

Министерство образования Республики Беларусь
БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра
«Теоретическая механика и механика материалов»

Л.Е. Реут

**УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ ЭЛЕМЕНТОВ
КОНСТРУКЦИЙ**

Учебно-методическое пособие
для студентов машиностроительных специальностей

Электронное учебное издание

Минск – БНТУ – 2021

Реут Л.Е.

Устойчивость сжатых элементов конструкций: учебно-методическое пособие для студентов машиностроительных специальностей (электронное учебное издание) / Л.Е. Реут. – Минск: БНТУ, 2021. – 69 с.

Рецензенты:

доктор технических наук, профессор, зам. генерального директора по научной работе Государственного научно-производственного объединения порошковой металлургии **Е.Е. Петюшик**;

кандидат технических наук, доцент, декан факультета информационных технологий и робототехники Белорусского национального технического университета **А.М. Авсевич**

Электронное учебное издание представляет собой пособие по дисциплине «Механика материалов» и рассматривает один из важных разделов курса, посвященный вопросу устойчивости элементов конструкций под действием сил и их расчету на устойчивость. Помимо расчетов деталей на прочность и жесткость, которые для многих элементов являются основными и базовыми расчетами, существует большое количество деталей, для которых важным фактором их надежной работы является устойчивость. Эти детали, имея достаточную прочность и жесткость, разрушаются, как правило, от потери устойчивости и поэтому для них расчет на устойчивость является главным и иногда единственно необходимым расчетом. Устойчивость предполагает способность элементов сохранять под нагрузкой первоначальное положение или первоначальную равновесную форму в деформированном состоянии, а потеря устойчивости связана с нарушением равновесия при внешних или внутренних воздействиях и невозможностью конструкции или отдельных ее элементов сопротивляться действующей нагрузке. В пособии подробно представлен теоретический аспект темы, а также предложен набор практических инженерных задач с решениями, анализом, пояснениями и методическими рекомендациями.

Учебное пособие предназначено для студентов всех технических специальностей дневной и заочной форм обучения высших технических учебных заведений, а также для преподавателей при подготовке к лекционным и практическим занятиям.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ	5
1. Устойчивое и неустойчивое равновесие. Общее понятие	5
2. Определение критической силы. Задача Эйлера	9
3. Влияние условий закрепления концов стержня на величину критической силы	15
4. Критические напряжения. Пределы применимости формулы Эйлера	18
5. Расчет стержней на устойчивость. Проверочные и проектировочные расчеты	23
6. Материалы и рациональные формы сечений на устойчивость	27
7. Продольно-поперечный изгиб	29
ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ	38
 Литература	 69

ВВЕДЕНИЕ

Основными расчетами в механике материалов являются расчеты на *прочность*, *жесткость* и *устойчивость*. Эти расчеты определяют механическое поведение элементов конструкций в условиях силового воздействия, являются базовыми и лежат в основе науки о сопротивлении материалов. Прочность предполагает способность элемента под действием внешних сил не разрушаться или не получать остаточные деформации. Поэтому в пластичных материалах потеря прочности связана с наступлением текучести, т.е. появлением в детали пластических деформаций, в хрупких материалах потеря прочности проявляется как хрупкое разрушение и нарушение целостности детали. Потеря жесткости связана с деформацией элементов, когда изменение размеров превышает по величине допустимые технические нормы. В результате, потеря прочности или жесткости приводит к нарушению работы элемента и работоспособности конструкции в целом, поэтому расчеты на прочность и жесткость для большинства инженерных конструкций являются основными и достаточными. Однако на практике существует большое число деталей, для которых важным фактором надежного функционирования является устойчивость. Эти детали, имея достаточную прочность и жесткость, разрушаются, как правило, *от потери устойчивости* и поэтому для них расчет на устойчивость является главным и иногда единственно необходимым расчетом. Устойчивость конструкции или отдельного ее элемента предполагает способность при внешних или внутренних воздействиях сохранять первоначальную равновесную форму в деформированном состоянии (*устойчивость первого рода*) или сохранять первоначальное положение в целом без появления новых деформаций (*устойчивость второго рода*). Потеря устойчивости равновесной формы в деформированном состоянии определяется невозможностью конструкции или элемента сопротивляться действующей нагрузке, а потеря устойчивости положения связана с нарушением равновесия конструкции в целом и полной потерей ее несущей способности. Потеря устойчивости – это опасное явление, требующее необходимого прогнозирования и соответствующих расчетов, поэтому вопросы устойчивости составляют один из главных разделов курса сопротивления материалов.

Данное пособие представляет собой одну из книг цикла электронных пособий по изучению дисциплины «Механика материалов». Здесь подробно представлен теоретический аспект темы, а также предложен набор практических инженерных задач с решениями, пояснениями и методическими рекомендациями.

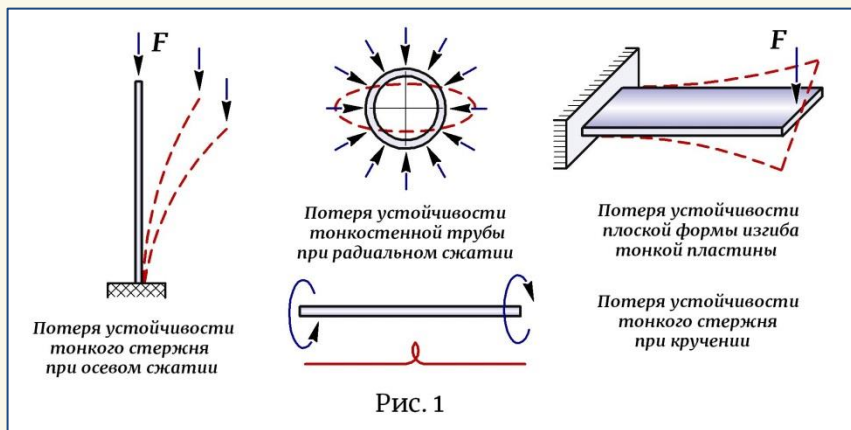
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

1. Устойчивое и неустойчивое равновесие.

Общее понятие

При изучении вопроса устойчивости элементов конструкций и сооружений различают два вида потери устойчивости, которые соответственно называются как «*потеря устойчивости первого и второго рода*». Потеря устойчивости *первого рода* – это потеря устойчивости равновесной формы элемента, находящегося в деформированном состоянии. В этой ситуации могут внезапно возникнуть новые виды деформаций, сопровождающиеся большими перемещениями, которые при незначительном увеличении нагрузки неограниченно возрастают и приводят в конечном итоге к разрушению элемента и нарушению работоспособности всей конструкции. Потеря устойчивости *второго рода* связана с потерей устойчивости положения всей системы и изменением ее состояния даже без появления новых деформаций, что приводит к полной потере несущей способности всей конструкции. Вопросами устойчивости второго рода занимается строительная механика, а вопросы деформации элементов и возможная при этом потеря устойчивости рассматриваются в механике материалов.

Потеря устойчивости может наступить при самых разных видах нагружения – при сжатии (продольном и радиальном), кручении, изгибе (рис. 1), а также комбинации деформаций, при этом подвержены потере устойчивости, главным образом, тонкостенные элементы и элементы большой длины.



Потеря устойчивости, как видно из рис. 1, при всех видах нагружения связана с изменением формы элемента, откуда вытекает определение понятия «устойчивость»:

УСТОЙЧИВОСТЬ – это способность элементов конструкций под нагрузкой сохранять первоначальную равновесную форму, а потеря этой формы называется **ПОТЕРЕЙ УСТОЙЧИВОСТИ**.

Задачи на устойчивость являются достаточно сложными и их решение возможно только методами теории упругости с применением сложного математического аппарата. В механике материалов рассматривается только один, наиболее простой с математической точки зрения, вариант – *потеря устойчивости при сжатии*, который позволяет получить относительно простые расчетные формулы, удобные для инженерных расчетов. Поэтому именно этому вопросу – *устойчивость элементов при сжатии* – посвящено настоящее пособие.

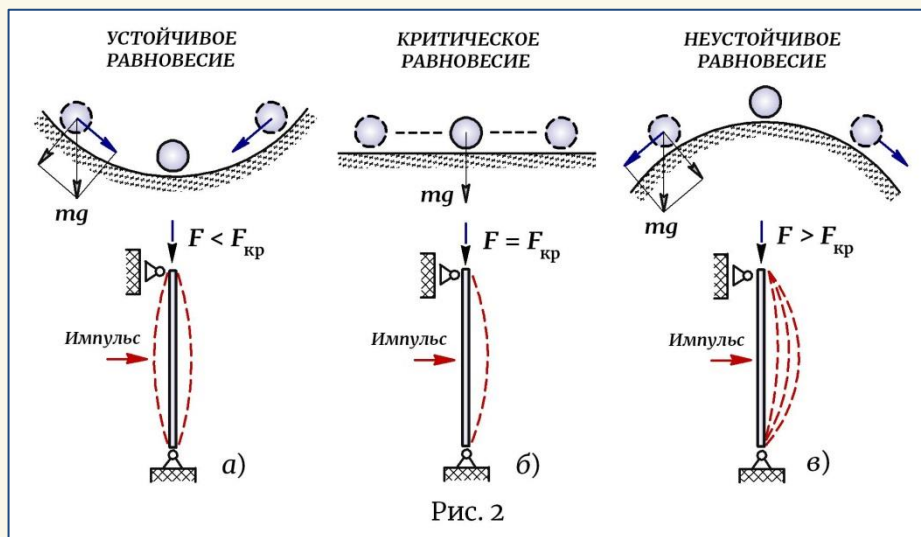
Потеря устойчивости в инженерных конструкциях и сооружениях – серьезное и опасное явление. Опасность заключается в том, что потеря устойчивости возникает внезапно, резко и протекает в течение нескольких секунд, не оставляя возможности предотвратить разрушение и спасти конструкцию. Потеря устойчивости почти всегда носит характер *катастрофичности*. И самая большая опасность заключается в том, что происходит потеря устойчивости при очень незначительных напряжениях, когда запас прочности элемента далеко не исчерпан и когда в нем нет никаких признаков появления текучести или хрупкого разрушения.

Но между тем, многие элементы, работая в одинаковых условиях, одни теряют устойчивость, а другие в такой же ситуации опасности потери устойчивости не подвержены. И тогда возникает вопрос – от чего происходит потеря устойчивости и с чем связано это явление?

Будет потеряна устойчивость или нет – это зависит от того, в каком равновесном состоянии находится элемент, а равновесие бывает — **УСТОЙЧИВОЕ**, **НЕУСТОЙЧИВОЕ** и **КРИТИЧЕСКОЕ**. Рассмотрим виды равновесных состояний на модели шарика, лежащего на поверхности, и проведем аналогию его поведения для сжатого стержня (рис. 2).

В первом случае (рис. 2, *а*) шарик находится в *устойчивом равновесии*, так как выведенный из положения равновесия, он способен после некоторого раскачивания самостоятельно вернуться к исходному состоянию. Во втором случае (рис. 2, *б*) шарик находится в *критическом равновесии*, так как будучи выведенным из первоначального положения равновесия, самостоятельно вернуться к нему он не способен, но

потеряв начальное положение равновесия, он находит другое, новое положение равновесия, в котором может оставаться бесконечно долго до получения следующего импульса. В случае **неустойчивого равновесия** (рис. 2, в), как только оно будет потеряно, шарик никогда не вернется к начальному состоянию и никогда не приобретет новое положение равновесия, в котором он мог бы какое-то время относительно устойчиво существовать. Таким образом, состояние равновесия будет **устойчивым**, если при любом отклонении системы от положения равновесия возникают силы, стремящиеся вернуть ее в первоначальное положение, и соответственно, **неустойчивым**, если эти силы будут стремиться удалить ее от начального положения (рис. 2, а, в). В **критическом равновесии**, называемом **безразличным**, силы, стремящиеся вернуть систему к положению равновесия или удалить от этого положения отсутствуют (рис. 2, б).



По такой же аналогии работают элементы, сохраняющие или теряющие устойчивость:

★ Если элемент находится в **устойчивом равновесии** (рис. 2, а), то будучи выведенным из положения равновесия, он способен после некоторых колебаний самостоятельно вернуться к исходной равновесной форме. В любом работающем механизме, где детали взаимодействуют друг с другом и постоянно испытывают толчки, удары, прикосновения и т.д., всегда есть вероятность возникновения импульса, способного вывести элемент из положения равновесия. И если сжатый стержень находится в **устойчивом равновесии**, он способен после

устранения воздействия сохранить прямолинейную равновесную форму и продолжать выполнять свои функции по назначению.

★ Если элемент находится в *неустойчивом равновесии* (рис. 2, в), то потеря устойчивости даже после снятия внешнего импульса приведет к быстрому самопроизвольному нарастанию деформаций и разрушению детали. В любом работающем механизме *неустойчивое равновесие* не может существовать долго, оно неминуемо будет потеряно и элемент разрушится.

★ *Критическое (безразличное) равновесие* (рис. 2, б) является промежуточным состоянием, когда происходит нарушение первоначальной равновесной формы, но деталь при этом не разрушается, а переходит в другое равновесное состояние, т.е. прямолинейную равновесную форму изменяет на криволинейную. Некоторые детали, изменив равновесную форму, способны работать и выполнять свои функции, но большинство элементов после потери устойчивости уже не могут функционировать, что соответствует разрушению элемента. Поэтому *критическое равновесие* следует рассматривать как предельное состояние элемента, предшествующее потере устойчивости.

Свойство элемента находиться в том или ином равновесном состоянии зависит от многих факторов и, в значительной степени, от величины нагрузки, действующей на элемент. Для тонких сжатых стержней, если сжимающая сила невелика, то любая попытка вывести элемент из состояния равновесия приведет к тому, что после некоторых колебаний он снова вернется к исходной первоначальной форме. Если сжимающую силу увеличивать, то наступит такой момент, когда стержень, выведенный из состояния равновесия, даже после устранения импульса уже не вернется в свою первоначальную форму. Он не разрушится, но примет новую, криволинейную равновесную форму. И наконец, если сжимающую силу увеличить еще больше, элемент, выведенный из равновесия, будет самопроизвольно изгибаться до тех пор, пока не разрушится.

Следовательно, существует некоторое предельное значение силы, при которой элемент находится на грани между *устойчивым* и *неустойчивым* состоянием, т.е. в *критическом равновесии* —

|| *Сила, при которой элемент находится в критическом равновесии и превышение которой переводит элемент из устойчивого в неустойчивое равновесие, называется КРИТИЧЕСКОЙ СИЛОЙ ($F_{кр}$).*

КРИТИЧЕСКАЯ СИЛА — это минимальная сила, при которой стержень теряет устойчивость, и для элементов, подверженных потере устой-

чивости, расчеты сводятся к определению этой силы, по величине которой оценивается способность элемента к сохранению устойчивости в заданных условиях работы. Если сила $F < F_{кр}$, элемент устойчив и его безопасная работа обеспечена (рис.2, а); если сила $F = F_{кр}$ – элемент находится в предельном состоянии с высокой вероятностью потери устойчивости (рис.2, б); если сила $F > F_{кр}$ – элемент находится в неустойчивом состоянии и потеря устойчивости для него эквивалентна разрушению (рис.2, в).

Таким образом, в расчетах на устойчивость главным ориентиром и оценочной величиной является сила $F_{кр}$. И чтобы устойчивость была обеспечена, при проектировании деталей рабочая нагрузка не должна достигать значения $F_{кр}$ и даже с запасом быть меньше этой силы.

Поэтому в расчет вводится *допускаемая сила на устойчивость* $[F]_{уст}$, определяемая как –

$$[F]_{уст} = \frac{F_{кр}}{n_{уст}}, \quad (1)$$

где $n_{уст}$ – коэффициент запаса устойчивости, равный – для стали $n_{уст} = 1,8 \div 3,5$; для чугуна $n_{уст} = 4,5 \div 5,5$; для дерева $n_{уст} = 2,8 \div 3,2$.

Тогда условие устойчивости имеет вид:

$$F_{max} \leq [F]_{уст}, \quad (2)$$

где F_{max} – максимальная рабочая нагрузка, безопасная для элемента.

2. Определение критической силы. Задача Эйлера

Впервые задача определения критической силы для шарнирно опертого по концам сжимаемого призматического стержня была решена великим физиком и математиком Леонардо Эйлером в середине XVIII века и поэтому ее часто называется «задачей Эйлера».

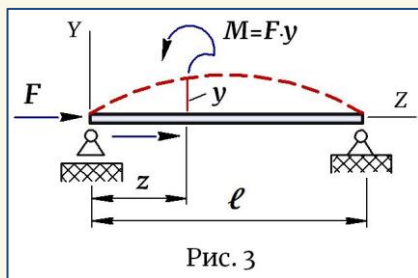


Рис. 3

Рассмотрим сжатый стержень и определим для него критическую силу, опираясь на логику и рассуждения Леонардо Эйлера.

Предположим, что под действием сжимающей силы F (рис. 3) стержень теряет устойчивость и изгибается. Однако после искривления деформации далее не нарастают и стержень принимает новую криволинейную равновесную форму. Это означает, что стержень находится в *критическом равновесии* и сжимающая его сила соответствует значению $F = F_{кр}$.

|| *Искривление стержня в случае потери устойчивости при сжатии называется ПРОДОЛЬНЫМ ИЗГИБОМ.*

Для решения задачи и вывода формулы для $F_{кр}$ Эйлер использовал *основное дифференциальное уравнение изогнутой оси балки для малых деформаций*, полученное для случая поперечного изгиба, —

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{M_{изг}}{EI_{н.о.}} \quad (3)$$

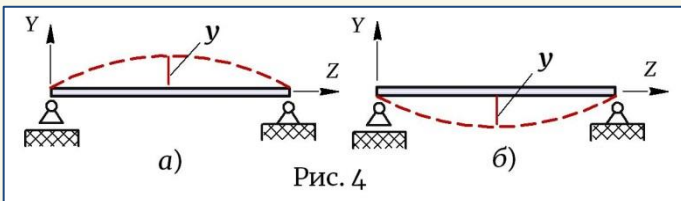
и адаптировал его к случаю продольного изгиба, изменив и уточнив входящие в него значения:

① Так как в решении используется дифференциальное уравнение изогнутой оси, стержень необходимо поместить в математическую систему координат, расположив начало координат в крайнем левом сечении, ось Z направить вправо, ось Y — вверх. И тогда в сечении на расстоянии Z от начала координат прогиб изогнутого стержня равен y , а изгибающий момент здесь определяется путем параллельного переноса силы F к сечению (рис. 3) — $M_{изг} = F \cdot y$. (4)

В результате дифференциальное уравнение (3) принимает вид:

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{F \cdot y}{EI_{н.о.}} \quad (5)$$

② При потере устойчивости сжатый стержень имеет одинаковую вероятность искривления относительно первоначально прямой оси в ту или иную сторону (рис. 4, а, б):



Но если изогнутую ось стержня рассматривать как математическую кривую, то в первом варианте ее кривизна отрицательна, а прогиб – положительный, во втором варианте – наоборот:

– в первом варианте (рис. 4, а) — $\frac{1}{\rho} = \frac{d^2y}{dz^2} < 0, y > 0;$

– во втором варианте (рис. 4, б) — $\frac{1}{\rho} = \frac{d^2y}{dz^2} > 0, y < 0.$

А это значит, что левая и правая части выражения (5) всегда будут иметь противоположные знаки, поэтому уравнение изогнутой оси сжатого стержня следует записать в виде:

$$\frac{d^2y}{dz^2} = - \frac{F \cdot y}{EI_{\text{н.о.}}} . \quad (6)$$

Примечание.

