

7. Теличко В.Г. Определение напряженно-деформированного состояния трубчатых железобетонных оболочек при чистом кручении методом конечных элементов / В.Г. Теличко, А.А. Трещев // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Сер. механика предельного состояния. – Чебоксары: ЧГПУ, 2007. – №1. – С. 138-156.
8. Толоконников Л.А. О форме предельной поверхности изотропного тела / Л.А. Толоконников // Прикладная механика. – 1969. – Вып. 10. – Т.5. – С. 123-130.
9. Филоненко-Бородич М.М. Механические теории прочности. / М.М. Филоненко-Бородич. – М.: МГУ, 1961. – 89 с.

УДК 539.384.6

РАСЧЕТ ШАРНИРНО ОПЁРТОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ИЗ РАЗНОСОПРОТИВЛЯЮЩЕГОСЯ МАТЕРИАЛА НА ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ В СВЯЗАННОЙ ПОСТАНОВКЕ ПРИ КОНЕЧНЫХ ПРОГИБАХ

Делягин М.Ю., Трещёв А.А.

Тульский государственный университет

Рассмотрена задача расчета пологих сферических оболочек из материалов, свойства которых зависят от вида напряженного состояния, на сочетание механической и температурной нагрузок при конечных прогибах. Оценено влияние разносопротивляемости, связанности и геометрической нелинейности на напряженно-деформированное состояние шарнирно опертой сферической оболочки из конструкционного графита АРВ.

У большинства новых материалов проявляется зависимость механических и температурных свойств от вида реализуемого в точке напряженного состояния. Для описания эффекта разносопротивляемости воспользуемся методикой нормированных пространств напряжений [1, 2]. Дополнительно учтем температурные эффекты деформирования, возникающие вследствие связанности полей напряжений и температур, что особенно важно для конструкций энергетической отрасли, а также геометрическую нелинейность, которая свойственна тонкостенным оболочкам.

Уравнения состояния изотропного разносопротивляющегося материала, находящегося в температурном поле, получим в пространстве главных напряжений, применив операции дифференцирования к термодинамическому потенциалу Гиббса [1], в форме $e_k = -\partial\Gamma / \partial\sigma_k$ и $L = \partial\Gamma / \partial T$. Переходя к цилиндрической системе координат и используя статическую гипотезу Кирхгофа-Лява, принимаем $\sigma_z = 0$, тогда, с учетом осесимметричного нагружения получим:

$$\begin{aligned}
e_r &= A\sigma_r + C\sigma_\varphi + A_t\theta^\circ + B\alpha_r\sigma_r + D(\alpha_r + \alpha_\varphi)\sigma_\varphi + \\
&+ (0,5B - D)\left[(1 - \alpha_r^2)\sigma_r - \alpha_\varphi^2\sigma_\varphi\right]\alpha_r + B_t\alpha_r\theta^\circ; \\
e_\varphi &= A\sigma_\varphi + C\sigma_r + A_t\theta^\circ + B\alpha_\varphi\sigma_\varphi + D(\alpha_\varphi + \alpha_r)\sigma_r + \\
&+ (0,5B - D)\left[(1 - \alpha_\varphi^2)\sigma_\varphi - \alpha_r^2\sigma_r\right]\alpha_\varphi + B_t\alpha_\varphi\theta^\circ; \\
L &= (A_t + B_t\alpha_r)\sigma_r + (A_t + B_t\alpha_\varphi)\sigma_\varphi + C_\sigma\theta^\circ / T_0,
\end{aligned} \tag{1}$$

где e_r, e_φ – радиальные и окружные деформации, σ_r, σ_φ – радиальные и окружные напряжения, A, B, C, D, A_t, B_t – константы потенциала [1, 2],

$$\begin{aligned}
A &= 0,5\left(\frac{1}{E^+} + \frac{1}{E^-}\right), & B &= 0,5\left(\frac{1}{E^+} - \frac{1}{E^-}\right), & C &= -0,5\left(\frac{\nu^+}{E^+} + \frac{\nu^-}{E^-}\right), \\
D &= -0,5\left(\frac{\nu^+}{E^+} - \frac{\nu^-}{E^-}\right), & A_t &= 0,5(\alpha_{t1}^+ + \alpha_{t1}^-), & B_t &= 0,5(\alpha_{t1}^+ - \alpha_{t1}^-), & E^+, E^-,
\end{aligned}$$

