omega \le 1$.

На основе приведенных расчетных формул разработан алгоритм и составлена компьютерная программа на алгоритмическом языке Pascal (Delphi-7). Выполнен оптимизационный расчет статически неопределимой фермы с параллельными поясами и крестообразной решеткой. Были приняты следующие исходные данные: начальная площадь поперечного сечения элементов фермы $A_i = 64\,см^2$; модуль упругости материала $E = 200\,ГПа$; расчетное сопротивление $R = 210\,МПа$; нагрузка на узлы верхнего пояса $F = 96\,кН$; конструктивное ограничение площади поперечного сечения $A_{\lim} = 5\,см^2$; множители релаксации $\omega = 0.3,\ 0.5,\ 0.7$; максимальное количество приближений $m_{it} = 10$.

Для оценки скорости сходимости последовательности приближений при поиске оптимального решения использовались множители релаксации различного значения – 0.3, 0.5 и 0.7. При этом задавалось различное количество приближений. По полученным результатам построены графики зависимости оптимальной массы фермы от числа приближений. Анализ этих зависимостей показывает, что во всех случаях наблюдается стабильный сходящийся процесс. При этом скорость сходимости существенно зависит от множителя релаксации. Медленнее всего процесс приближений сходится при множителе релаксации равном 0.3. Оптимальное решение достигается при десяти итерациях. Быстрее всего последовательность приближений сходится, если использован множитель релаксации равный 0.7. Для получения фермы с оптимальными параметрами в этом случае достаточно трех итераций.

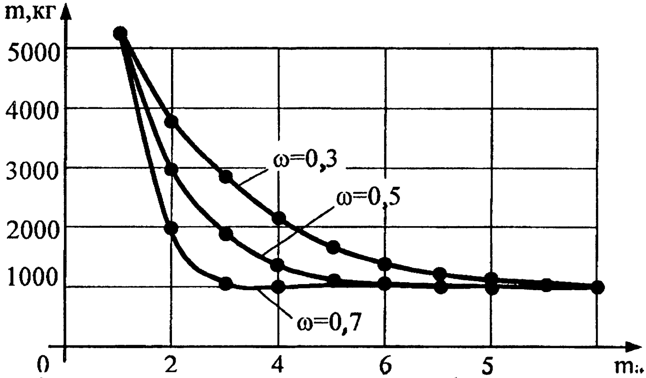

График изменения массы оптимальной фермы в зависимости от количества приближений и значения множителя релаксации

В результате проведенных исследований разработан алгоритм метода сокращения ресурсов прочности фермы, построенной из стержней кольцевого поперечного сечения, и получены основные расчетные формулы. Установлено, что последовательность приближений процесса поиска оптимального решения очень быстро сходится. Чтобы получить приемлемые для практического применения результаты достаточно выполнить не более 8-10 приближений.

Литература

1. Габасов Р., Кирилов Ф.М. Методы оптимизации. Минск: Изд-во БГУ, 1975. – 278 с.

2. Вербицкая О.Л. Моделирование сплошной изотропной прямоугольной плиты шарнирно-стержневой системой//Актуальные проблемы расчета зданий, конструкций и их частей: теория и практика. Материалы межд. н.-т. конф. – Минск, 2002. – С.56–64.