Следует напомнить, что при поперечном изгибе проблемы знака в уравнении (3) не существовало: знак кривизны изогнутой оси балки (знак второй производной) и знак изгибающего момента, согласно принятому правилу, совпадали.

③ При плоском изгибе – *продольном* или *поперечном* – в уравнении изогнутой оси (3) в знаменателе стоит момент инерции относительно нейтральной оси $I_{\text{н.о.}}$, являющейся главной центральной осью сечения. Как известно, главные оси обладают свойством экстремальности и среди всех осей, проходящих через точку, моменты инерции относительно главных осей имеют наибольшее I_{max} и наименьшее I_{min} значения. Чтобы при изгибе обеспечить более высокую прочность и жесткость, изгиб элемента следует производить в *плоскости наибольшей жесткости* – плоскости, перпендикулярной главной центральной оси, относительно которой момент инерции I_{max} . Это значит, что сечение необходимо располагать по отношению к нагрузке таким образом, чтобы нейтральной осью была главная ось сечения с I_{max} . В этом случае будут возникать меньшие напряжения и деформации. Именно таким образом поступают при проектировании элементов, работающих на поперечный изгиб, где положение балки под нагрузкой определяется конструктором.

При продольном изгибе выпучивание стержня происходит в направлении наименьшего сопротивления, т.е. в *плоскости наименьшей жесткости*, поэтому нейтральной осью сечения в этом случае будет

главная центральная ось с моментом инерции I_{\min} . И тогда окончательно основное дифференциальное уравнение (6) для случая продольного изгиба принимает вид:

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = - \frac{F \cdot y}{EI_{\min}}. \quad (7)$$

Выполняем решение уравнения (7). Обозначим —

$$\frac{F}{EI_{\min}} = k^2 \quad (8)$$

и получаем однородное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + k^2 y = 0, \quad (9)$$

решением которого является:

$$y = A \sin kz + B \cos kz, \quad (10)$$

где A и B — постоянные интегрирования, определяемые из кинематических условий на опорах (рис. 3) —

★ при $z = 0$ (левая опора) $\rightarrow y = 0$: $A \sin k \cdot 0 + B \cos k \cdot 0 = 0 \rightarrow B = 0$;

★ при $z = \ell$ (правая опора) $\rightarrow y = 0$: $A \sin k\ell = 0$.

Для последнего выражения возможны два варианта — либо $A = 0$, либо $\sin k\ell = 0$. Но если принять, что $A = 0$ и $B = 0$, это значит, что в любом сечении стержня прогиб $y = 0$, т.е. стержень не изгибается ни при каких условиях, что не соответствует действительности. Поэтому принимаем $\sin k\ell = 0$., а это возможно только при значениях угла, кратных π , т.е. $k\ell = \pi n$, где n — любое целое число. Отсюда получаем:

$$k = \frac{\pi n}{\ell}. \quad (11)$$

Подставляем значение (11) в выражение (8), преобразовываем и получаем *формулу Эйлера для критической силы*:

$$F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 n^2 EI_{\min}}{\ell^2}, \quad (12)$$

где E — модуль продольной упругости; I_{\min} — минимальный осевой момент инерции сечения; ℓ — длина стержня.

Тогда на основании выражений (10) и (11) уравнение изогнутой оси стержня при продольном изгибе принимает вид —

$$y = A \sin \frac{\pi n}{\ell} z, \quad (13)$$

откуда видно, что форма изогнутой оси описывается синусоидой, где значение "n" принимает конкретный физический смысл — это число полуволн синусоиды, укладываемых на одной длине стержня; A — наибольший прогиб стержня в середине полуволны, т.е. при $z = \ell/2$.

Проанализируем формулу Эйлера (12).

Так как n — это любое целое число ($n = 1, 2, 3, \dots$), значит, на длине стержня при соответствующих значениях критической силы $F_{кр}$ могут укладываться 1, 2, 3 ... полуволн синусоиды (рис. 5):

★ если принять $n = 1$, стержень примет форму по рис. 5, а, т.е. на одной длине ℓ ляжет одна полуволна синусоиды, и сила, которая приведет к получению такой формы согласно формуле (12) будет равна:

$$F_{кр(1)} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{\ell^2};$$

★ если принять $n = 2$, стержень примет форму по рис. 5, б, т.е. на длине ℓ лягут две полуволны синусоиды, для этого сила должна быть равна —

$$F_{кр(2)} = \frac{4\pi^2 EI_{\min}}{\ell^2};$$

★ если принять $n = 3$, стержень примет форму по рис. 5, в, и произойдет это от действия силы, равной —

$$F_{кр(3)} = \frac{9\pi^2 EI_{\min}}{\ell^2}; \dots \text{ и т.д.}$$

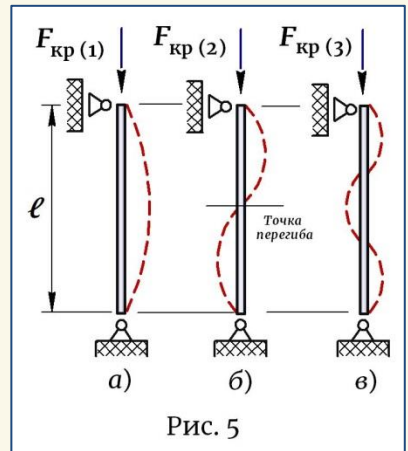


Рис. 5

Таким образом, согласно формуле Эйлера (12), возможны различные варианты искривления стержня, для чего необходимо приложить силу соответствующей величины: чтобы стержень искривился по варианту (рис. 5, а), сила должна быть равна $F_{кр(1)}$; чтобы получить искривление в форме (рис. 5, б) и (рис. 5, в), силу следует увеличить в 4 и 9 раз соответственно. И чем больше точек перегиба будет иметь си-

нусоидально-искривленная ось стержня, тем большей должна быть критическая сила. Однако исследования показывают, что формы равновесия по рис. 5, б, в и т.д., не могут быть реализованы на практике, они являются неустойчивыми и переходят в устойчивые формы только при наличии промежуточных боковых опор. При отсутствии подпорок стержень никогда не примет такую форму и любое увеличение силы сверх $F_{кр(1)}$ приведет к его разрушению. Кроме того, при анализе формулы (12) возникает также вопрос о том, какую форму примет стержень, если будет приложена сила $F_{кр(1)} < F_{кр} < F_{кр(2)}$ или $F_{кр(2)} < F_{кр} < F_{кр(3)}$.

Некоторая некорректность формулы (12) – и Эйлер это понимал – объясняется тем, что при ее получении было использовано уравнение изогнутой оси балки для малых деформаций, полученное для случая поперечного изгиба. При выводе этого уравнения в силу малости деформаций, возникающих при поперечном изгибе, математическое уравнение кривизны плоской кривой –

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{d^2y/dz^2}{\left[1 + (dy/dz)^2\right]^{3/2}}$$

было принято в упрощенной форме как $\frac{1}{\rho} = \frac{d^2y}{dz^2}$. Но если при попе-

речном изгибе упругие деформации, действительно, бесконечно малы и принятое упрощение является оправданным, то в случае продольного изгиба, возникающего при потере устойчивости деформации весьма значительны и принятие упрощенной формулы кривизны кривой здесь недопустимо. Это приводит, как мы видим, к определенной неточности решения.

В дальнейшем, развивая теорию Эйлера и используя уже точное уравнение кривизны плоской кривой, Лагранж доказал, что выпучивание стержня по схемам ($n=2,3,4\dots$) невозможно. Такие криволинейные формы действительно являются неустойчивыми и осуществиться не могут. Это возможно только при наличие боковых подпорок, о чем было сказано выше. При отсутствии подпорок выпучивание будет происходить только в форме одной полуволны синусоиды, когда $n=1$, и изгиб произойдет при силе $F_{кр(1)} = \pi^2 EI_{\min} / \ell^2$. Дальнейшее увеличение силы приведет к увеличению деформаций, которые будут быстро развиваться и закончатся разрушением элемента. А

поскольку в инженерных системах потеря устойчивости эквивалентна разрушению, поэтому для конструкций самой важной величиной является *наименьшее значение силы*, при которой элемент теряет устойчивость, т.е. сила, равная $F_{кр} = \pi^2 EI_{\min} / \ell^2$. Именно эта сила рассматривается как *предельная* и является главной в расчетах на устойчивость. И формула Эйлера для первого значения критической силы подтверждается экспериментально, что делает заслугу Эйлера в решении задачи на устойчивость неоспоримой. Поэтому наименьшее значение центрально приложенной сжимающей силы, при которой прямолинейная форма равновесия стержня становится неустойчивой и потеря устойчивости протекает в упругой области, иногда называют *эйлеровой силой* и обозначают как F_E . Значение эйлеровой силы является *численной характеристикой* устойчивости:

- ★ при $F < F_E$ – стержень является устойчивым;
- ★ при $F > F_E$ – стержень теряет устойчивость.

3. Влияние условий закрепления концов стержня на величину критической силы

При решении задачи и выводе формулы для критической силы Эйлер рассматривал только один вариант стержня, при котором его концы были закреплены на шарнирных опорах, позволяющих при изгибе поворот опорных сечений. В этом случае, стержень, как было рассмотрено выше, изгибается в форме одной полуволны синусоиды и происходит это при силе, равной $F_{кр} = \pi^2 EI_{\min} / \ell^2$. Но на практике встречаются и другие способы закрепления концов стержня и, как будет рассмотрено ниже, эти способы будут существенно влиять на величину критической силы и, тем самым, увеличивать или снижать устойчивость стержня при сжатии.

Вернемся к формуле (12) и приведем ее к виду:

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 n^2 EI_{\min}}{\ell^2} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(1/n^2) \ell^2} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{[(1/n)\ell]^2}. \quad (14)$$

Установим, сколько полуволн синусоиды ляжет на одной длине стержня в зависимости от вида закрепления его концов и при каком значении $F_{кр}$ стержень потеряет устойчивость. Рассмотрим четыре основных случая (рис. 6):

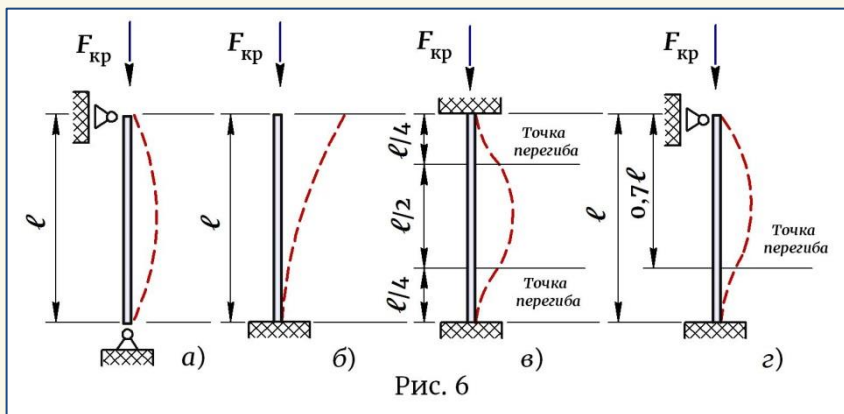


Рис. 6

★ Случай первый (рис. 6, а) рассмотрен Эйлером. При шарнирном закреплении концов на длине стержня укладывается одна полуволна синусоиды, т.е. $n = 1$. В этом случае, согласно формуле (14), стержень

потеряет устойчивость при силе, равной $F_{кр} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{\ell^2}$;

★ Во втором случае (рис. 6, б) один конец стержня жестко зашце-
 лен, а другой – свободен, куда и прикладывается сила. При изгибе стержень искривляется таким образом, что на одной его длине уклады-
 вается половина полуволны синусоиды, т.е. $n = 1/2$. И тогда, со-
 гласно формуле (14), стержень потеряет устойчивость при силе, рав-

ной $\rightarrow F_{кр} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{4\ell^2}$, т.е. силе, в четыре раза меньшей, чем при шар-
 нирном закреплении концов;

★ В третьем случае (рис. 6, в) оба конца стержня жестко зашце-
 млены и при искривлении на стержне возникают две точки перегиба, т.е.
 стержень дважды изменяет кривизну. При таком закреплении на
 длине стержня укладываются две полуволны синусоиды – одна дли-
 ной $\ell/2$ и вторая, состоящая из двух половинок длиной $\ell/4$, т.е. на
 длине в целом $n = 2$. Сила, при которой стержень потеряет устойчи-

вость, на основании формуле (14) равна $\rightarrow F_{кр} = \frac{4\pi^2 EI_{\min}}{\ell^2}$;

★ В четвертом случае (рис. 6, з) один конец стержня закреплен шарнирно, а другой крепится в жесткой заделке. Опыты показывают, что в этом случае при изгибе стержень также изменяет кривизну и на одной его длине укладывается число полуволн синусоиды $n = 1/0,7$, а

сила, при которой произойдет потеря устойчивости на основании формулы (14) равна $\rightarrow F_{кр} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{0,49\ell^2}$.

Таким образом, как видно из приведенных примеров, способ закрепления концов стержня существенно влияет на величину критической силы, а значит, и на устойчивость стержня. Самую низкую устойчивость имеет стержень, заземленный только одним концом (рис. 6, б), самым устойчивым является стержень, заземленный с двух сторон (рис. 6, г). Следовательно, изменяя способы закрепления концов, можно повышать устойчивость элементов, подверженных продольному изгибу.

Вернемся к формуле (14) и введем обозначение:

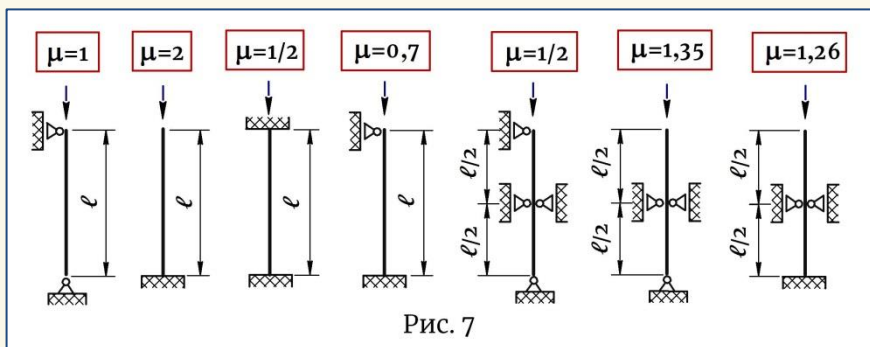
$$\mu = \frac{1}{n}, \quad (15)$$

где μ – называется коэффициент приведения длины – это величина, обратная числу полуволн синусоиды, укладываемых на одной длине стержня. В результате формула Эйлера (14) принимает вид –

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu\ell)^2}, \quad (16)$$

где $\mu\ell = \ell_{пр}$ – называется приведенная длина стержня, т.е. длина, на которой укладывается одна полуволна синусоиды.

Для рассмотренных на рис. 6 стержней, а также стержней с боковыми подпорками, коэффициенты приведения длины согласно формуле (15), соответственно равны (рис. 7):



4. Критические напряжения. Пределы применимости

формулы Эйлера

В случае потери устойчивости при осевом сжатии напряжения в стержне определяются по известной формуле как $\sigma = F_{кр}/A$, где A – площадь поперечного сечения. Преобразуем формулу для напряжений с учетом выражения для критической силы (16):

$$\sigma = \frac{F_{кр}}{A} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu\ell)^2 A} = \left| \frac{I_{\min}}{A} = i_{\min}^2 \right| = \frac{\pi^2 E \cdot i_{\min}^2}{(\mu\ell)^2} = \frac{\pi^2 E}{(\mu\ell/i_{\min})^2}, \quad (17)$$

где i_{\min} – минимальный радиус инерции сечения.

Введем обозначение:
$$\lambda = \frac{\mu\ell}{i_{\min}}, \quad (18)$$

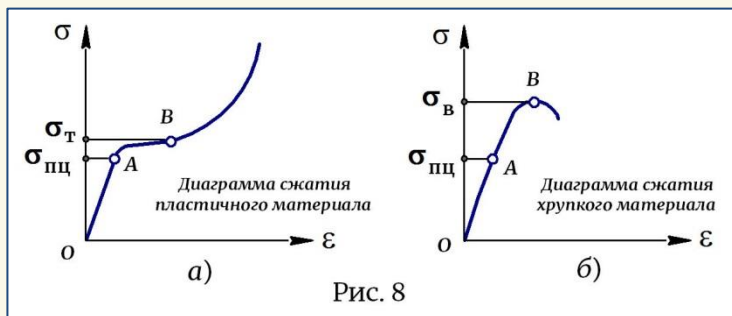
где значение λ называется *гибкость стержня*. *Гибкость стержня* – величина *чисто геометрическая*. Как видно из формулы (18), она зависит от длины стержня (ℓ), от размеров и формы сечения (i_{\min}) и от способа закрепления концов (μ), **НО НЕ ЗАВИСИТ ОТ МАТЕРИАЛА**. И если рассмотреть два стержня, совершенно одинаковых по своей геометрии и способу закрепления концов, но выполненных из разных материалов, то при всех равных условиях согласно формуле (18) они будут иметь одинаковую гибкость, хотя устойчивость потеряют при разной нагрузке. Материалы обладают различной жесткостью, которая определяется модулем Юнга, поэтому при одинаковой гибкости менее устойчивым будет стержень, имеющий меньший модуль упругости, так как согласно формуле (16) он потеряет устойчивость при меньшей силе по сравнению со стержнем, выполненным из более жесткого материала. Так, например, если сравнить поведение двух стержней одинаковой гибкости – резинового и стального, то учитывая значения их модулей Юнга ($E_{рез} = 0,8 \text{ МПа}$, $E_{сталь} = 2 \times 10^5 \text{ МПа}$), резиновый стержень потеряет устойчивость при силе примерно в 250000 раз меньшей, чем стальной. Хотя с точки зрения гибкости оба стержня будут одинаковыми.