$\nu^+, \nu^-, \alpha_{t1}^+, \alpha_{t1}^-$ – модули упругости, коэффициенты Пуассона и коэффициенты линейного теплового расширения материала при одноосном растяжении (+) и одноосном сжатии (-) соответственно; $\alpha_r = \sigma_r / S$, $\alpha_\varphi = \sigma_\varphi / S$ – нормированные напряжения, $S = \sqrt{\sigma_r^2 + \sigma_\varphi^2}$ – норма пространства напряжений или модуль вектора полного напряжения, L – плотность энтропии, $\theta^\circ = T - T_0$ – величина изменения температуры, T – текущая температура в точке оболочки, T_0 – начальная температура оболочки.

При конечных прогибах и зависимости свойств материала от вида напряженного состояния задача о деформировании пологой сферической оболочки постоянной кривизны становится и геометрически, и физически нелинейной, поэтому решение будем искать в приращениях функций. Линеаризацию проводим на начальном этапе построения разрешающей системы уравнений согласно методу последовательных нагружений В.В. Петрова.

Приращения деформаций $\delta e_r, \delta e_\varphi$ выразим через приращения напряжений $\delta\sigma_r, \delta\sigma_\varphi$ и изменений температур $\delta\theta^\circ$ с учетом уравнений (1):

$$\begin{aligned}
\delta e_r &= \Delta_{11}\delta\sigma_r + \Delta_{12}\delta\sigma_\varphi + \Delta_{13}\delta\theta^\circ; \\
\delta e_\varphi &= \Delta_{21}\delta\sigma_r + \Delta_{22}\delta\sigma_\varphi + \Delta_{23}\delta\theta^\circ;
\end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
\text{где } \Delta_{11} &= \frac{\partial e_r}{\partial \sigma_r} = A + B(\alpha_r^3 + 2\alpha_r\alpha_\varphi^2) + D\alpha_\varphi^3 - D\alpha_r\alpha_\varphi^2 + \\
&+ (0,5B - D)[\alpha_r^3 + 2\alpha_r\alpha_\varphi^2 - \alpha_r^5 - \alpha_\varphi^5 - 4\alpha_r^3\alpha_\varphi^2 + 2\alpha_r^2\alpha_\varphi^3] + B_t\theta^\circ\alpha_\varphi / S; \\
\Delta_{12} = \Delta_{21} &= \frac{\partial e_r}{\partial \sigma_\varphi} = \frac{\partial e_\varphi}{\partial \sigma_r} = C - B\alpha_r^2\alpha_\varphi + D(2\alpha_r\alpha_\varphi + \alpha_r^3 + \alpha_\varphi^3) + \\
&+ (0,5B - D)[- \alpha_\varphi\alpha_r^2 + 3\alpha_r^4\alpha_\varphi - 3\alpha_r^3\alpha_\varphi^2] - B_t\theta^\circ\alpha_r\alpha_\varphi / S. \\
\Delta_{13} = \frac{\partial e_r}{\partial \theta^\circ} &= A_t + B_t\alpha_r; \quad \Delta_{22} = \frac{\partial e_\varphi}{\partial \sigma_\varphi} = A + B(\alpha_\varphi^3 + 2\alpha_r^2\alpha_\varphi) + D\alpha_r^3 - \\
&- D\alpha_r^2\alpha_\varphi + (0,5B - D)[\alpha_\varphi^3 + 2\alpha_\varphi\alpha_r^2 - \alpha_\varphi^5 - \alpha_r^5 - 4\alpha_r^2\alpha_\varphi^3 + 2\alpha_r^3\alpha_\varphi^2] + \\
&+ B_t\theta^\circ\alpha_r / S; \quad \Delta_{23} = \frac{\partial e_\varphi}{\partial \theta^\circ} = A_t + B_t\alpha_\varphi.
\end{aligned}$$