Возвращаемся к выражению (17) и с учетом (18) получаем *формулу Эйлера для критических напряжений*:

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}. \quad (19)$$

Однако формулы Эйлера для критической силы (16) и критических напряжений (19) можно применять не всегда. Формулы Эйлера имеют пределы применимости.

Вернемся к экспериментальному изучению механических свойств материалов и рассмотрим диаграммы сжатия пластичных (рис. 8, а) и хрупких (рис. 8, б) материалов.



На начальном этапе нагружения в материале возникают только упругие деформации, которые всегда пропорциональны нагрузке, а поэтому диаграммы сжатия начинаются с прямого участка OA , называемого *участком пропорциональности*. В пределах участка OA в материале возникают бесконечно малые упругие деформации и происходит это до напряжения $\sigma_{упр}$, называемого *пределом упругости*, которое в расчетах можно принимать примерно равным пределу *пропорциональности* $\sigma_{пц}$, т.е. $\sigma_{упр} \approx \sigma_{пц}$. По мере увеличения нагрузки линейность диаграмм нарушается, они искривляются (участок AB) и дальнейшее развитие деформаций пластичных и хрупких материалов происходит по разным механизмам. В пластичном материале, когда напряжения достигают *предела текучести* σ_T , металл начинает течь и постепенно пластические деформации охватывают весь объем образца (рис. 8, а). Текучесть является предельным состоянием пластичного материала и так как разрушить его сжатием невозможно, кривая на диаграмме (рис. 8, а) идет вверх, не обрываясь. Хрупкие материалы не текут. По мере роста нагрузки при достижении в них напряжений, равных *пределу прочности* σ_B , в образце возникают трещины и происходит его хрупкое разрушение (рис. 8, б). Таким образом, *опасным напряжением* $\sigma_{опас}$, соответствующим наступлению предельного состояния, для пластичных материалов является *предел текучести* σ_T , для хрупких – *предел прочности* σ_B .

Возвращаемся к вопросу устойчивости сжатых стержней. При выводе формулы для критической силы $F_{кр}$ (и соответственно $\sigma_{кр}$) Эйлер использовал приближенное дифференциальное уравнение изогнутой оси балки для малых деформаций, т.е. деформаций, возникающих на участке диаграмм OA (рис. 8, а, б). А это значит, что формула Эйлера для критических напряжений (19) справедлива только в пределах участка OA и эти напряжения не могут превышать $\sigma_{шц}$ материала.

Анализ формулы (19) показывает, что критические напряжения зависят от гибкости λ : чем больше гибкость стержня, тем меньшие в нем будут возникать $\sigma_{кр}$ и тем более высока вероятность того, что эти напряжения не выйдут за пределы участка пропорциональности OA . Но если гибкость уменьшать, напряжения будут расти и при некотором значении λ они достигнут, а затем превысят предел пропорциональности $\sigma_{шц}$. Исходя из этого, для любого материала можно определить такое **НАИМЕНЬШЕЕ (предельное) ЗНАЧЕНИЕ ГИБКОСТИ**, при которой критические напряжения $\sigma_{кр}$ достигнут величины $\sigma_{шц}$.

Приравняем напряжения (19) к наибольшему значению, которое для них допустимо, т.е. к $\sigma_{шц} \rightarrow \sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \sigma_{шц}$, и получаем:

$$\lambda_{пред} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{шц}}}, \quad (20)$$

где величина $\lambda_{пред}$ называется **предельная гибкость**. Эта гибкость не зависит от геометрии и конструкции элемента, она *зависит только от физико-механических свойств материала*. Значения $\lambda_{пред}$ для разных материалов представлены в справочной литературе.

И теперь, определив гибкости по формулам (18) и (20) и сравнив эти значения, расчеты на устойчивость выполняют по методике:

- ★ если $\lambda \geq \lambda_{пред} \rightarrow \sigma_{кр} \leq \sigma_{шц}$ (участок OA) – здесь формулы Эйлера для $F_{кр}$ (16) и $\sigma_{кр}$ (19) применимы;
- ★ если $\lambda < \lambda_{пред} \rightarrow \sigma_{кр} > \sigma_{шц}$ (участок AB) – в этом случае формулы Эйлера (16) и (19) применять категорически нельзя и для расчета на устойчивость необходимы другие формулы.

Рассмотрим три стержня, выполненных из одинакового материала и имеющих одинаковое поперечное сечение и одинаковый способ закрепления, но разную длину (рис. 9).

Так как $l_1 > l_2 > l_3$, то согласно формуле (18) стержни будут иметь соответствующее соотношение гибкостей:

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3.$$

Предположим, что:

$$\lambda_1 \geq \lambda_{\text{пред}}; \lambda_0 < \lambda_2 < \lambda_{\text{пред}}; \lambda_3 < \lambda_0,$$

где λ_0 – это значение, соответствующее очень малой, практически нулевой гибкости (для сталей $\lambda_0 = 30 \div 40$).

Различают стержни **БОЛЬШОЙ**, **СРЕДНЕЙ** и **МАЛОЙ** гибкости:

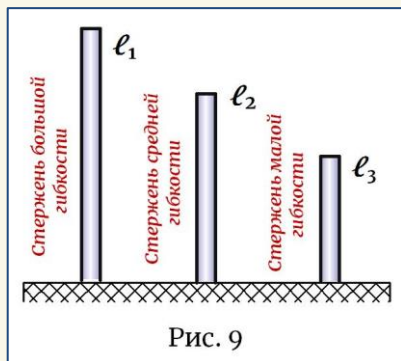
- ① Если $\lambda \geq \lambda_{\text{пред}}$ – стержень **БОЛЬШОЙ** гибкости. В этих стержнях $\sigma_{\text{кр}} \leq \sigma_{\text{шц}}$ (участок *OA*), и значит, для них формулы Эйлера (19) и (16) применимы, т.е. $\sigma_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}; F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EI_{\text{min}}}{(\mu l)^2}$.

Стержни **БОЛЬШОЙ** гибкости рассчитывают только на устойчивость, так как потеря устойчивости в них наступает намного раньше, чем потеря прочности, т.е. раньше, чем появляются какие-либо признаки пластических деформаций и разрушения.

- ② Если $\lambda_0 < \lambda < \lambda_{\text{пред}}$ – стержень **СРЕДНЕЙ** гибкости. В таких стержнях $\sigma_{\text{шц}} < \sigma_{\text{кр}} < \sigma_{\text{опас}}$ (участок *AB*), и значит, здесь формулы Эйлера для $F_{\text{кр}}$ (16) и $\sigma_{\text{кр}}$ (19) неприменимы. Выполнение расчетов на устойчивость для таких стержней производится по *эмпирической* (полученной опытным путем) *формуле Ф.С. Ясинского* для критических напряжений:

$$\sigma_{\text{кр}} = a - b\lambda + c\lambda^2, \quad (21)$$

где значение λ вычисляется по формуле (18), а коэффициенты a, b, c являются механическими характеристиками материала, полученными экспериментально и имеющими размерность напряжений [МПа].



Определив по формуле Ф.С. Ясинского критические напряжения, критическую силу можно вычислить как:

$$F_{кр} = \sigma_{кр} A \quad (22)$$

Стержни **СРЕДНЕЙ** гибкости рассчитывают и на устойчивость, и на прочность, так как здесь вместе с потерей устойчивости наблюдаются и признаки потери прочности – текучесть или хрупкое разрушение.

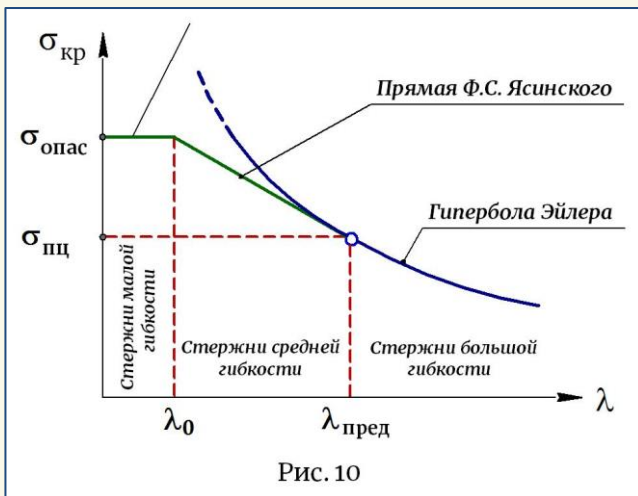
! *Использование формулы Эйлера для стержней, теряющих устойчивость за пределами упругости, не только принципиально неверно, но и потенциально опасно по своим последствиям.*

3 Если $\lambda \leq \lambda_0$ – стержень **МАЛОЙ** гибкости. В таких стержнях $\sigma_{кр} \approx \sigma_{опас}$ (σ_T или σ_B). Эти стержни никогда не теряют устойчивость и разрушаются только от потери прочности, поэтому их на устойчивость не проверяют, а рассчитывают только на прочность.

Исходя из сказанного, возвращаясь к стержням на рис. 9, можно сказать, что стержень ℓ_1 – стержень **БОЛЬШОЙ** гибкости, стержень ℓ_2 – стержень **СРЕДНЕЙ** гибкости и стержень ℓ_3 – стержень **МАЛОЙ** гибкости.

Обобщая вышесказанное по расчетам стержней на устойчивость, использование той или иной формулы для определения критических напряжений можно свести к единой диаграмме (рис. 10):

$$\sigma_{max} = \frac{F}{A} \leq [\sigma]_{сж}$$



$$\sigma_{кр} = a - b\lambda + c\lambda^2$$

$$F_{кр} = \sigma_{кр} A$$

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{(\mu\ell)^2}$$

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

Рис. 10

5. Расчет стержней на устойчивость. Проверочные и проектировочные расчеты

Расчеты на устойчивость – проверочные и проектировочные – выполняются на основании условия устойчивости, записанного для силы или для напряжений:

$$F_{\max} \leq [F]_{\text{уст}}; \sigma_{\max} \leq [\sigma]_{\text{уст}},$$

где $[F]_{\text{уст}}$ и $[\sigma]_{\text{уст}}$ – *допускаемая сила* и *допускаемые напряжения на устойчивость*, соответственно определяемые как (1)

$$\boxed{[F]_{\text{уст}} = \frac{F_{\text{кр}}}{n_{\text{уст}}}; [\sigma]_{\text{уст}} = \frac{\sigma_{\text{кр}}}{n_{\text{уст}}}}, \quad (23)$$

где $n_{\text{уст}}$ – коэффициент запаса устойчивости.

Как всякая допускаемая величина, *допускаемая сила* и *допускаемые напряжения* определяются отношением опасной силы или напряжения к коэффициенту запаса. Для сжатого стержня опасными являются критическая сила и критические напряжения, при которых стержень теряет устойчивость первоначальной формы равновесия. Поэтому в первую очередь расчет требует определения этих величин, которые, как было сказано выше, в зависимости от гибкости стержня могут быть вычислены по формулам Эйлера или Ф.С. Ясинского.

Следует заметить, что *допускаемые напряжения на устойчивость* $[\sigma]_{\text{уст}}$ в отличие от допускаемых напряжений на прочность $[\sigma]$ не являются постоянной величиной. Так как они определяются через критические напряжения (23), которые включают в себя гибкость λ , вычисляемую по формулам (19) или (21), *допускаемые напряжения на устойчивость* зависят от длины стержня, от геометрии и размеров его сечения, от способа закрепления концов, от материала.

Расчеты на устойчивость, как и расчеты на прочность, бывают **ПРО-ВЕРОЧНЫЕ** и **ПРОЕКТИРОВОЧНЫЕ**.

ПРОВЕРОЧНЫЙ РАСЧЕТ предполагает при заданных для детали данных проверку ее устойчивости в заданных условиях работы. Выполняется проверочный расчет по следующей методике:

★ Первоначально необходимо установить, к какой гибкости относится стержень. Для этого по заданным данным для стержня вычисляют значения гибкостей $\lambda = \mu \ell / i_{\min}$ (18) и $\lambda_{\text{пред}} = \sqrt{\pi^2 E / \sigma_{\text{пц}}}$ (20), а затем эти величины сравниваются между собой;

★ Далее, в зависимости от гибкости стержня, вычисляют значение критической силы по соответствующей формуле —

$$\text{— если } \lambda \geq \lambda_{\text{пред}} \rightarrow F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EI_{\text{min}}}{(\mu \ell)^2} \quad (16);$$

$$\text{— если } \lambda < \lambda_{\text{пред}} \rightarrow \sigma_{\text{кр}} = a - b\lambda + c\lambda^2 \quad (21) \rightarrow F_{\text{кр}} = \sigma_{\text{кр}} A \quad (22);$$

★ По значению $F_{\text{кр}}$ по формуле (23) определяют $[F]_{\text{уст}} = \frac{F_{\text{кр}}}{n_{\text{уст}}}$ и сравнивают с рабочей силой, в условиях которой работает стержень —

— если $F_{\text{рабоч}} \leq [F]_{\text{уст}}$ — устойчивость стержня обеспечена;

— если $F_{\text{рабоч}} > [F]_{\text{уст}}$ — стержень потеряет устойчивость.

ПРОЕКТИРОВОЧНЫЙ РАСЧЕТ предполагает проектирование стержня, т.е. *подбор размеров сечения*, обеспечивающих его устойчивость при заданной рабочей силе, либо разработку условий его работы, т.е. *подбор нагрузки*, которую стержень способен выдержать без опасности потери устойчивости.

Подбор нагрузки для стержня выполняется по такому же алгоритму, как и проверочный расчет:

★ Первоначально по формулам (18) и (20) вычисляют значения λ и $\lambda_{\text{пред}}$ и устанавливают, к какой гибкости относится стержень;

★ Далее, в зависимости от гибкости стержня, по формулам (16) либо (21)-(22) определяют критическую силу $F_{\text{кр}}$ и $[F]_{\text{уст}}$ (23);

★ Затем задают условие устойчивости стержня, согласно которому $F_{\text{рабоч(мак)}} \leq [F]_{\text{уст}}$, и подбирают для него безопасную нагрузку.

Подбор размеров сечения стержня, а именно этот расчет требуется чаще всего, представляется задачей намного более сложной.

Как и любой проектный расчет, подбор размеров сечения начинается с записи условия устойчивости $\sigma_{\text{мак}} = F/A \leq [\sigma]_{\text{уст}}$, которое с учетом (23) принимает вид:

$$\sigma_{\text{мак}} = \frac{F}{A} \leq \frac{\sigma_{\text{кр}}}{n_{\text{уст}}}. \quad (24)$$

Однако использование уравнения (24) создает целый ряд проблем.

Первая проблема заключается в том, что поскольку размеры сечения не заданы и их требуется определить, невозможно установить, к какой гибкости относится стержень и какую формулу для $\sigma_{кр}$ (19) или (21) следует применить. Кроме того, не всегда имеется возможность вычислить $\lambda_{пред}$, необходимую для оценки гибкости стержня, так как предел пропорциональности $\sigma_{пц}$, входящий в формулу (20), не является справочной величиной и его определение для многих материалов требует проведения отдельных лабораторных испытаний.

Вторая проблема состоит в невозможности выразить напрямую из уравнения (24) размеры сечения, так как они одновременно входят и в левую часть (в виде площади сечения A), и в правую – они заключены в выражении для гибкости λ (18) в виде значения i_{min} , через которую вычисляются $\sigma_{кр}$ (19) и (21). Таким образом, задача превращается в «замкнутый круг» со многими неизвестными.

Чтобы избежать этих проблем и уйти от необходимости оценки гибкости стержня с целью применения той или иной формулы для критических напряжений $\sigma_{кр}$ (это относится ко всем расчетам на устойчивость, и особенно, к расчетам по подбору размеров сечения), в расчет вводится $[\sigma]_{сж}$ – *основное допускаемое напряжение на сжатие*, которое легко определяется опытным путем. Запишем его значение, а также значение для $[\sigma]_{уст}$ (23), и возьмем их отношение:

$$\left. \begin{array}{l} [\sigma]_{уст} = \frac{\sigma_{кр}}{n_{уст}} \\ [\sigma]_{сж} = \frac{\sigma_{опас}}{n} \end{array} \right\} \rightarrow \frac{[\sigma]_{уст}}{[\sigma]_{сж}} = \frac{\sigma_{кр}}{n_{уст}} \cdot \frac{n}{\sigma_{опас}} = \boxed{\frac{\sigma_{кр}}{\sigma_{опас}} \cdot \frac{n}{n_{уст}} = \varphi}, \quad (25)$$

где φ – называется *коэффициент продольного изгиба* или *коэффициент понижения основного допускаемого напряжения на сжатие*. Этот коэффициент, как видно из (25), зависит от гибкости стержня λ , которая входит в расчетные формулы для $\sigma_{кр}$ (19) и (21), а также от механических свойств материала ($\sigma_{опас}$ – это σ_T или σ_B , от E – модуля Юнга и значений a, b, c , через которые вычисляются $\sigma_{кр}$ по соответствующим формулам). Значения коэффициента φ установлены СНИП и приводятся в виде функции от гибкости для различных марок сталей

и других материалов в соответствующих справочных таблицах. Коэффициент продольного изгиба изменяется в пределах $0 \leq \varphi \leq 1$.

И тогда на основании (25) получаем —

$$\boxed{[\sigma]_{\text{уст}} = \varphi [\sigma]_{\text{сж}}}, \quad (26)$$

а условие устойчивости принимает вид:

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{F}{A} \leq [\sigma]_{\text{уст}} \rightarrow \sigma_{\text{max}} = \frac{F}{A} \leq \varphi [\sigma]_{\text{сж}} \rightarrow$$

$$\boxed{\sigma_{\text{max}} = \frac{F}{\varphi A} \leq [\sigma]_{\text{сж}}}. \quad (27)$$

Подбор размеров сечения с использованием уравнения (27) осуществляют *методом попыток*:

★ В *попытке* № 1 задают любое значение φ_1 , например, $\varphi_1 = 0,5$;

★ Подставляют его в условие (27) $\rightarrow \sigma_{\text{max}} = \frac{F}{\varphi_1 A_1} \leq [\sigma]_{\text{сж}}$ и от-

сюда определяют площадь сечения $A_1 = \frac{F}{\varphi_1 [\sigma]_{\text{сж}}}$ и его размеры;

★ По полученным размерам по формуле (18) определяют гибкость стержня и по гибкости, используя специальные таблицы, уточняют коэффициент φ_1 . При выполнении этого расчета, если полученная гибкость не является кратной числу 10, применяют метод линейной интерполяции и получают новое значение φ_1 !

★ Затем, с помощью того же условие устойчивости (27), проверяют устойчивость стержня $\rightarrow \sigma_{\text{max}} = \frac{F}{\varphi_1 A_1} \leq [\sigma]_{\text{сж}}$;

★ Если устойчивость не обеспечена, производят *попытку* № 2, в которой коэффициент φ_2 вычисляют методом аппроксимации как

$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi_1'}{2}$, и далее операцию подбора сечения повторяют по тому

же алгоритму. Если устойчивость опять не обеспечена, производят попытки № 3, 4 ... и т.д. до получения необходимого результата. Допустимая перегрузка для стержня не должна превышать 5%.

6. Материалы и рациональные формы сечений на устойчивость

Материалы

Стержни **БОЛЬШОЙ** гибкости рассчитывают только на устойчивость, потому что потеря устойчивости в них наступает намного раньше, чем потеря прочности, т.е. намного раньше, чем появляются какие-либо признаки текучести или хрупкого разрушения. Для стержней **БОЛЬШОЙ** гибкости критическая сила и критические напряжения определяются по формулам Эйлера (16) и (19) —

$$F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu\ell)^2}; \quad \sigma_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2},$$

из которых видно, что единственной механической характеристикой, которая определяет сопротивляемость стержня потере устойчивости, является модуль Юнга E . Поэтому для элементов, работающих на продольное сжатие и склонных к потере устойчивости, необходимо выбрать материал, имеющий бóльший модуль упругости.

Если стержень выполняется из стали, то как показывает практика, все стали, независимо от качества, имеют примерно одинаковый модуль Юнга. А поэтому для стержней **БОЛЬШОЙ** гибкости *нецелесообразно* выбирать высокопрочную дорогостоящую сталь, так как с точки зрения потери устойчивости она будет вести себя также, как обыкновенная низкосортная сталь.

Стержни **СРЕДНЕЙ** гибкости также теряют устойчивость, но иногда вместе с потерей устойчивости они теряют и прочность, т.е. в них может наблюдаться текучесть или хрупкое разрушение. Поэтому для стержней **СРЕДНЕЙ** гибкости рекомендуется выбирать материал с более высокими прочностными свойствами.

Стержни **МАЛОЙ** гибкости устойчивость не теряют и разрушаются только от потери прочности, поэтому в этой теме не рассматриваются.

Форма сечений

С точки зрения устойчивости наиболее рациональной является такая форма сечения, при которой *величина наименьшего радиуса инерции i_{\min} принимает наибольшее значение при данной площади сечения.*

Введем обозначение — $k = i_{\min} / \sqrt{A}$, (28)

где k называется *удельный радиус инерции*. Наиболее рациональными являются сечения с наибольшим значением k .

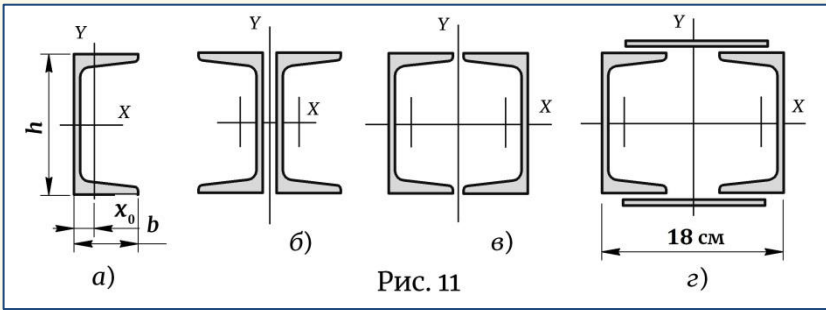
Рассмотрим сечение, составленное из двух одинаковых швеллеров № 20, и определим, какая установка швеллеров наиболее рациональна.

Из таблиц сортамента выпишем данные для швеллера (рис. 11, а) —

$$h = 20 \text{ см}; b = 7,6 \text{ см}; x_0 = 2,07 \text{ см};$$

$$A = 23,4 \text{ см}^2; I_x = 1520 \text{ см}^4; I_y = 113 \text{ см}^4,$$

рассмотрим варианты соединения и для каждого случая вычислим значение *удельного радиуса инерции* k :



Вариант (рис. 11, б) —

$$A_{\text{ПОЛН}} = 2 \cdot 23,4 = 46,8 \text{ см}^2; I_x = 2 \cdot 1520 = 3040 \text{ см}^4;$$

$$I_y = 2 \left(113 + 23,4 \cdot 2,07^2 \right) = 426,5 \text{ см}^4 = I_{\min};$$

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A_{\text{ПОЛН}}}} = \sqrt{\frac{426,5}{46,8}} = 3 \text{ см} \rightarrow k = \frac{i_{\min}}{\sqrt{A_{\text{ПОЛН}}}} = \frac{3}{\sqrt{46,8}} = 0,44.$$

Вариант (рис. 11, в):

$$A_{\text{ПОЛН}} = 2 \cdot 23,4 = 46,8 \text{ см}^2; I_x = 2 \cdot 1520 = 3040 \text{ см}^4;$$

$$I_y = 2 \left[113 + 23,4 (7,6 - 2,07)^2 \right] = 1657,3 \text{ см}^4 = I_{\min};$$

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A_{\text{ПОЛН}}}} = \sqrt{\frac{1657,3}{46,8}} = 6 \text{ см} \rightarrow k = \frac{i_{\min}}{\sqrt{A_{\text{ПОЛН}}}} = \frac{6}{\sqrt{46,8}} = 0,88.$$

Вариант (рис. 11, г):

$$A_{\text{ПОЛН}} = 2 \cdot 23,4 = 46,8 \text{ см}^2; I_x = 2 \cdot 1520 = 3040 \text{ см}^4;$$

$$I_y = 2 \left[113 + 23,4 (9 - 2,07)^2 \right] = 2473,6 \text{ см}^4 = I_{\min};$$

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A_{\text{полн}}}} = \sqrt{\frac{2473,6}{46,8}} = 7,3 \text{ см} \rightarrow k = \frac{i_{\min}}{\sqrt{A_{\text{полн}}}} = \frac{7,3}{\sqrt{46,8}} = 1,07$$

Расчеты показывают, что наиболее устойчивым из рассмотренных является сечение на рис. 11, з. Раздвигая швеллеры еще больше, можно увеличивать значение k , повышая устойчивость стойки, но при некотором расстоянии минимальным станет момент инерции относительно оси X , т.е. $I_x = I_{\min}$, и значение k снизится.

Самыми рациональными являются сечения, у которых главные моменты инерции одинаковы — $I_x = I_y$. Такие сечения называются *равноустойчивыми*. Так, чтобы сечение, показанное на рис. 11, з, стало *равноустойчивым*, швеллеры надо раздвинуть на расстояние $\approx 19,6$ см.

Тогда получаем: $I_y = 2 \left[113 + 23,4 (9,8 - 2,07)^2 \right] = 3022 \text{ см}^4 \approx I_x$.

Из равноустойчивых сечений наиболее рациональными являются полые тонкостенные трубчатые и коробчатые сечения, в которых материал смещен от центра тяжести, что обеспечивает при заданной площади сечения наибольший радиус инерции и, соответственно, наибольшее значение удельного радиуса k .

Наименее рациональны сплошные сечения и совершенно нерациональны сечения, у которых главные моменты инерции сильно отличаются, т.е. $I_x \gg I_y$.

7. Продольно-поперечный изгиб

Рассмотрим тонкий гибкий стержень, подвергающийся одновременному действию продольной сжимающей силы F и некоторой системы поперечных сил, создающих поперечный изгиб (рис. 12). В результате совместного действия продольных и поперечных сил стержень изгибается и в его сечениях возникают два изгибающих момента: $M_{\text{пп}}$ — момент от *поперечной нагрузки*; $M_{\text{пр}}$ — момент от *продольной нагрузки*.

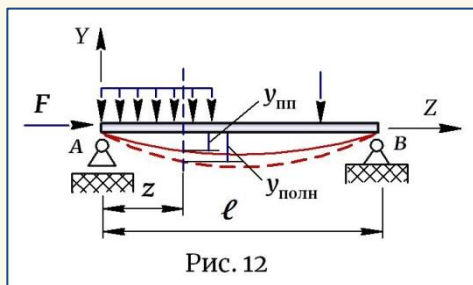


Рис. 12

|| Изгиб, когда в поперечных сечениях стержня одновременно возникают изгибающие моменты от продольных и поперечных сил, называется ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНЫМ ИЗГИБОМ.

При изучении данного вопроса необходимо пояснить причину возникновения в сечении двух изгибающих моментов — поперечного $M_{\text{пш}}$ и продольного $M_{\text{пр}}$. Момент от поперечной нагрузки $M_{\text{пш}}$ не вызывает вопросов и подробно рассматривается в теме «Плоский поперечный изгиб». Он определяется только поперечными силами, является функцией координаты сечения Z и не зависит от продольной силы F . Момент $M_{\text{пр}}$, создаваемый продольной силой, зависит не только от этой силы, но и от поперечных сил, создающих поперечный изгиб, а значит, зависит от момента $M_{\text{пш}}$. Предполагая что сила F меньше критической и не вызывает продольный изгиб, момент $M_{\text{пр}}$ является следствием искривления оси стержня от поперечной нагрузки и возникает в результате того, что при поперечном изгибе линия действия продольной силы оказывается смещенной по отношению к изогнутой оси стержня и не проходит через центры тяжести сечений, поэтому действие продольной силы в каждом сечении проявляется в виде изгибающего момента, определяемого как «сила на плечо», т.е. на расстояние от ее линии до искривленной оси. Следовательно, продольная сила в каждом сечении создает дополнительные изгибающие моменты и оказывает существенное влияние на величину изгиба стержня, увеличивая (в случае сжатия) или уменьшая (в случае растяжения) его кривизну.

Однако следует заметить, что влияние продольной силы на изгиб зависит от жесткости элемента. При расчете жестких элементов, т.е. элементов с нулевой гибкостью, работающих на сжатие и изгиб, в силу малости искривления от поперечной нагрузки изгибающий момент от продольной силы весьма незначителен, поэтому влиянием сжимающей силы на изгиб можно пренебречь. В жестких стержнях расчет можно выполнять на исходной (*недеформированной*) схеме и использовать при решении задачи принцип независимости действия сил, т.е. рассматривать случай как комбинацию независимых деформаций, определяя напряжения и деформации от каждой нагрузки в отдельности и алгебраически суммируя полученные результаты. Однако в случае гибких сжато-изогнутых стержней расчет следует выполнять по *деформированной* схеме, т.е. с учетом искривления оси стержня. В этих элементах вследствие их высокой гибкости возника-

ют большие упругие перемещения и продольная сила помимо равномерного сжатия будет оказывать существенное влияние на величину изгиба, создавая в сечениях стержня дополнительные (к поперечным) изгибающие моменты значительной величины и вызывая соответствующие прогибы.

Возвращаемся к схеме на рис. 12. Помещаем стержень в систему координат $Y-Z$ и на изогнутом состоянии (пунктирная линия), рассмотрим сечение Z , в котором возникает погиб $y_{\text{полн}}$, состоящий из прогиба от поперечной нагрузки $y_{\text{пш}}$ и дополнительного прогиба $(y - y_{\text{пш}})$, вызванного силой F .

Полный изгибающий момент в сечении будет рассматриваться как сумма моментов от поперечной и продольной нагрузки, и с учетом значения (4) соответственно равен:

$$M_{\text{полн}} = M_{\text{пш}} + M_{\text{пр}} = \parallel M_{\text{пр}} = -Fy_{\text{полн}} \parallel = M_{\text{пш}} - Fy_{\text{полн}}. \quad (29)$$

Определение полного изгибающего момента $M_{\text{полн}}$ является трудно выполнимой задачей, так как слагаемые, входящие в уравнение (29), связаны между собой и взаимозависимы, что не позволяет использовать принцип независимости действия сил. Если вычисление поперечного момента $M_{\text{пш}}$ не вызывает проблем, то определение $M_{\text{пр}}$ не представляется возможным, поскольку для этого необходимо знать величину прогиба $y_{\text{полн}}$, который, в свою очередь, зависит от поперечных сил и момента $M_{\text{пш}}$. Поэтому задача продольно-поперечного изгиба является статически неопределимой и, чтобы выполнить ее точное решение, необходимо составить и решить дифференциальное уравнение изогнутой оси стержня.

Используем уравнение (3), рассмотренное выше, и на основании выражения (29) получаем:

$$\boxed{\frac{d^2 y_{\text{полн}}}{dz^2} = \frac{M_{\text{полн}}}{EI_x}} \rightarrow \frac{d^2 y_{\text{полн}}}{dz^2} = \frac{M_{\text{пш}} - Fy_{\text{полн}}}{EI_x} = \frac{M_{\text{пш}}}{EI_x} - \frac{Fy_{\text{полн}}}{EI_x}. \quad (30)$$

Подставим сюда ранее принятое обозначение (8) $\rightarrow k^2 = F/EI_x$ и из выражения (30) получаем линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка –

$$\frac{d^2 y_{\text{полн}}}{dz^2} + k^2 y_{\text{полн}} = \frac{M_{\text{пш}}}{EI_x}, \quad (31)$$

решение которого имеет вид:

$$y = A \sin kz + B \cos kz + y^* , \quad (32)$$

где A и B – постоянные интегрирования; y^* – некоторое частное решение неоднородного дифференциального уравнения (31), зависящее от момента M_{III} , определяемого видом поперечной нагрузки.

Следует заметить, что продольно-поперечный изгиб является сложной физико-математической задачей, требующей особого подхода и использования сложного математического аппарата. Точное решение этой задачи возможно только для очень узкого круга элементов, имеющих простую схему нагружения поперечными силами. При более сложных расчетных схемах и множестве участков на стержне решение становится крайне затруднительным и не всегда выполнимым. Примеры некоторых таких задач рассмотрены в соответствующей литературе, однако даже для простейших схем решение получается громоздким, трудоемким и неудобным для использования в практических целях. Наиболее простым приемом решения задач на продольно-поперечный изгиб является приближенный способ расчета, основанный на допущении о том, что изогнутая ось стержня при любой поперечной нагрузке, направленной в одну сторону, принимает форму синусоиды (метод С.П. Тимошенко). Такое допущение позволяет получить простое и удобное решение, которое при симметричном нагружении является достаточно точным, а в случае несимметричной нагрузки результаты получаются менее точными, но в пределах принятых технических норм. Учитывая схематизацию всего расчетного механизма в механике материалов и использование целого ряда гипотез и допущений, полученная погрешность является приемлемой и вполне допустимой в инженерной практике.

Выполним решение данной задачи *приближенным методом*:

★ Предположим, что от действия поперечной нагрузки изогнутая ось стержня принимает форму *синусоиды* и описывается функцией –

$$y_{III} = f_{III} \sin \frac{\pi z}{\ell} , \quad (33)$$

где f_{III} – это наибольший прогиб от поперечной нагрузки, который можно определить любым известным способом – методом Кастилиано, с помощью интеграла Мора, путем перемножения эпюр и др.

Тогда дифференциальное уравнение изогнутой оси стержня на основании (3) принимает вид –

$$\frac{d^2 y_{\text{III}}}{dz^2} = \frac{M_{\text{III}}}{EI_x}, \quad (34)$$

откуда момент от поперечной нагрузки с учетом (33) равен:

$$M_{\text{III}} = EI_x \frac{d^2 y_{\text{III}}}{dz^2} = EI_x \left(f_{\text{III}} \sin \frac{\pi z}{\ell} \right)'''. \quad (35)$$

★ Предположим теперь, что от совместного действия продольной и поперечной нагрузки изогнутая ось стержня также принимает форму *синусоиды* и описывается функцией –

$$y_{\text{ПОЛН}} = f_{\text{ПОЛН}} \sin \frac{\pi z}{\ell}, \quad (36)$$

где $f_{\text{ПОЛН}}$ – наибольший прогиб при продольно-поперечном изгибе.

Тогда дифференциальное уравнение изогнутой оси стержня на основании (3) принимает вид –

$$\frac{d^2 y_{\text{ПОЛН}}}{dz^2} = \frac{M_{\text{ПОЛН}}}{EI_x}, \quad (37)$$

откуда полный изгибающий момент с учетом (36) равен:

$$M_{\text{ПОЛН}} = EI_x \frac{d^2 y_{\text{ПОЛН}}}{dz^2} = EI_x \left(f_{\text{ПОЛН}} \sin \frac{\pi z}{\ell} \right)'''. \quad (38)$$

★ Подставляем значения (35), (36) и (38) в выражение (29) →

$$EI_x \left(f_{\text{ПОЛН}} \sin \frac{\pi z}{\ell} \right)'' = EI_x \left(f_{\text{III}} \sin \frac{\pi z}{\ell} \right)'' - F f_{\text{ПОЛН}} \sin \frac{\pi z}{\ell}, \quad (39)$$

дважды дифференцируем и получаем –

$$-EI_x \frac{\pi^2}{\ell^2} f_{\text{ПОЛН}} \sin \frac{\pi z}{\ell} = -EI_x \frac{\pi^2}{\ell^2} f_{\text{III}} \sin \frac{\pi z}{\ell} - F f_{\text{ПОЛН}} \sin \frac{\pi z}{\ell}.$$

Изменяем знак слагаемых на противоположный, сокращаем их на $\sin \frac{\pi z}{\ell}$, делим на значение $\frac{\pi^2 EI_x}{\ell^2}$ и получаем:

$$f_{\text{ПОЛН}} = f_{\text{III}} + \frac{F}{\frac{\pi^2 EI_x}{\ell^2}} \cdot f_{\text{ПОЛН}}, \quad (40)$$

где выражение в знаменателе по своему виду *совпадает* с формулой Эйлера (16) для критической силы сжатого стержня с шарнирно за-

крепленными концами, когда $\mu = 1$. Поэтому его обозначают $F_{\text{Э}}$ и называют *эйлеровой силой*:

$$F_{\text{Э}} = \frac{\pi^2 EI_x}{\ell^2}. \quad (41)$$

Однако это совпадение чисто формальное. По физическому смыслу эйлерова сила $F_{\text{Э}}$ отличается от критической $F_{\text{кр}}$ следующим:

★ формула Эйлера для $F_{\text{кр}}$ (16) в расчетах на устойчивость применяется только для стержней большой гибкости, т.е. когда $\lambda \geq \lambda_{\text{пред}}$, а эйлерова сила $F_{\text{Э}}$ от гибкости стержня не зависит и для любых сжато-изогнутых стержней вычисляется по формуле (41);

★ В формулу Эйлера для $F_{\text{кр}}$ (16) входит минимальный момент инерции $I = I_{\text{мин}}$, а в выражение эйлеровой силы (41) входит момент инерции относительно той из главных осей инерции сечения, которая перпендикулярна плоскости действия поперечной нагрузки и, соответственно, принята за нейтральную ось. Как правило, такой осью является ось с $I = I_{\text{макс}}$.