Выразим из уравнений (2) приращения главных напряжений:

$$\begin{aligned}
\delta\sigma_r &= B_{11}\delta e_r + B_{12}\delta e_\varphi + B_{13}\delta\theta^\circ; \\
\delta\sigma_\varphi &= B_{21}\delta e_r + B_{22}\delta e_\varphi + B_{23}\delta\theta^\circ,
\end{aligned} \tag{3}$$

где $B_{11} = \Delta_{22} / \Delta$; $B_{12} = -\Delta_{21} / \Delta$; $B_{21} = -\Delta_{12} / \Delta$; $B_{22} = \Delta_{11} / \Delta$;
 $B_{13} = (\Delta_{13}\Delta_{21} - \Delta_{23}\Delta_{11}) / \Delta$; $B_{23} = (\Delta_{23}\Delta_{12} - \Delta_{13}\Delta_{22}) / \Delta$; $\Delta = \Delta_{11}\Delta_{22} - \Delta_{12}\Delta_{21}$.

Компоненты тензора деформаций представим в рамках формализма Т. Кармана [4]:

$$e_r = u_{,r} - kw + 0,5w_{,r}^2 - zw_{,rr}; \quad e_\varphi = \frac{u}{r} - kw - \frac{z}{r}w_{,r}, \tag{4}$$

где u, w – радиальные перемещения и прогибы срединной поверхности, k – кривизна оболочки, r – радиальная координата, z – вертикальная координата, отсчитываемая от срединной поверхности оболочки.

Пренебрегая малыми высшего порядка, получим выражения для приращений деформаций:

$$\begin{aligned}
\delta e_r &= (\delta u)_{,r} - k\delta w + w_{,r}(\delta w)_{,r} - z(\delta w)_{,rr}; \\
\delta e_\varphi &= \frac{\delta u}{r} - k\delta w - \frac{z}{r}(\delta w)_{,r}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Определим приращения усилий:

$$\begin{aligned}\delta N_r &= \int_{-h/2}^{h/2} \delta \sigma_r dz; & \delta N_\varphi &= \int_{-h/2}^{h/2} \delta \sigma_\varphi dz; \\ \delta M_r &= \int_{-h/2}^{h/2} \delta \sigma_r z dz; & \delta M_\varphi &= \int_{-h/2}^{h/2} \delta \sigma_\varphi z dz.\end{aligned}\quad (6)$$

Уравнения равновесия для сферической оболочки под воздействием равномерно распределенной нагрузки с учетом геометрической нелинейности имеют вид:

$$\begin{aligned}M_{r,rr} - M_{\varphi,r} / r + 2M_{r,r} / r + k(N_r + N_\varphi) + N_r w_{,rr} &= -q; \\ N_{r,r} + (N_r - N_\varphi) / r - k[M_{r,r} + (M_r - M_\varphi) / r] &= 0.\end{aligned}\quad (7)$$

Пренебрегая малыми высшего порядка, получим линеаризованные уравнения:

$$\begin{aligned}(\delta M_r)_{,rr} - (\delta M_\varphi)_{,r} / r + 2(\delta M_r)_{,r} / r + \\ + k(\delta N_r + \delta N_\varphi) + (\delta N_r) w_{,rr} + N_r (\delta w)_{,rr} &= -\delta q; \\ (\delta N_r)_{,r} + (\delta N_r - \delta N_\varphi) / r - k[(\delta M_r)_{,r} + (\delta M_r - \delta M_\varphi) / r] &= 0.\end{aligned}\quad (8)$$

Уравнение притока тепла определим, подставляя выражение для плотности энтропии разносопротивляющегося материала в уравнение теплопроводности Фурье:

$$\lambda \theta_{,zz} - \rho C_\sigma \theta_{,t} - \left(A_t (\sigma_r + \sigma_\varphi)_{,t} + B_t (S)_{,t} \right) T_0 + U = 0, \quad (9)$$

где λ – коэффициент теплопроводности, C_σ – теплоемкость материала при постоянном напряжении, U – удельная мощность источников тепла.