В результате получаем окончательную формулу для наибольшего прогиба при продольно-поперечном изгибе в виде:

$$f_{\text{полн}} = \frac{f_{\text{пш}}}{1 - \frac{F}{F_{\text{Э}}}}, \quad (42)$$

где F – продольная сила; $f_{\text{пш}}$ – наибольший прогиб от поперечной нагрузки; $F_{\text{Э}} = \frac{\pi^2 EI_x}{\ell^2}$ – эйлерова сила (см. пояснение выше).

Из формулы (42) следует, что соотношение между полным прогибом $f_{\text{полн}}$ и прогибом от поперечной нагрузки $f_{\text{пш}}$ зависит от отношения $F/F_{\text{Э}}$ – сжимающей силы к эйлеровой, а поэтому эта величина является, по сути, *критерием жесткости* стержня при продольно-поперечном изгибе. Если это отношение близко к нулю, стержень имеет большую жесткость, а если близко к единице – стержень является гибким. Когда величина сжимающей силы F приближается к значению эйлеровой силы $F_{\text{Э}}$, полный прогиб стержня резко возрастает и может во много раз превысить прогиб, вызванный действием

только поперечной нагрузки. В предельном случае, когда $F = F_{\text{Э}}$, прогиб стержня, согласно формуле (42), становится равным бесконечности, что получается математически, но невозможно в реальности. Здесь следует понимать, что дифференциальное уравнение изогнутой оси стержня (3), лежащее в основе данного решения, получено с использованием приближенного уравнения кривизны кривой $1/\rho = d^2y/dz^2$, принятого для малых деформаций. Если же деформации велики, как это имеет место в данной задаче, выражение кривизны при выводе формул должно приниматься точным. И тогда в случае, когда $F = F_{\text{Э}}$, прогибы стержня не будут равны бесконечности, они будут хотя и большими, но конечными величинами. Поэтому применения данной формулы допустимо только при соотношении сил $F \leq 0,8 F_{\text{Э}}$. При этом наиболее точное решение получается, когда поперечная нагрузка симметричная и вид изогнутой оси стержня действительно напоминает *синусоиду*, для несимметричной поперечной нагрузки результаты менее точные и расхождение составляет порядка 5–7%.

Продольно-поперечный изгиб по виду нагружения можно отнести к *сложному сопротивлению*, так как здесь имеет место комбинация деформаций – сжатие плюс изгиб от продольных и поперечных сил. Напряжения для этих деформаций определяются по формулам –

$$\sigma_N = -\frac{F}{A} \text{ – от сжатия; } \sigma_{M_{\text{ПП}}} = \pm \frac{M_{\text{ПП}}}{W_{\text{н.о.}}} \text{ – от поперечного изгиба;}$$

$$\sigma_{M_{\text{ПР}}} = \pm \frac{M_{\text{ПР}}}{W_{\text{н.о.}}} = \pm \frac{F y_{\text{полн}}}{W_{\text{н.о.}}} \text{ – от изгиба под действием силы } F,$$

а суммарные напряжения в сечении при продольно-поперечном изгибе на основании принципа независимости действия сил будут равны:

$$\sigma = \sigma_N + \sigma_{M_{\text{ПП}}} + \sigma_{M_{\text{ПР}}} = -\frac{F}{A} \pm \frac{M_{\text{ПП}}}{W_{\text{н.о.}}} \pm \frac{F y_{\text{полн}}}{W_{\text{н.о.}}}. \quad (43)$$

Максимальные напряжения возникают в опасном сечении – сечении с прогибом $f_{\text{полн}}$ – и являются сжимающими. *Условие прочности при продольно-поперечном изгибе* имеет вид:

$$\sigma_{\text{max}} = -\left(\frac{F}{A} + \frac{M_{\text{ПП}}}{W_{\text{н.о.}}} + \frac{F f_{\text{полн}}}{W_{\text{н.о.}}} \right) \leq [\sigma]_{\text{сж}}. \quad (44)$$

Анализ формулы (44) с учетом значения (42) –

$$\sigma_{\max} = \left| \frac{F}{A} \right| + \left| \frac{M_{\text{III}}}{W_{\text{H.O.}}} \right| + \left| \frac{F f_{\text{III}}}{W_{\text{H.O.}} (1 - F/F_{\text{Э}})} \right|$$

(45)

показывает, что напряжения с увеличением продольных и поперечных сил изменяются нелинейно и возрастают быстрее, чем возрастает нагрузка, поэтому даже незначительное ее увеличение сверх расчетной может привести к значительному росту напряжений и разрушению конструкции.

Так, например, если продольную и поперечные силы увеличить в n – раз (значит, момент M_{III} также увеличится в n – раз), то в формуле (45) первые слагаемые возрастут пропорционально, а последнее слагаемое станет нелинейной функцией:

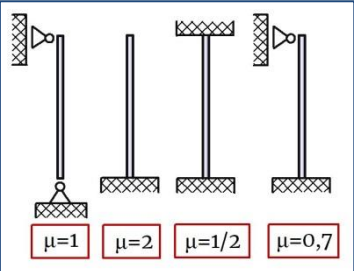
$$\sigma_{M_{\text{III}}} = \frac{nF \cdot n f_{\text{III}}}{W_{\text{H.O.}} (1 - nF/F_{\text{Э}})} = \frac{F \cdot f_{\text{III}}}{W_{\text{H.O.}}} \cdot \frac{n^2}{(1 - nF/F_{\text{Э}})}. \quad (46)$$

Поэтому расчет сжато-упругих стержней на продольно-поперечный изгиб следует выполнять не по условию прочности (44) и допускаемым напряжениям, а по допускаемой нагрузке согласно условию (2):

$$F_{\max} \leq [F]_{\text{уст}} = \frac{F_{\text{кр}}}{n_{\text{уст}}}.$$

При изучении данного вопроса предполагалось, что продольная сжимающая сила меньше критической и не приводит к продольному изгибу стержня. Ее влияние на деформацию изгиба является косвенным и проявляется как следствие поперечного изгиба. Однако в некоторых случаях при продольно-поперечном изгибе сжатые стержни могут искривляться и терять устойчивость, что зависит от положения главной оси с минимальным моментом инерции, поэтому их также необходимо проверять на устойчивость.

ОСНОВНЫЕ РАСЧЕТНЫЕ ФОРМУЛЫ

$F_{кр} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu \ell)^2}; \quad \sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$	Формула Эйлера для критической силы и критических напряжений
$\sigma_{кр} = a - b\lambda + c\lambda^2$	Формула Ф.С. Ясинского для критических напряжений
$[F]_{уст} = \frac{F_{кр}}{n_{уст}}; \quad [\sigma]_{уст} = \frac{\sigma_{кр}}{n_{уст}}$	Допускаемая сила и допускаемое напряжение на устойчивость
$\sigma_{\max} = \frac{F_{\max}}{A} \leq [\sigma]_{уст}$ $\sigma_{\max} = \frac{F_{\max}}{A} \leq \varphi[\sigma]_{сж}$	Условие устойчивости
$\lambda = \frac{\mu \ell}{i_{\min}}$	Гибкость стержня
$\lambda_{пред} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{шт}}}$	Предельная гибкость стержня
	Коэффициент приведения длины
$f_{полн} = \frac{f_{полн}}{1 - (F/F_{кр})}$	Наибольший прогиб при продольно-поперечном изгибе
$\sigma_{\max} = \frac{F}{A} - \frac{M_{п}}{W_{н.о.}} - \frac{F f_{полн}}{W_{н.о.}} \leq [\sigma]$	Условие прочности при продольно-поперечном изгибе

ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Оценка устойчивости элементов конструкций

Задача 1

Для сжимаемой двутавровой стойки (двутавр № 27) длиной $\ell = 4\text{ м}$ с шарнирно опертыми концами определить величину критической силы и критических напряжений, при которых стойка потеряет устойчивость. Принять для двутавра № 27: $I_y = I_{\min} = 260\text{ см}^4$, $A = 40,2\text{ см}^2$, $E = 2 \times 10^5\text{ МПа}$, $\sigma_{\text{шц}} = 200\text{ МПа}$.

РЕШЕНИЕ:

① Первоначально устанавливаем, к какой гибкости относится стержень. Если это *стержень большой гибкости* – для него можно применять формулы Эйлера, если это *стержень средней гибкости* – формулы Эйлера для него неприменимы. Оцениваем гибкость стержня:

★ Вычисляем минимальный радиус инерции сечения –

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{260}{40,2}} = 2,54\text{ см};$$

★ Вычисляем гибкость стойки и предельную гибкость для материала и сравниваем значения –

$$\lambda = \frac{\mu \ell}{i_{\min}} = \frac{1 \cdot 400}{2,54} = 157,5;$$

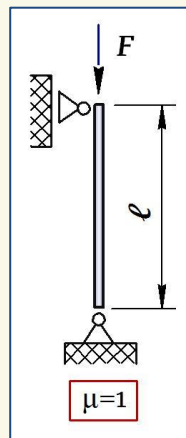
$$\lambda_{\text{пред}} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{\text{шц}}}} = \sqrt{\frac{3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^5}{200}} = 99,3.$$

Так как $\lambda > \lambda_{\text{пред}}$ – это стержень *большой гибкости*, и значит, для него формулы Эйлера применимы.

② Определяем $F_{\text{кр}}$ и $\sigma_{\text{кр}}$ по формулам Эйлера:

$$F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu \ell)^2} = \frac{3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 260 \cdot 10^4}{(1 \cdot 4000)^2} = 320437\text{ Н} = 320\text{ кН};$$

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \frac{3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^5}{157,5^2} = 79,6\text{ МПа}.$$



Примечание.

Так как стойка подвергается сжатию, критические напряжения в ней можно также вычислить по формуле —

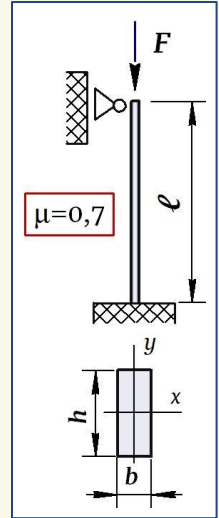
$$\sigma_{кр} = \frac{F_{кр}}{A} = \frac{320 \cdot 10^3}{40,2 \cdot 10^2} = 79,6 \text{ МПа.}$$

Задача 2

Стальной стержень из стали Ст.5, имеющий длину $\ell = 0,5 \text{ м}$ и прямоугольное сечение $b \times h = 20 \times 40 \text{ мм}$, подвергается сжатию силой $F = 70 \text{ кН}$. Проверить устойчивость стержня и определить коэффициент запаса устойчивости $n_{уст}$. Принять для материала стержня: $E = 2 \times 10^5 \text{ МПа}$, $\sigma_{шт} = 240 \text{ МПа}$.

РЕШЕНИЕ:

① Проверить устойчивость стержня — это значит определить силу, при которой он потеряет устойчивость, т.е. критическую силу $F_{кр}$, и сравнить ее с заданной рабочей нагрузкой. Для определения силы $F_{кр}$ оцениваем гибкость стержня:



$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{hb^3}{12 \cdot bh}} = \frac{b}{\sqrt{12}} = \frac{20}{\sqrt{12}} = 5,77 \text{ мм};$$

$$\lambda = \frac{\mu \ell}{i_{\min}} = \frac{0,7 \cdot 0,5 \cdot 10^3}{5,77} = 60,6;$$

$$\lambda_{\text{пред}} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{шт}}} = \sqrt{\frac{3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^5}{240}} = 90,6.$$

Так как $\lambda < \lambda_{\text{пред}}$ — это стержень *средней гибкости*, и значит, для него формулы Эйлера неприменимы.

② Определяем критические напряжения по формуле Ф.С. Ясинского — $\sigma_{кр} = a - b\lambda + c\lambda^2$, а затем вычисляем $F_{кр}$:

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda + c\lambda^2 = \parallel \text{Ст.5} \rightarrow a = 464 \text{ МПа}, b = 3,26 \text{ МПа}, c = 0 \parallel =$$

$$= 464 - 3,26 \cdot 60,6 = 266 \text{ МПа};$$

$$F_{кр} = \sigma_{кр} A = \sigma_{кр} \cdot bh = 266 \cdot (20 \times 40) = 212,8 \text{ кН}.$$

Так как $F_{\text{рабоч}} < F_{кр}$, *устойчивость стержня обеспечена.*

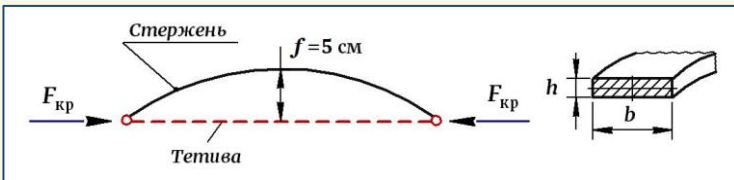
③ Определяем коэффициент запаса устойчивости стержня, т.е. с каким запасом на устойчивость он работает:

$$n_{уст} = \frac{F_{кр}}{F_{\text{рабоч}}} = \frac{212,8}{70} \approx 3,$$

стержень работает с трехкратным запасом на устойчивость.

Задача 3

Прямой стальной стержень длиной $\ell = 1 \text{ м}$ с прямоугольным сечением $b \times h = 25 \times 2,5 \text{ мм}$ изогнут в виде лука с упругим прогибом посередине $f = 5 \text{ см}$. Концы стержня связаны тетивой. Определить усилие в тетиве $F_{\text{тет}}$ и наибольшие напряжения в стержне. Принять для стержня: $E = 2 \times 10^5 \text{ МПа}$, $\mu = 1$.



РЕШЕНИЕ:

① При стягивании тетивы стержень изогнулся, т.е. потерял устойчивость, но не разрушился, а это значит, что сила сжатия стержня, равная силе стягивания тетивы, достигла значения критической силы, т.е. $F_{\text{тет}} = F_{кр}$.

② Для определения $F_{\text{тет}} = F_{кр}$ оцениваем гибкость стержня:

$$I_{\min} = \frac{bh^3}{12} = \frac{25 \cdot 2,5^3}{12} = 32,55 \text{ мм}^4; \quad i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{32,55}{25 \cdot 2,5}} = 0,71 \text{ мм};$$

$$\lambda = \frac{\mu \ell}{i_{\min}} = \frac{1 \cdot 1000}{0,71} \approx 1390; \quad \lambda_{\text{пред}} = 100 \text{ (для сталей)}.$$

Так как $\lambda \gg \lambda_{\text{пред}}$ — это стержень *большой гибкости*, и значит, для него формулы Эйлера применимы.

③ Используем формулу Эйлера для вычисления критической силы:

$$F_{\text{кр}} = F_{\text{тет}} = \frac{\pi^2 EI_{\text{min}}}{(\mu \ell)^2} = \frac{3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 32,55}{(1 \cdot 1000)^2} = 64,2 \text{ Н.}$$

④ Определяем наибольшие напряжения в стержне:

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{max}} &= \sigma_N + \sigma_{\text{изг}} = -\frac{N}{A} - \frac{M_{\text{изг}}}{W_{\text{н.о.}}} = -\frac{N}{bh} - \frac{F_{\text{кр}} \cdot f}{hb^2/6} = \\ &= -\frac{64,2}{25 \cdot 2,5} - \frac{64,2 \cdot 50}{(25 \cdot 2,5)^2 / 6} = -124,3 \text{ МПа.} \end{aligned}$$

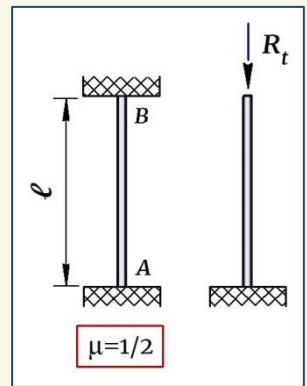
Задача 4

Двутавр №24 длиной $\ell = 5 \text{ м}$ жестко зашпелен обоими концами в стены и монтаж этой конструкции производился при $t_1^\circ = +10^\circ \text{С}$. При нагреве до какой температуры t_2° двутавр потеряет устойчивость? Принять для двутавра №24: $I_y = I_{\text{min}} = 198 \text{ см}^4$; $A = 34,8 \text{ см}^2$; $i_{\text{min}} = \sqrt{I_{\text{min}}/A} = 2,38 \text{ см}$; $E = 2 \times 10^5 \text{ МПа}$; $\alpha = 125 \times 10^{-7} \text{ град}^{-1}$.

РЕШЕНИЕ:

① При нагревании двутавр стремится увеличить свою длину, упирается в опоры А и В, в результате чего со стороны опор возникают реакции $R_A = R_B = R_t$, сжимающие двутавр. Двутавр теряет устойчивость и изогнется тогда, когда сила R_t станет равна критической силе, т.е. $R_t = F_{\text{кр}}$.

② Определяем силу R_t , сжимающую двутавр. Для этого отбрасываем одну из опор, заменяем ее действие силой R_t и задаем условие, что от действия температуры и сжимающей силы полное изменение длины двутавра равно



нулю, т.е. $\Delta l_{\text{полн}} = 0$, или на основании принципа независимости действия сил –

$$\Delta l_{\text{полн}} = \Delta l_{t^\circ} + \Delta l_{R_t} = 0, \quad (1)$$

где

$$\Delta l_{t^\circ} = \alpha l \Delta t^\circ; \quad \Delta l_{R_t} = -\frac{R_t l}{EA}. \quad (2)$$

Подставляем значения (2) в (1) и получаем:

$$\alpha l \Delta t^\circ - \frac{R_t l}{EA} = 0 \rightarrow \boxed{R_t = \alpha EA \cdot \Delta t^\circ}. \quad (3)$$

③ Теперь определяем критическую силу $F_{\text{кр}}$, для чего сначала устанавливаем гибкость стержня:

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{(1/2) \cdot 500}{2,38} = 105; \quad \lambda_{\text{пред}} = 100 \text{ (для сталей)}.$$

Так как $\lambda > \lambda_{\text{пред}}$ – это стержень *большой гибкости*. Применяем формулу Эйлера для критической силы:

$$\boxed{F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu l)^2}}. \quad (4)$$

④ Приравниваем выражения для R_t (3) и $F_{\text{кр}}$ (4) –

$$\boxed{R_t = F_{\text{кр}}} \rightarrow \alpha EA \cdot \Delta t^\circ = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu l)^2} \rightarrow$$

$$\Delta t^\circ = \frac{\pi^2 I_{\min}}{\alpha A (\mu l)^2} = \frac{3,14^2 \cdot 198 \cdot 10^4}{125 \cdot 10^{-7} \cdot 34,8 \cdot 10^2 \left(\frac{1}{2} \cdot 5000\right)^2} = 72^\circ \text{C}.$$

$$\Delta t^\circ = t_2^\circ - t_1^\circ \rightarrow t_2^\circ = t_1^\circ + \Delta t^\circ = 72 + 10 = 82^\circ \text{C},$$

т.е. при нагреве двутавра до температуры 82°C он потеряет устойчивость и изогнется.

Задача 5

Для деревянной стойки ($E = 0,9 \cdot 10^4$ МПа, $\sigma_{\text{шт}} = 15$ МПа) прямоугольного сечения размерами $b \times h = 12 \times 20$ см и длиной $\ell = 6$ м определить величину допускаемого сжимающего усилия $[F]_{\text{уст}}$ и допускаемого напряжения $[\sigma]_{\text{уст}}$, если коэффициент запаса устойчивости $n_{\text{уст}} = 3$.

РЕШЕНИЕ:

① Устанавливаем гибкость стойки:

$$I_{\min} = I_y = \frac{hb^3}{12} = \frac{20 \cdot 12^3}{12} = 2880 \text{ см}^4;$$

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{2880}{12 \cdot 20}} = 3,46 \text{ см};$$

$$\lambda = \frac{\mu \ell}{i_{\min}} = \frac{1 \cdot 600}{3,46} = 173,4;$$

$$\lambda_{\text{пред}} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{\text{шт}}}} = \sqrt{\frac{3,14^2 \cdot 0,9 \cdot 10^4}{15}} = 77.$$

Так как $\lambda > \lambda_{\text{пред}}$ — это стойка *большой гибкости*, и значит, для нее формулы Эйлера применимы.

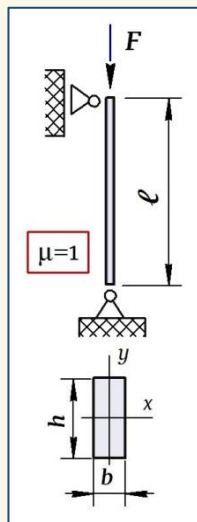
② Определяем $F_{\text{кр}}$ и $\sigma_{\text{кр}}$ по формулам Эйлера:

$$F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu \ell)^2} = \frac{3,14^2 \cdot 0,9 \cdot 10^4 \cdot 2880 \cdot 10^4}{(1 \cdot 6000)^2} = 71 \text{ кН};$$

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \frac{3,14^2 \cdot 0,9 \cdot 10^4}{173,4^2} = 3 \text{ МПа}.$$

③ Определяем для стержня допускаемую силу и допускаемое напряжение на устойчивость:

$$[F]_{\text{уст}} = \frac{F_{\text{кр}}}{n_{\text{уст}}} = \frac{71}{3} = 23,7 \text{ кН}; \quad [\sigma]_{\text{уст}} = \frac{\sigma_{\text{кр}}}{n_{\text{уст}}} = \frac{3}{3} = 1 \text{ МПа}.$$

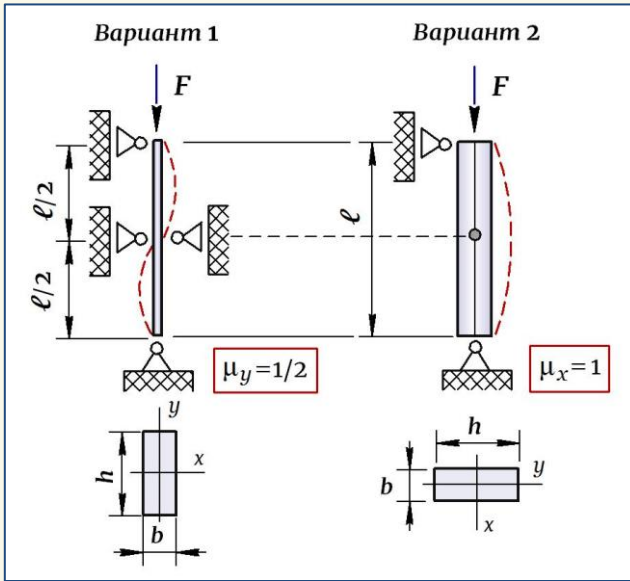


Задача 6

Решить ту же **Задачу 5**, но при условии, что в данной стойке на середине ее длины в плоскости наименьшей жесткости установлены боковые подпорки (см. рис.).

Примечание.

Плоскость наименьшей жесткости – это плоскость, проходящая в сечении перпендикулярно к главной центральной оси, имеющей I_{\max} .



РЕШЕНИЕ:

! При наличии боковых подпорок в случае потери устойчивости стойка изогнется в той плоскости, в которой ее гибкость будет больше.

① Определяем гибкость стойки относительно оси y (**Вариант 1**):

$$I_y = \frac{hb^3}{12} = \frac{20 \cdot 12^3}{12} = 2880 \text{ см}^4; \quad A = bh = 12 \cdot 20 = 240 \text{ см}^2;$$

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{2880}{240}} = 3,46 \text{ см}; \quad \lambda_y = \frac{\mu_y \ell}{i_y} = \frac{(1/2) \cdot 600}{3,46} = 86,7.$$

Примечание.

В этом варианте на одной длине стержня ложатся две полуволны синусоиды, т.е. $n = 2$, и значит, $\mu_y = 1/n = 1/2$.

② Определяем гибкость стойки относительно оси x (**Вариант 2**):

$$I_x = \frac{bh^3}{12} = \frac{12 \cdot 20^3}{12} = 8000 \text{ см}^4; A = 240 \text{ см}^2;$$

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{8000}{240}} = 5,77 \text{ см}; \lambda_x = \frac{\mu_x \ell}{i_x} = \frac{1 \cdot 600}{5,77} = 104.$$

Примечание.

В этом варианте на одной длине стержня ложится одна полуволна синусоиды, т.е. $n=1$, и значит, $\mu_x = 1/n = 1$.

③ Сравниваем значения λ_x и λ_y . Так как $\lambda_x > \lambda_y$, значит, при наличии боковых подпорок стойка является более гибкой по **Варианту 2** и изогнется именно таким образом, как показано на правом рисунке. Кроме того, в этой плоскости стойка является стержнем *большой гибкости*, так как $\lambda_x > \lambda_{\text{пред}}$ ($\lambda_{\text{пред}} = 77$ – см. **Задачу 5**). Поэтому для определения $F_{\text{кр}}$ и $\sigma_{\text{кр}}$ используем формулы Эйлера:

$$F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EI_x}{(\mu_x \ell)^2} = \frac{3,14^2 \cdot 0,9 \cdot 10^4 \cdot 8000 \cdot 10^4}{(1 \cdot 6000)^2} = 197 \text{ кН}.$$

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_x^2} = \frac{3,14^2 \cdot 0,9 \cdot 10^4}{104^2} = 8,2 \text{ МПа}.$$

④ Определяем допускаемую силу и допускаемое напряжение на устойчивость:

$$[F]_{\text{уст}} = \frac{F_{\text{кр}}}{n_{\text{уст}}} = \frac{197}{3} = 66 \text{ кН}; [\sigma]_{\text{уст}} = \frac{\sigma_{\text{кр}}}{n_{\text{уст}}} = \frac{8,2}{3} = 2,7 \text{ МПа}.$$

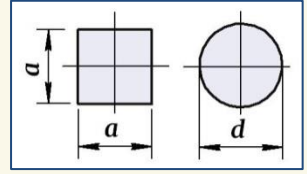
Вывод. Установка на стержне боковых подпорок повышает устойчивость конструкции в 2,5 – 3 раза.

Задача 7

Какой из двух одинаковых стержней – *квадратного* или *круглого* сечения, условия закрепления и нагружения которых одинаковы, является более гибким, если площади сечений равны?

РЕШЕНИЕ:

① На основании формулы $\lambda = \frac{\mu \ell}{i_{\min}}$, учитывая одинаковые условия закрепления и нагружения стержней, более гибким будет тот стержень, у которого i_{\min} меньше.



② Из равенства площадей сечений $A_{\text{квадр}} = A_{\text{круг}}$ получаем:

$$\left. \begin{aligned} A_{\text{квадр}} &= a^2 \\ A_{\text{круг}} &= \frac{\pi d^2}{4} \end{aligned} \right\} \rightarrow a^2 = \frac{\pi d^2}{4} \rightarrow a = 0,886 d. \quad (1)$$

③ Определяем i_{\min} для каждого сечения:

★ для квадрата —

$$i_{\min (\text{квадр})} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{a^4}{12 \cdot a^2}} = \frac{a}{\sqrt{12}} = 0,289 a = 0,256 d; \quad (2)$$

★ для круга —

$$i_{\min (\text{круг})} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{\pi d^4 / 64}{\pi d^2 / 4}} = \frac{d}{4} = 0,25 d. \quad (3)$$

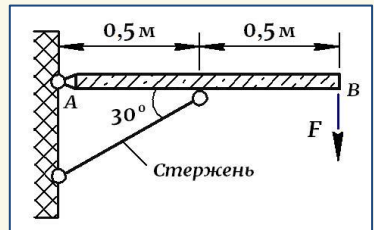
④ Сравниваем значения (2) и (3) и получаем:

$$i_{\min (\text{круг})} < i_{\min (\text{квадр})} \rightarrow$$

значит, более гибким является стержень круглого сечения.

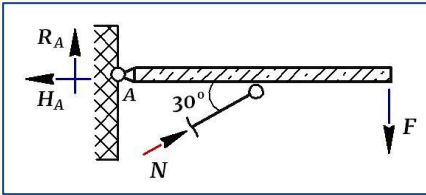
Задача 8

Абсолютно жесткий брус АВ, шарнирно укрепленный в стене, поддерживается стальным стержнем диаметром $d = 20$ мм и нагружается силой F , как показано на расчетной схеме. Определить, при какой силе F стержень изогнется, т.е. потеряет устойчивость. Принять для стержня: $E = 2 \times 10^5$ МПа.



РЕШЕНИЕ:

① При нагружении бруса стержень, поддерживающий брус, сжимается и при определенном значении продольной силы N он может потерять устойчивость (изогнуться). Методом сечений определяем эту продольную силу N :



$$\sum M_A = 0: N \sin 30^\circ \cdot 0,5 - F \cdot 1,0 = 0,$$

откуда $N = 4F$. (1)

② Поддерживающий стержень потеряет устойчивость тогда, когда продольная сила N станет равна критической силе $F_{кр}$.

Для определения $F_{кр}$ оцениваем гибкость стержня:

$$I_{\min} = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{3,14 \cdot 20^4}{64} = 7850 \text{ мм}^4; A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 20^2}{4} = 314 \text{ мм}^2;$$

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{7850}{314}} = 5 \text{ мм}; \ell = \frac{0,5}{\cos 30^\circ} = 0,577 \text{ м} = 577 \text{ мм};$$

$$\lambda = \frac{\mu \ell}{i_{\min}} = \frac{1 \cdot 577}{5} = 115 > \lambda_{\text{пред}} \text{ (для сталей } \lambda_{\text{пред}} \approx 100).$$

Стержень является стержнем большой гибкости, поэтому для вычисления критической силы применяем формулу Эйлера:

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu \ell)^2} = \frac{3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 7850}{(1 \cdot 577)^2} = 46,5 \text{ кН}. \quad (2)$$

③ Условием потеря устойчивости является $N = F_{кр}$, поэтому подставляем значение (2) в (1) и получаем:

$$N = F_{кр} = 4F \rightarrow F = \frac{F_{кр}}{4} = \frac{46,5}{4} = 11,6 \text{ кН},$$

т.е. стержень потеряет устойчивость и изогнется, если в брус AB приложить силу $F = 11,6$ кН.

Проектировочные расчеты на устойчивость

Задача 9

Стойка двутаврового профиля длиной $\ell = 2,6$ м работает на продольную сжимающую силу $F = 125$ кН. Материал стойки – Ст.3, $E = 2 \times 10^5$ МПа, $\lambda_{\text{пред}} = 100$. Используя формулу Эйлера, подобрать по сортаменту номер двутаврового сечения и проверить возможность применения для расчета формулы Эйлера. Задать для стойки коэффициент запаса устойчивости $n_{\text{уст}} = 2$.

РЕШЕНИЕ:

① На основании заданного коэффициента запаса устойчивости, определяем для стойки критическую силу $F_{\text{кр}}$, при которой она потеряет устойчивость:

$$n_{\text{уст}} = \frac{F_{\text{кр}}}{F} \quad \rightarrow \quad F_{\text{кр}} = F \cdot n_{\text{уст}} = 125 \cdot 2 = 250 \text{ кН.}$$

② Используя формулу Эйлера, подбираем двутавр:

$$F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EI_{\text{min}}}{(\mu \ell)^2}, \quad \text{отсюда}$$

$$I_{\text{min}} = \frac{F_{\text{кр}} (\mu \ell)^2}{\pi^2 E} = \frac{250 \cdot 10^3 (0,7 \cdot 2600)^2}{3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^5} = 41,99 \text{ см}^4.$$

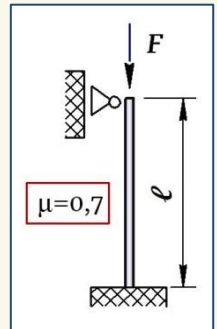
Из таблиц сортамента выбираем двутавр № 14 —

$$I_{\text{min}} = 41,9 \text{ см}^4; \quad A = 17,4 \text{ см}^2; \quad i_{\text{min}} = \sqrt{\frac{I_{\text{min}}}{A}} = \sqrt{\frac{41,9}{17,4}} = 1,55 \text{ см.}$$

③ Определяем гибкость стойки и устанавливаем правомерность использования формулы Эйлера:

$$\lambda = \frac{\mu \ell}{i_{\text{min}}} = \frac{0,7 \cdot 2600}{1,55} = 117,4 > \lambda_{\text{пред}},$$

это *стойка большой гибкости*, значит, использование формулы Эйлера для ее расчета является правомерным.



Задача 10

Стальной стержень круглого трубчатого сечения размерами $D = 12$ см, $d = 10$ см и длиной $\ell = 5$ м имеет жестко заделанные концы и подвергается сжатию продольной силой F . Материал стержня – сталь Ст.5: $E = 2 \times 10^5$ МПа, $\sigma_{\text{шт}} = 200$ МПа, $[\sigma]_{\text{сж}} = 160$ МПа. С помощью коэффициента φ определить для стержня допускаемую силу на устойчивость $[F]_{\text{уст}}$, силу $F_{\text{кр}}$, при которой стержень потеряет устойчивость, а также коэффициент запаса устойчивости $n_{\text{уст}}$.

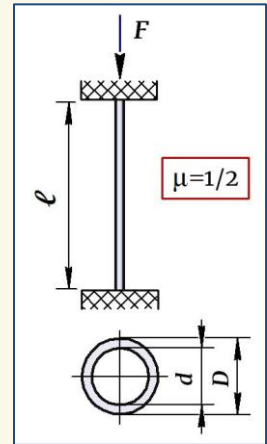
РЕШЕНИЕ:

① По заданным размерам сечения определяем геометрические характеристики:

$$A = \frac{\pi(D^2 - d^2)}{4} = \frac{3,14(12^2 - 10^2)}{4} = 34,54 \text{ см}^2;$$

$$I_{\min} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{64} = \frac{3,14(12^4 - 10^4)}{64} = 526,44 \text{ см}^4;$$

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{526,44}{34,54}} = 3,9 \text{ см.}$$



② Используя коэффициент φ , определяем допускаемую силу на устойчивость $[F]_{\text{уст}}$ —

$$\star \boxed{F = \sigma A} \rightarrow [F]_{\text{уст}} = [\sigma]_{\text{уст}} A, \text{ где } [\sigma]_{\text{уст}} = \varphi [\sigma]_{\text{сж}},$$

$$\text{отсюда } \boxed{[F]_{\text{уст}} = \varphi [\sigma]_{\text{сж}} A}; \quad (1)$$

★ Определяем гибкость стержня:

$$\lambda = \frac{\mu \ell}{i_{\min}} = \frac{(1/2)500}{3,9} = 64; \quad (2)$$

★ Для стали Ст.5 из таблицы коэффициентов φ для значений гибкости, ближайших к рассчитанному (2), выписываем значения φ и методом линейной интерполяции уточняем его величину для $\lambda = 64$:

Ст.5	
λ	φ
60	0,82
70	0,76

$$\varphi' = 0,82 - \frac{0,82 - 0,76}{10}(64 - 60) = 0,796. \quad (3)$$

Подставляем площадь кольцевого сечения A и значение (3) в формулу (1) и определяем:

$$[F]_{\text{уст}} = \varphi' [\sigma]_{\text{сж}} A = 0,796 \cdot 160 \cdot 34,54 \cdot 10^2 = 440 \text{ кН.}$$

③ Определяем критическую силу $F_{\text{кр}}$, при которой стержень потеряет устойчивость. Первоначально устанавливаем гибкость стержня:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{\text{пред}} &= \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{\text{пц}}}} = \sqrt{\frac{3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^5}{200}} = 100 \\ \lambda &= 64 - \text{см. расчет (2)} \end{aligned} \right\} \rightarrow \lambda < \lambda_{\text{пред}} -$$

– это *стержень средней гибкости* и, значит, для него формулы Эйлера неприменимы. По формуле Ф.С. Ясинского определяем критические напряжения $\sigma_{\text{кр}}$, а затем вычисляем $F_{\text{кр}}$:

$$\sigma_{\text{кр}} = a - b\lambda + c\lambda^2 = \parallel \text{Ст.5} \rightarrow a = 464 \text{ МПа}, b = 3,26 \text{ МПа}, c = 0 \parallel =$$

$$= 464 - 3,26 \cdot 64 = 255,4 \text{ МПа};$$

$$F_{\text{кр}} = \sigma_{\text{кр}} A = 255,4 \cdot 34,54 \cdot 10^2 = 882 \text{ кН.}$$

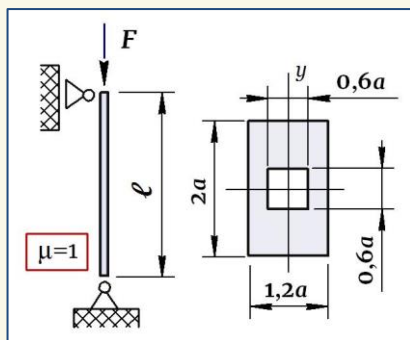
④ Определяем для стержня коэффициент запаса устойчивости:

$$\boxed{[F]_{\text{уст}} = \frac{F_{\text{кр}}}{n_{\text{уст}}}} \rightarrow n_{\text{уст}} = \frac{F_{\text{кр}}}{[F]_{\text{уст}}} = \frac{882}{440} = 2,$$

т.е. стержень имеет двукратный запас на устойчивость.

Задача 11

Стержень заданного сечения длиной $\ell = 4,8 \text{ м}$ подвергается сжатию силой $F = 850 \text{ кН}$. Из условия устойчивости с помощью таблиц значений коэффициентов φ подобрать размеры сечения стержня, если стержень выполнен из Ст.3 и для него — $E = 2 \times 10^5 \text{ МПа}$,



$[\sigma]_{\text{сж}} = 160 \text{ МПа}$, $\lambda_{\text{пред}} = 100$. Определить также для стержня $F_{\text{кр}}$ и коэффициент запаса устойчивости $n_{\text{уст}}$.