Уравнение теплопроводности в приращениях примет вид:

$$\begin{aligned}\lambda (\delta \theta)_{,zz} - \rho C_\sigma (\delta \theta)_{,t} - \\ - \left[A_t (\delta \sigma_r + \delta \sigma_\varphi)_{,t} + B_t (\alpha_r (\delta \sigma_r)_{,t} + \alpha_\varphi (\delta \sigma_\varphi)_{,t}) \right] T_0 + U &= 0.\end{aligned}\quad (10)$$

Два уравнения равновесия и уравнение теплопроводности должны решаться совместно для учета связанности полей напряжений и температур. Подставляя в уравнения (8) и (10) зависимости (3), (5), (6) получим систему линеаризованных дифференциальных уравнений в частных производных относительно приращений прогибов, радиальных перемещений и изменений температур:

$$\left\{ \begin{aligned}
& J_{11}(\delta w)_{,rrrr} + K_{11}(\delta w)_{,rrr} + K_{12}(\delta w)_{,rr} + K_{13}(\delta w)_{,r} + \\
& + K_{14}(\delta w) + J_{14}(\delta u)_{,rrr} + K_{15}(\delta u)_{,rr} + \\
& + K_{16}(\delta u)_{,r} + K_{17}(\delta u) = \delta q - K_{q1}; \\
& K_{21}(\delta w)_{,rrr} + K_{22}(\delta w)_{,rr} + K_{23}(\delta w)_{,r} + K_{24}(\delta w) + \\
& + K_{25}(\delta u)_{,rr} + K_{26}(\delta u)_{,r} + K_{27}(\delta u) = -K_{q2}; \\
& \lambda \cdot (\delta \theta^\circ)_{,zz} + K_{31} \cdot (\delta \theta^\circ)_{,t} + K_{32} \cdot (\delta u)_{,rt} + K_{33} \cdot (\delta w)_{,t} + K_{34} \cdot (\delta w)_{,rt} + \\
& + K_{35} \cdot (\delta w)_{,rtt} + K_{36} \cdot (\delta u)_{,t} + U + K_{37} \cdot (\delta u)_{,r} + \\
& + K_{38} \cdot (\delta u) + K_{39} \cdot (\delta w)_{,r} + K_{310} \cdot (\delta w) + \\
& + K_{311} \cdot (\delta w)_{,r} + K_{312} \cdot (\delta \theta^\circ) = 0,
\end{aligned} \right.$$

где J_{ij} , K_{ij} - функции накопленного к рассматриваемому моменту нагружения напряженного состояния.

Разрешающую систему линейных дифференциальных уравнений необходимо дополнить граничными и начальными условиями в приращениях. Граничные условия для шарнирного опирания по контуру запишутся следующим образом:

$$\delta w = 0; \quad \delta M_r = 0; \quad \delta u = 0.$$

Для центра оболочки:

$$(\delta w)_{,r} = 0; \quad \delta u = 0.$$

Температурные начальные условия в приращениях примут вид:

$$\delta \theta^\circ (z = h/2) = 0; \quad \delta \theta^\circ (z = -h/2) = 0.$$

С помощью метода конечных разностей перейдем к системе линейных алгебраических уравнений. Решать систему будем дважды на каждом этапе нагружения согласно двухшаговому методу последовательного возмущения параметров В.В. Петрова [4]. Это позволит многократно сократить погрешность линеаризации методом последовательных нагружений и уменьшить требуемое количество шагов по нагрузке и затраты машинного времени. Для полного учета эффекта разносопротивляемости на первом этапе необходимо дополнительно решить задачу о малых прогибах оболочки итерационным методом упругих решений А.А. Ильюшина. Алгоритм программы был реализован в среде MATLAB.