РЕШЕНИЕ:

① Выражаем геометрические характеристики сечения через "a" :

$$A = 2a \cdot 1,2a - (0,6a)^2 = 2,04a^2; \quad (1)$$

$$I_{\min} = I_y = \frac{2a \cdot (1,2a)^3}{12} - \frac{(0,6a)^4}{12} = 0,277a^4; \quad (2)$$

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{0,277a^4}{2,04a^2}} = 0,37a. \quad (3)$$

② Записываем для стержня условие устойчивости —

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{A} \leq [\sigma]_{\text{уст}},$$

которое, принимая $[\sigma]_{\text{уст}} = \varphi [\sigma]_{\text{сж}}$, получаем в виде:

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{A} \leq \varphi [\sigma]_{\text{сж}} \rightarrow \boxed{\sigma_{\max} = \frac{F}{\varphi A} \leq [\sigma]_{\text{сж}}}. \quad (4)$$

③ Подбор размеров сечения выполняем **методом попыток**, задавая значение коэффициента φ и проверяя устойчивость стержня с полученными размерами. Расчеты выполняются из условия устойчивости (4) и с помощью этого же условия (4) проверяется устойчивость стержня.

Примечание.

Коэффициент φ изменяется от нуля до единицы, поэтому отсчет удобнее начинать с середины и в первой попытке задавать $\varphi = 0,5$.

Попытка 1: $\boxed{\varphi_1 = 0,5} \rightarrow$

★ Из условия устойчивости (4) определяем площадь сечения —

$$A_1 = \frac{F}{\varphi_1 [\sigma]_{\text{сж}}} = \frac{850 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 160} = 10625 \text{ мм}^2 = 106,25 \text{ см}^2;$$

★ Из выражения (1) подбираем размер сечения "a" —

$$a_1 = \sqrt{\frac{A_1}{2,04}} = \sqrt{\frac{106,25}{2,04}} = 7,2 \text{ см};$$

★ Определяем гибкость стержня с полученным сечением и на основании (3) получаем —

$$\lambda_1 = \frac{\mu \ell}{i_{\min}} = \frac{\mu \ell}{0,37 a_1} = \frac{1 \cdot 480}{0,37 \cdot 7,2} = 180,18;$$

★ Для стали Ст.3 из таблицы коэффициентов φ для значений гибкости, ближайших к рассчитанному, выписываем значения φ и методом линейной интерполяции уточняем его величину для $\lambda_1 = 180,18$ —

Ст.3		$\varphi_1' = 0,23 - \frac{0,23 - 0,21}{10} (180,18 - 180) = 0,229;$
λ	φ	
180	0,23	
190	0,21	

★ На основании (4) проверяем устойчивость стержня —

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{\varphi_1' A_1} = \frac{850 \cdot 10^3}{0,229 \cdot 106,25 \cdot 10^2} = 349 \text{ МПа} > [\sigma]_{\text{сж}} \rightarrow$$

устойчивость стержня с полученными размерами сечения не обеспечена. Перегрузка составляет:

$$\frac{\sigma_{\max} - [\sigma]_{\text{сж}}}{[\sigma]_{\text{сж}}} \cdot 100\% \rightarrow \frac{349 - 160}{160} \cdot 100\% = 118\%, \text{ недопустимо.}$$

Попытка 2:
$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi_1'}{2} = \frac{0,5 + 0,229}{2} = 0,365 \rightarrow$$

Примечание.

Во 2-ой и последующих попытках коэффициент φ уже не задается, а определяется методом приближения по значениям φ и φ' , полученным в предыдущей попытке.

★ Из условия устойчивости (4) определяем площадь сечения —

$$A_2 = \frac{F}{\varphi_2 [\sigma]_{\text{сж}}} = \frac{850 \cdot 10^3}{0,365 \cdot 160} = 14555 \text{ мм}^2 = 145,55 \text{ см}^2;$$

★ Из выражения (1) подбираем размер сечения "a" —

$$a_2 = \sqrt{\frac{A_2}{2,04}} = \sqrt{\frac{145,55}{2,04}} = 8,45 \text{ см};$$

★ Определяем гибкость стержня с полученным сечением и на основании (3) получаем —

$$\lambda_2 = \frac{\mu \ell}{i_{\min}} = \frac{\mu \ell}{0,37a_2} = \frac{1 \cdot 480}{0,37 \cdot 8,45} = 153,53;$$

★ Для стали Ст.3 из таблицы коэффициентов φ для значений гибкости, ближайших к рассчитанному, выписываем значения φ и методом линейной интерполяции уточняем его величину для $\lambda_2 = 153,53$ —

Ст.3

λ	φ
150	0,32
160	0,29

$$\varphi_2' = 0,32 - \frac{0,32 - 0,29}{10} (153,53 - 150) = 0,309;$$

★ На основании условия (4) проверяем устойчивость стержня —

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{\varphi_2' A_2} = \frac{850 \cdot 10^3}{0,309 \cdot 145,55 \cdot 10^2} = 189 \text{ МПа} > [\sigma]_{\text{сж}} \rightarrow$$

устойчивость стержня с полученными размерами сечения не обеспечена. Перегрузка составляет:

$$\frac{189 - 160}{160} \cdot 100\% = 18\%, \text{ что недопустимо.}$$

Попытка 3:
$$\varphi_3 = \frac{\varphi_2 + \varphi_2'}{2} = \frac{0,365 + 0,309}{2} = 0,337 \rightarrow$$

★ Из условия устойчивости (4) определяем площадь сечения —

$$A_3 = \frac{F}{\varphi_3 [\sigma]_{\text{сж}}} = \frac{850 \cdot 10^3}{0,337 \cdot 160} = 15764 \text{ мм}^2 = 157,64 \text{ см}^2;$$

★ Из выражения (1) подбираем размер сечения "a" —

$$a_3 = \sqrt{\frac{A_3}{2,04}} = \sqrt{\frac{157,64}{2,04}} = 8,8 \text{ см};$$

★ Определяем гибкость стержня с полученным сечением и на основании (3) получаем —

$$\lambda_3 = \frac{\mu \ell}{i_{\min}} = \frac{\mu \ell}{0,37a_3} = \frac{1 \cdot 480}{0,37 \cdot 8,8} = 147,42;$$

★ Для стали Ст.3 из таблицы коэффициентов φ для значений гибкости, ближайших к рассчитанному, выписываем значения φ и методом линейной интерполяции уточняем его величину для $\lambda_3 = 147,42$ —

Ст.3		$\varphi_3 = 0,36 - \frac{0,36 - 0,32}{10} (147,42 - 140) = 0,33;$
λ	φ	
140	0,36	
150	0,32	

★ На основании условия (4) проверяем устойчивость стержня —

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{\varphi_3 A_3} = \frac{850 \cdot 10^3}{0,33 \cdot 157,64 \cdot 10^2} = 163,4 \text{ МПа} > [\sigma]_{\text{сж}}.$$

Перегрузка составляет:

$$\frac{163,4 - 160}{160} \cdot 100\% = 2\%, \text{ что допустимо.}$$

Принимаем размер сечения стержня $a = 8,8$ см.

④ Для стержня с полученными размерами сечением определяем критическую силу $F_{\text{кр}}$, при которой он потеряет устойчивость.

Оцениваем гибкость стержня. Для полученного размера сечения

гибкость $\lambda = \lambda_3 = 147,42 > \lambda_{\text{пред}}$ — значит, это *стержень большой гибкости* и для него для определения критической силы можно использовать формулу Эйлера. Тогда с учетом (2) получаем:

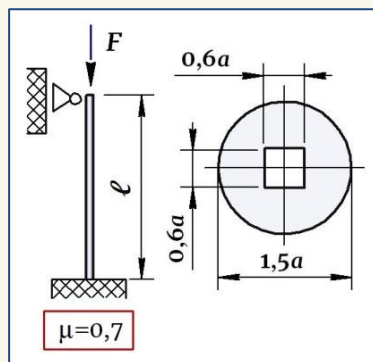
$$F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu \ell)^2} = \frac{\pi^2 E \cdot 0,277a^4}{(\mu \ell)^2} = \frac{3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 0,227 \cdot 88^4}{(1 \cdot 4800)^2} = 1165 \text{ кН.}$$

⑤ Определяем коэффициент запаса устойчивости:

$$n_{\text{уст}} = \frac{F_{\text{кр}}}{F} = \frac{1165}{850} = 1,4.$$

Задача 12

Стержень заданного сечения длиной $\ell = 4,2$ м подвергается сжатию силой $F = 240$ кН. Из условия устойчивости с помощью таблиц коэффициентов φ подобрать размеры сечения стержня, если стержень выполнен из Ст.5 и для материала $[\sigma]_{\text{сж}} = 160$ МПа. Определить для стержня критическую силу $F_{\text{кр}}$ и коэффициент запаса устойчивости $n_{\text{уст}}$. Принять: $\lambda_{\text{пред}} = 110$.



РЕШЕНИЕ:

① Выражаем геометрические характеристики сечения через "a" :

$$A = \frac{\pi(1,5a)^2}{4} - (0,6a)^2 = 1,766a^2 - 0,36a^2 = 1,41a^2; \quad (1)$$

$$I_{\min} = \frac{\pi(1,5a)^4}{64} - \frac{(0,6a)^4}{12} = 0,238a^4; \quad (2)$$

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{0,238a^4}{1,41a^2}} = 0,41a. \quad (3)$$

② Записываем для стержня условие устойчивости —

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{A} \leq [\sigma]_{\text{уст}},$$

которое, принимая $[\sigma]_{\text{уст}} = \varphi [\sigma]_{\text{сж}}$, получаем в виде:

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{A} \leq \varphi [\sigma]_{\text{сж}} \rightarrow \boxed{\sigma_{\max} = \frac{F}{\varphi A} \leq [\sigma]_{\text{сж}}}. \quad (4)$$

③ Подбор размеров сечения выполняем *методом попыток*, задавая значение коэффициента φ и проверяя устойчивость стержня с полученными размерами. Расчеты выполняются из условия устойчивости (4) и с помощью этого же условия (4) проверяется устойчивость стержня.

Попытка 1: $\varphi_1 = 0,5 \rightarrow$

★ Из условия устойчивости (4) определяем площадь сечения —

$$A_1 = \frac{F}{\varphi_1 [\sigma]_{\text{сж}}} = \frac{240 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 160} = 3000 \text{ мм}^2 = 30 \text{ см}^2;$$

★ Из выражения (1) подбираем размер сечения "a" —

$$a_1 = \sqrt{\frac{A_1}{1,41}} = \sqrt{\frac{30}{1,41}} = 4,6 \text{ см};$$

★ Определяем гибкость стержня с полученным сечением и на основании (3) получаем —

$$\lambda_1 = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{\mu l}{0,41 a_1} = \frac{0,7 \cdot 240}{0,41 \cdot 4,6} = 89,08;$$

★ Для стали Ст.5 из таблицы коэффициентов φ для значений гибкости, ближайших к рассчитанному, выписываем значения φ и методом линейной интерполяции уточняем его величину для $\lambda_1 = 89,08$ —

Ст.5

λ	φ
80	0,70
90	0,62

$$\varphi_1' = 0,70 - \frac{0,70 - 0,62}{10} (89,08 - 80) = 0,627;$$

★ На основании условия (4) проверяем устойчивость стержня —

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{\varphi_1' A_1} = \frac{240 \cdot 10^3}{0,627 \cdot 30 \cdot 10^2} = 127,6 \text{ МПа} < [\sigma]_{\text{сж}}.$$

Напряжения в стержне значительно меньше допускаемых, стержень недогружен. Недогрузка определяется как —

$$\frac{[\sigma]_{\text{сж}} - \sigma_{\max}}{[\sigma]_{\text{сж}}} \cdot 100\%$$

и составляет: $\frac{160 - 127,6}{160} \cdot 100\% = 20,3\%$, что нерационально.

Примечание.

Недогрузка, так же как и перегрузка, не должна превышать 5%.

Попытка 2:
$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi_1'}{2} = \frac{0,5 + 0,627}{2} = 0,564 \rightarrow$$

★ Из условия устойчивости (4) определяем площадь сечения —

$$A_2 = \frac{F}{\varphi_2 [\sigma]_{\text{сж}}} = \frac{240 \cdot 10^3}{0,564 \cdot 160} = 2659,6 \text{ мм}^2 = 26,59 \text{ см}^2;$$

★ Из выражения (1) подбираем размер сечения "a" —

$$a_2 = \sqrt{\frac{A_2}{1,41}} = \sqrt{\frac{26,59}{1,41}} = 4,3 \text{ см};$$

★ Определяем гибкость стержня с полученным сечением и на основании (3) получаем —

$$\lambda_2 = \frac{\mu \ell}{i_{\min}} = \frac{\mu \ell}{0,41 a_2} = \frac{0,7 \cdot 240}{0,41 \cdot 4,3} = 95,29;$$

★ Для стали Ст.5 из таблицы коэффициентов φ для значений гибкости, ближайших к рассчитанному, выписываем значения φ и методом линейной интерполяции уточняем его величину для $\lambda_2 = 95,29$ —

Ст.5

λ	φ
90	0,62
100	0,51

$$\varphi_2' = 0,62 - \frac{0,62 - 0,51}{10} (95,29 - 90) = 0,562;$$

★ На основании условия (4) проверяем устойчивость стержня —

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{\varphi_2' A_2} = \frac{240 \cdot 10^3}{0,562 \cdot 26,59 \cdot 10^2} = 160,6 \text{ МПа} \approx [\sigma]_{\text{сж}} \rightarrow$$

устойчивость стержня обеспечена.

Принимаем размер сечения стержня $a = 4,3$ см.

④ Для стержня с полученными размерами сечением определяем критическую силу $F_{\text{кр}}$, при которой он потеряет устойчивость.

Оцениваем гибкость стержня. Для полученного размера сечения гибкость $\lambda = \lambda_2 = 95,29 < \lambda_{\text{пред}}$ — значит, это *стержень средней гибкости* и для него формула Эйлера для $F_{\text{кр}}$ неприменима. Для вычисления $F_{\text{кр}}$ используем формулу Ф.С. Ясинского для напряжений $\sigma_{\text{кр}}$,

а затем определим критическую силу:

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda + c\lambda^2 = \parallel \text{Ст.5} \rightarrow a = 464 \text{ МПа}, b = 3,26 \text{ МПа}, c = 0 \parallel = \\ = 464 - 3,26 \cdot 95,29 = 153,4 \text{ МПа};$$

$$F_{кр} = \sigma_{кр} A_2 = 153,4 \cdot 26,59 \cdot 10^2 = 407,9 \text{ кН}.$$

⑤ Определяем коэффициент запаса устойчивости:

$$n_{уст} = \frac{F_{кр}}{F} = \frac{407,9}{240} = 1,7.$$

Задача 13

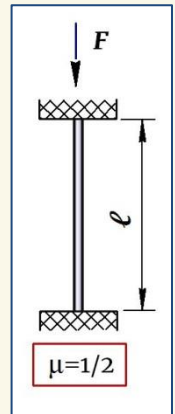
Стальная стойка двутаврового сечения из стали Ст.5 длиной $\ell = 5\text{ м}$ сжимается силой $F = 400\text{ кН}$. Оба конца стойки жестко закреплены. Подобрать номер двутавра и определить для стойки критическую силу $F_{кр}$ и коэффициент запаса устойчивости $n_{уст}$. Принять: $[\sigma]_{сж} = 160\text{ МПа}$, $\lambda_{пред} = 100$.

РЕШЕНИЕ:

① Используем условие устойчивости в виде:

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{\varphi A} \leq [\sigma]_{сж}. \quad (1)$$

② Подбор размеров сечения выполняем *методом попыток*, задавая значение коэффициента φ и проверяя устойчивость стержня с полученными размерами:



Попытка 1: $\varphi_1 = 0,5 \rightarrow$

★ Из условия устойчивости (1) определяем площадь сечения —

$$A_1 = \frac{F}{\varphi_1 [\sigma]_{сж}} = \frac{400 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 160} = 5000 \text{ мм}^2 = 50 \text{ см}^2;$$

★ Из таблиц сортамента подбираем двутавр № 30а:

$$A = 49,9 \text{ см}^2; I_{\min} = 436 \text{ см}^4; i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{436}{49,9}} = 2,96 \text{ см};$$

★ Определяем гибкость стержня с полученным сечением —

$$\lambda_1 = \frac{\mu \ell}{i_{\min}} = \frac{(1/2) \cdot 500}{2,96} = 84,46;$$

★ Для стали Ст.5 из таблицы коэффициентов φ для значений гибкости, ближайших к рассчитанному, выписываем значения φ и методом линейной интерполяции уточняем его величину для $\lambda_1 = 84,46$ —

Ст.5

λ	φ
80	0,70
90	0,62

$$\varphi_1' = 0,70 - \frac{0,70 - 0,62}{10} (84,46 - 80) = 0,664;$$

★ На основании условия (1) проверяем устойчивость стержня —

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{\varphi_1' A_1} = \frac{400 \cdot 10^3}{0,664 \cdot 49,9 \cdot 10^2} = 120,7 \text{ МПа} < [\sigma]_{\text{сж}}.$$

Напряжения в двутавре значительно меньше допускаемых, двутавр недогружен. Недогрузка составляет:

$$\frac{160 - 120,7}{160} \cdot 100\% = 24,6\%, \text{ что нерационально.}$$

Попытка 2:
$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi_1'}{2} = \frac{0,5 + 0,664}{2} = 0,582 \rightarrow$$

★ Из условия устойчивости (1) определяем площадь сечения —

$$A_2 = \frac{F}{\varphi_2 [\sigma]_{\text{сж}}} = \frac{400 \cdot 10^3}{0,582 \cdot 160} = 4295,5 \text{ мм}^2 = 42,95 \text{ см}^2;$$

★ Из таблиц сортамента подбираем двутавр № 27а:

$$A = 43,2 \text{ см}^2; I_{\min} = 337 \text{ см}^4; i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{337}{43,2}} = 2,79 \text{ см};$$

★ Определяем гибкость стержня с полученным сечением —

$$\lambda_2 = \frac{\mu \ell}{i_{\min}} = \frac{(1/2) \cdot 500}{2,79} = 89,61;$$

★ Для стали Ст.5 из таблицы коэффициентов φ для значений гибкости, ближайших к рассчитанному, выписываем значения φ и методом линейной интерполяции уточняем его величину для $\lambda_2 = 89,61$ —

Ст.5	
λ	φ
80	0,70
90	0,62

$$\varphi_2' = 0,70 - \frac{0,70 - 0,62}{10} (89,61 - 80) = 0,623;$$

★ На основании условия (1) проверяем устойчивость стержня —

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{\varphi_2' A_2} = \frac{400 \cdot 10^3}{0,623 \cdot 43,2 \cdot 10^2} = 148,6 \text{ МПа} < [\sigma]_{\text{сж}}.$$

Напряжения в двутавре значительно меньше допускаемых, двутавр недогружен. Недогрузка составляет:

$$\frac{160 - 148,6}{160} \cdot 100\% = 7,1\%, \text{ что нерационально.}$$

Попытка 3:
$$\varphi_3 = \frac{\varphi_2 + \varphi_2'}{2} = \frac{0,582 + 0,623}{2} = 0,603 \rightarrow$$

★ Из условия устойчивости (1) определяем площадь сечения —

$$A_3 = \frac{F}{\varphi_3 [\sigma]_{\text{сж}}} = \frac{400 \cdot 10^3}{0,603 \cdot 160} = 4145,9 \text{ мм}^2 = 41,46 \text{ см}^2;$$

★ Из таблиц сортамента подбираем двутавр № 27:

$$A = 40,2 \text{ см}^2; I_{\min} = 260 \text{ см}^4; i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{260}{40,2}} = 2,54 \text{ см};$$

★ Определяем гибкость стержня с полученным сечением —

$$\lambda_3 = \frac{\mu \ell}{i_{\min}} = \frac{(1/2) \cdot 500}{2,54} = 98,43;$$

★ Для стали Ст.5 из таблицы коэффициентов φ для значений гибкости, ближайших к рассчитанному, выписываем значения φ и методом линейной интерполяции уточняем его величину для $\lambda_3 = 98,43$ —

Ст.5	
λ	φ
90	0,62
100	0,51

$$\varphi_3' = 0,62 - \frac{0,62 - 0,51}{10} (98,43 - 90) = 0,527;$$

★ На основании условия (1) проверяем устойчивость стержня —

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{\varphi_3^2 A_3} = \frac{400 \cdot 10^3}{0,527 \cdot 40,2 \cdot 10^2} = 188,8 \text{ МПа} > [\sigma]_{\text{сж}} \rightarrow$$

устойчивость двутавра не обеспечена. Перегрузка составляет:

$$\frac{188,8 - 160}{160} \cdot 100\% = 18\%, \text{ недопустимо.}$$

Поэтому окончательно принимаем двутавр № 27а.