С помощью разработанной программы была рассчитана шарнирно опертая пологая сферическая оболочка радиусом в плане $b = 1$ м со стрелой подъема 0.08 м и толщиной 0.04 м из конструкционного графита АРВ

с характеристиками: $E^+ = 0.375 \text{ ГПа}$, $E^- = 0.613 \text{ ГПа}$, $\nu^+ = 0.2$, $\nu^- = 0.35$, $\alpha_{T1}^+ = 4 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$, $\alpha_{T1}^- = 6 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$. Максимальная поперечная нагрузка была ограничена величиной 195 кПа. Начальная температура оболочки 300 К. На верхней поверхности температура понижалась до 285 К, а на нижней повышалась до 325 К.

Чтобы количественно оценить различные эффекты, учитываемые в расчете, задача рассматривалась в четырех различных постановках. Первый вариант постановки задачи – геометрически нелинейный расчет с учетом разнсопротивляемости и связанности. Этот вариант принимался за базисный и на всех рисунках условно обозначался «СРС». Для оценки энергетических эффектов деформирования рассматривалась несвязанная задача термоупругости разнсопротивляющегося материала, а результаты решения несвязанной задачи на графиках обозначаются «НРС». Результаты решения связанной задачи без учета разнсопротивляемости с осредненными термомеханическими характеристиками из опытов на одноосное растяжение и одноосное сжатие на рисунках обозначены «ОСР». Такая модель позволит вычислить влияние разнсопротивляемости на напряженно-деформированное состояние оболочки. Для выявления поправок в распределениях усилий вследствие конечных деформаций рассматривается геометрически линейная связанная задача термоупругости оболочки с учетом зависимости свойств материала от вида реализуемого в точке напряженного состояния. На графиках такая постановка задачи обозначается «ЛИН».

На рис. 1 показаны прогибы оболочки. Наибольшее влияние на величину прогиба оказывает учет разнсопротивляемости. Отличие от решения с осредненными характеристиками составило 54 %. Наименее значительно в рассматриваемой задаче проявляется эффект связанности. Расхождение между связанным и несвязанным решением не превышает 5 %. Поправка для величины максимального прогиба за счет геометрической нелинейности составила 25 %.

На рис. 2 представлено распределение радиальных напряжений на верхней и нижней поверхностях оболочки вдоль радиуса. Поправки в радиальные напряжения за счет учета зависимости свойств материала от вида напряженного состояния достигают на верхней поверхности 22 %, на нижней – 12 %. Расхождения между геометрически линейным расчетом и расчетом по нелинейной теории типа Т. Кармана для величины напряжений не превосходят 20 %. Влияние связанности проявляется незначительно. Расхождение между несвязанной и связанной постановками задачи в величине радиальных напряжений составляет 5 %.