③ Для двутавра № 27а определяем критическую силу $F_{\text{кр}}$, при которой он потеряет устойчивость.

Оцениваем гибкость стойки. Для принятого двутавра № 27а гибкость $\lambda = \lambda_2 = 89,61 < \lambda_{\text{пред}}$ — значит, это *стержень средней гибкости* и для него формула Эйлера неприменима. Для вычисления $F_{\text{кр}}$ используем формулу Ф.С. Ясинского:

$$\sigma_{\text{кр}} = a - b\lambda + c\lambda^2 = \parallel \text{Ст.5} \rightarrow a = 464 \text{ МПа}, b = 3,26 \text{ МПа}, c = 0 \parallel =$$

$$= 464 - 3,26 \cdot 89,61 = 171,9 \text{ МПа};$$

$$F_{\text{кр}} = \sigma_{\text{кр}} A_2 = 171,9 \cdot 43,2 \cdot 10^2 = 742,6 \text{ кН.}$$

④ Определяем коэффициент запаса устойчивости:

$$n_{\text{уст}} = \frac{F_{\text{кр}}}{F} = \frac{742,6}{400} = 1,85.$$

Задача 14

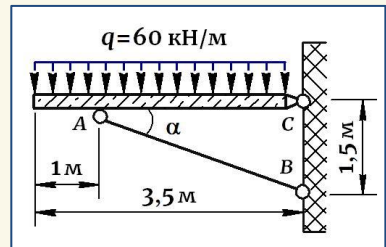
В конструкции подобрать диаметр деревянного подкоса АВ. Оба конца подкоса считать шарнирно опёртыми ($\mu = 1$).

Принять для дерева: $[\sigma]_{\text{сж}} = 11 \text{ МПа}$.

РЕШЕНИЕ:

① По рисунку вычисляем значения, необходимые для решения:

$$l = \sqrt{2,5^2 + 1,5^2} = 2,92 \text{ м} - \text{длина АВ}; \text{tg } \alpha = \frac{1,5}{2,5} = 0,6 \rightarrow \alpha = 31^\circ.$$

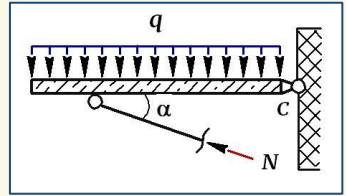


② Методом сечений определяем силу N , сжимающую стержень:

$$\sum M_C = 0: q \cdot 3,5 (3,5/2) - N \sin \alpha \cdot 2,5 = 0 \rightarrow$$

$$60 \cdot 3,5 (3,5/2) - N \sin 31^\circ \cdot 2,5 = 0 \rightarrow$$

$$N = 285 \text{ кН}.$$



③ Выражаем геометрические характеристики сечения через диаметр подкоса " d ":

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = 0,785 d^2; \quad (1) \quad I_{\min} = \frac{\pi d^4}{64} = 0,049 d^4; \quad (2)$$

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{0,049 d^4}{0,785 d^2}} = 0,25 d. \quad (3)$$

④ Используем условие устойчивости в виде:

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{\varphi A} \leq [\sigma]_{\text{сж}}. \quad (4)$$

⑤ Подбор размеров сечения выполняем *методом попыток*, задавая значение коэффициента φ и проверяя устойчивость стержня с полученными размерами:

Попытка 1: $\varphi_1 = 0,5 \rightarrow$

★ Из условия устойчивости (4) определяем площадь сечения —

$$A_1 = \frac{N}{\varphi_1 [\sigma]_{\text{сж}}} = \frac{285 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 11} = 518,2 \text{ см}^2;$$

★ Из выражения (1) подбираем диаметр подкоса " d " —

$$d_1 = \sqrt{\frac{A_1}{0,785}} = \sqrt{\frac{518,2}{0,785}} = 25,7 \text{ см} \approx 26 \text{ см};$$

★ Определяем гибкость подкоса диаметром d_1 и на основании (3) получаем —

$$\lambda_1 = \frac{\mu \ell}{i_{\min}} = \frac{\mu \ell}{0,25 d_1} = \frac{1 \cdot 291}{0,25 \cdot 26} = 44,77;$$

★ Для дерева из таблицы коэффициентов φ для значений гибкости, ближайших к рассчитанному, выписываем значения φ и методом линейной интерполяции уточняем его величину для $\lambda_1 = 44,77$ —

Дерево

λ	φ
40	0,87
50	0,80

$$\varphi_1' = 0,87 - \frac{0,87 - 0,80}{10}(44,77 - 40) = 0,837;$$

★ На основании (4) и с учетом уточнения площади сечения (1) проверяем устойчивость стержня —

$$A_1 = 0,785 d_1^2 = 0,785 \cdot 26^2 = 530,66 \text{ см}^2;$$

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{\varphi_1' A_1} = \frac{285 \cdot 10^3}{0,837 \cdot 530,66 \cdot 10^2} = 6,4 \text{ МПа} < [\sigma]_{\text{сж}}.$$

Напряжения в подкосе значительно меньше допускаемых, подкос недогружен. Недогрузка составляет:

$$\frac{11 - 6,4}{11} \cdot 100\% = 42\%, \text{ что нерационально.}$$

Попытка 2:
$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi_1'}{2} = \frac{0,5 + 0,837}{2} = 0,669 \rightarrow$$

★ Из условия устойчивости (4) определяем площадь сечения —

$$A_2 = \frac{N}{\varphi_2 [\sigma]_{\text{сж}}} = \frac{285 \cdot 10^3}{0,669 \cdot 11} = 387,3 \text{ см}^2;$$

★ Из выражения (1) подбираем диаметр подкоса "d" —

$$d_2 = \sqrt{\frac{A_2}{0,785}} = \sqrt{\frac{387,3}{0,785}} = 22,2 \text{ см} \approx 22 \text{ см};$$

★ Определяем гибкость подкоса диаметром d_2 и на основании (3) получаем —

$$\lambda_2 = \frac{\mu \ell}{i_{\min}} = \frac{\mu \ell}{0,25 d_2} = \frac{1 \cdot 291}{0,25 \cdot 22} = 52,91;$$

★ Для дерева из таблицы коэффициентов φ для значений гибкости, ближайших к рассчитанному, выписываем значения φ и методом линейной интерполяции уточняем его величину для $\lambda_2 = 52,91$ —

$$\varphi_2' = 0,80 - \frac{0,80 - 0,71}{10} (52,91 - 50) = 0,774;$$

Дерево	
λ	Φ
50	0,80
60	0,71

★ На основании (4) и с учетом уточнения площади сечения (1) проверяем устойчивость стержня —

$$A_2 = 0,785 d_2^2 = 0,785 \cdot 22^2 = 379,94 \text{ см}^2;$$

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{\varphi_2' A_2} = \frac{285 \cdot 10^3}{0,774 \cdot 379,94 \cdot 10^2} = 9,7 \text{ МПа} < [\sigma]_{\text{сж}}.$$

Недогрузка в подкосе составляет:

$$\frac{11 - 9,7}{11} \cdot 100\% = 11,8\%, \text{ что нерационально.}$$

Попытка 3:
$$\varphi_3 = \frac{\varphi_2 + \varphi_2'}{2} = \frac{0,669 + 0,774}{2} = 0,722 \rightarrow$$

★ Из условия устойчивости (4) определяем площадь сечения —

$$A_3 = \frac{N}{\varphi_3 [\sigma]_{\text{сж}}} = \frac{285 \cdot 10^3}{0,722 \cdot 11} = 358,85 \text{ см}^2;$$

★ Из выражения (1) подбираем диаметр подкоса "d" —

$$d_3 = \sqrt{\frac{A_3}{0,785}} = \sqrt{\frac{358,85}{0,785}} = 21,38 \text{ см} \approx 21 \text{ см};$$

★ Определяем гибкость подкоса диаметром d_3 и на основании (3) получаем —

$$\lambda_3 = \frac{\mu \ell}{i_{\min}} = \frac{\mu \ell}{0,25 d_3} = \frac{1 \cdot 291}{0,25 \cdot 21} = 55,43;$$

★ Для дерева из таблицы коэффициентов Φ для значений гибкости, ближайших к рассчитанному, выписываем значения Φ и методом линейной интерполяции уточняем его величину для $\lambda_3 = 55,43$ —

Дерево	
λ	Φ
50	0,80
60	0,71

$$\varphi_3' = 0,80 - \frac{0,80 - 0,71}{10} (55,43 - 50) = 0,751;$$

★ На основании (4) и с учетом уточнения площади сечения (1) проверяем устойчивость стержня —

$$A_3 = 0,785 d_3^2 = 0,785 \cdot 21^2 = 346,19 \text{ см}^2;$$

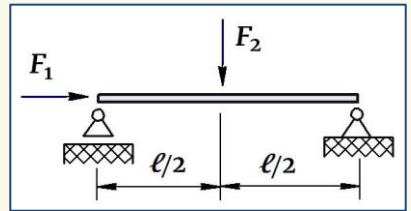
$$\sigma_{\max} = \frac{N}{\varphi_3^2 A_3} = \frac{285 \cdot 10^3}{0,751 \cdot 346,19 \cdot 10^2} = 10,96 \text{ МПа} \approx [\sigma]_{\text{сж}}.$$

Принимаем окончательно диаметр подкоса $d = 21 \text{ см}$.

Продольно-поперечный изгиб

Задача 15

Стальной стержень круглого поперечного сечения диаметром $d = 30 \text{ мм}$ и длиной $\ell = 3 \text{ м}$ подвергается продольно-поперечному изгибу силами $F_1 = 6,8 \text{ кН}$ и $F_2 = 0,1 \text{ кН}$. Определить в стержне наибольший прогиб от действия продольных и поперечных сил $f_{\text{полн}}$, а также максимальные напряжения в нем. Принять для материала: $E = 2 \times 10^5 \text{ МПа}$.



РЕШЕНИЕ:

① Вычислим первоначально геометрические характеристики сечения, необходимые для решения задачи:

$$\left. \begin{aligned} A &= \pi d^2 / 4 = 706 \text{ мм}^2; \quad I_{\text{н.о.}} = \pi d^4 / 64 = 39700 \text{ мм}^4; \\ W_{\text{н.о.}} &= \pi d^3 / 32 = 2650 \text{ мм}^3. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

② Определяем наибольший прогиб стержня от одновременного действия продольной и поперечной сил:

$$f_{\text{полн}} = \frac{f_{\text{пш}}}{1 - (F_1/F_{\text{Э}})}, \quad (2)$$

где $f_{\text{пш}}$ — наибольший прогиб посередине пролета от действия поперечной силы F_2 , для данной расчетной схемы равный —

$$f_{\text{III}} = \frac{F_2 \ell^3}{48 EI_{\text{н.о.}}} = \frac{0,1 \cdot 10^3 (3 \cdot 10^3)^3}{48 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 39700} = 7,1 \text{ мм};$$

$F_{\text{Э}}$ – критическая сила, которая формально называется «формулой Эйлера» и для значения $\mu = 1$ вычисляется по формуле –

$$F_{\text{Э}} = \frac{\pi^2 EI_{\text{н.о.}}}{\ell^2} = \frac{3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 39700}{(3 \cdot 10^3)^2} = 8700 \text{ Н} = 8,7 \text{ кН}.$$

В результате на основании формулы (2) получаем:

$$f_{\text{полн}} = \frac{f_{\text{III}}}{1 - \frac{F_1}{F_{\text{Э}}}} = \frac{7,1}{1 - \frac{6,8}{8,7}} = 32,6 \text{ мм}.$$

③ Определяем наибольшие напряжения в стержне σ_{max} , которые возникают в опасном сечении, т.е. посередине пролета.

При продольно-поперечном изгибе имеет место комбинация трех деформаций – сжатие от продольной силы F_1 и изгиб от двух изгибающих моментов – момента M_{III} от поперечной силы F_2 и момента $M_{\text{пр}}$ от продольной силы F_1 , определяемых как:

$$M_{\text{III}} = \frac{F_2 \ell}{4}; \quad M_{\text{пр}} = F_1 f_{\text{полн}}. \quad (3)$$

Тогда напряжения, возникающие от каждой деформации, с учетом формул (3) и значений (1) соответственно равны:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_N &= -\frac{F_1}{A} = -\frac{6,8 \cdot 10^3}{706} = -9,6 \text{ МПа}; \text{ (сжатие)} \\ \sigma_{M_{\text{III}}} &= \frac{M_{\text{III}}}{W_{\text{н.о.}}} = \frac{F_2 \ell}{4W_{\text{н.о.}}} = \frac{0,1 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 10^3}{4 \cdot 2650} = \pm 28,3 \text{ МПа}; \\ \sigma_{M_{\text{пр}}} &= \frac{M_{\text{пр}}}{W_{\text{н.о.}}} = \frac{F_1 f_{\text{полн}}}{W_{\text{н.о.}}} = \frac{6,8 \cdot 10^3 \cdot 32,6}{2650} = \pm 83,7 \text{ МПа}, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где знак "±" означает, что при изгибе сечение делится на две области – по одну сторону от нейтральной оси возникает сжатие, по другую – растяжение и, значит, в этих областях возникают соответственно напряжения σ_- и σ_+ .

Самыми нагруженными будут те точки сечения, где от всех трех деформаций (сжатия и двух изгибов) напряжения имеют одинаковое направление, т.е. в области сжатия. Поэтому при вычислении наибольших напряжений все значения (4) следует брать со знаком «минус». И тогда максимальные напряжения в стержне на основании принципа независимости действия сил с учетом вычисленных величин (4) будут равны:

$$\sigma_{\max} = -\sigma_N - \sigma_{M_{\text{ш}}} - \sigma_{M_{\text{пр}}} = -9,6 - 28,3 - 83,7 = -121,6 \text{ МПа.}$$

Значения коэффициента Φ

Гибкость стержня λ	Коэффициент Φ				
	Сталь Ст.2, Ст.3 Ст.4	Сталь Ст.5	Сталь 14Г2, 15ГС, 10Г2С, 15ХСНД	Чугун	Дерево
0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0
10	0,99	0,98	0,98	0,97	0,99
20	0,96	0,95	0,95	0,91	0,97
30	0,94	0,92	0,92	0,81	0,93
40	0,92	0,89	0,89	0,69	0,87
50	0,89	0,86	0,84	0,57	0,80
60	0,86	0,82	0,78	0,44	0,71
70	0,81	0,76	0,71	0,34	0,60
80	0,75	0,70	0,63	0,26	0,48
90	0,69	0,62	0,54	0,20	0,38
100	0,60	0,51	0,46	0,16	0,31
110	0,52	0,43	0,39		0,25
120	0,45	0,36	0,33		0,22
130	0,40	0,33	0,29		0,18
140	0,36	0,29	0,25		0,16
150	0,32	0,26	0,23		0,14
160	0,29	0,24	0,21		0,12
170	0,26	0,21	0,19		0,11
180	0,23	0,19	0,17		0,10
190	0,21	0,17	0,15		0,09
200	0,19	0,16	0,13		0,08

Значения коэффициентов a, b, c , МПа

Материал	a , МПа	b , МПа	c , МПа	$\lambda_{\text{пред}}$	λ_0
Сталь Ст.2, Ст.3	310	1,14	0	100	60
Сталь Ст.5	464	3,26	0	100	55
Сталь 40	321	1,16	0	90	—
Кремнистая сталь	589	3,82	0	100	—
Дюралюминий Д16Т	400	3,33	0	—	30
Чугун	776	12,00	0,53	80	—
Дерево (сосна, ель)	29,3	0,194	0	110	—

ЛИТЕРАТУРА

1. Подскребко, М.Д. Сопротивление материалов: Учебник. / М.Д. Подскребко – Минск: Вышэйшая школа, 2007. – 797 с.
2. Сборник задач по сопротивлению материалов / А.С. Вольмир [и др.]; под ред. Вольмира А.С. – М.: Наука, 1984. – 407 с.
3. Феодосьев, В.И. Сопротивление материалов: Учебник./В.И. Феодосьев – М.: Наука, 1986. – 512 с.
4. Дарков, А.В. Сопротивление материалов: Учебник. / А.В. Дарков, Г.С. Шпиро – М.: Высшая школа, 1975. – 742 с.
5. Беляев, Н.М. Сопротивление материалов / Н.М. Беляев – М.: Наука, 1976. – 607 с.
6. Писаренко, Г.С. Сопротивление материалов: Учебник./ Г.С. Писаренко [и др.]; под ред. Писаренко Г.С. – Киев: Вища школа, 1979. – 696 с.
7. Татур, Г.К. Общий курс сопротивления материалов: Учебник. / Г.К. Татур – Минск:Вышэйшая школа, 1974. – 462 с.