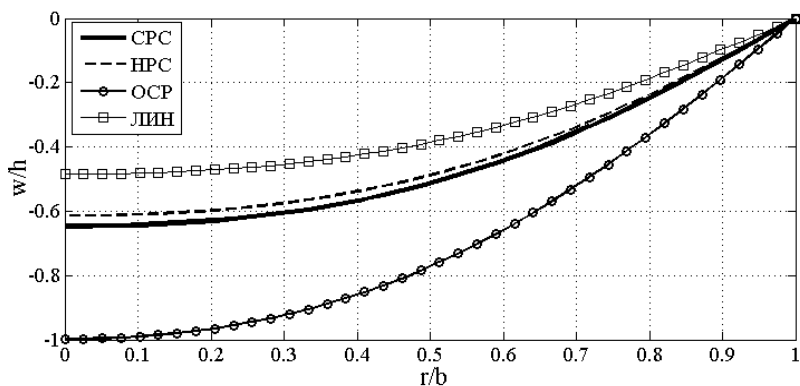


Рис. 1. Прогибы оболочки

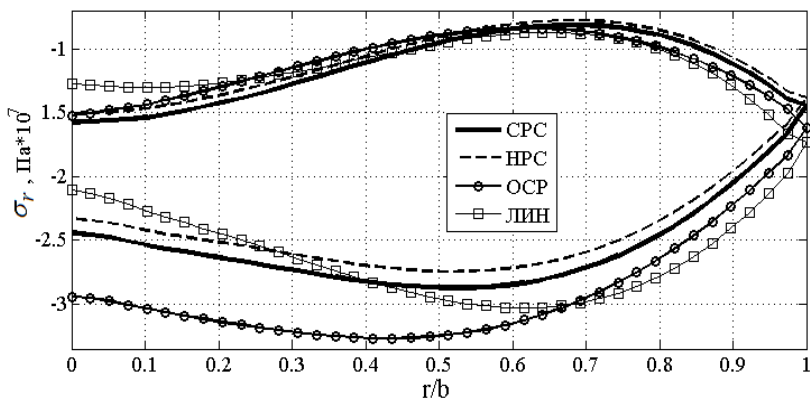


Рис. 2. Радиальные напряжения

На рис. 3 показано распределение окружных напряжений на верхней и нижней поверхностях оболочки вдоль радиуса. Поправки для окружных напряжений за счет разносопротивляемости достигают 23 %. Расхождение между геометрически линейным и нелинейным расчетами для величин окружных напряжений достигает 25 %. Учет связанности полей напряжений и температур вносит поправки до 5 % в распределение окружных напряжений.

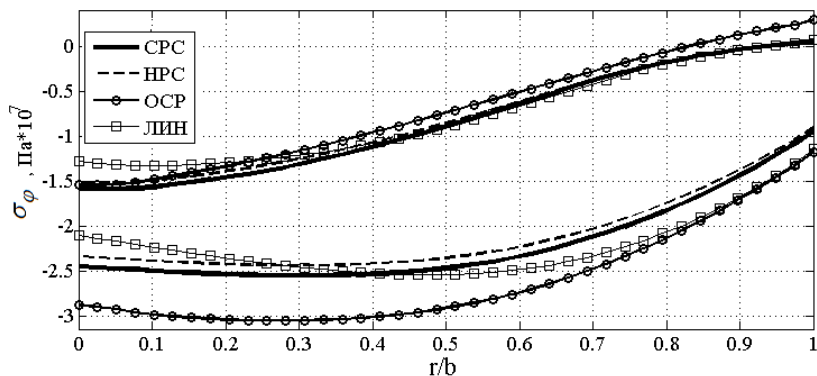


Рис. 3. Окружные напряжения

Были выявлены значительные эффекты, вызванные разноспротивляемостью материала исследуемой конструкции. Фактором, в наибольшей степени определяющим несущую способность сферической оболочки, являются радиальные напряжения. Поправки в радиальные напряжения при шарнирном опирании составили 22 %, а при жестком защемлении они достигали 56 % [5]. На основании этих фактов можно сделать вывод, что количественные проявления рассматриваемого эффекта усиливаются при более сложных видах напряженного состояния.

Литература

1. Матченко Н.М., Трещев А.А. Теория деформирования разноспротивляющихся материалов. Прикладные задачи теории упругости. М.: Тула: РААСН; ТулГУ, 2004. 211 с.
2. Трещев А.А. Теория деформирования и прочности материалов, чувствительных к виду напряженного состояния. Определяющие соотношения. М.: Тула; РААСН; ТулГУ, 2008. 264 с.
3. Karman Th. Festigkeitsprobleme in Maschinenbau. Enzyklopadie der Mathematischen Wissenschaften. Bd IV. Mechanik, Teilband 4, Hft 3, Art 27, Punkt 8. Ebene Platten. Leipzig: B. G. Teubner, 1910. S. 311-385.
4. Петров В.В., Кривошеин И.В. Методы расчета конструкций из нелинейно деформируемого материала // Учеб. пособие. М.: Издательство Ассоциации строительных вузов, 2009. 208 с.
5. Трещёв, А.А. Решение связанной задачи термоупругости для сферической оболочки из разноспротивляющегося материала с учетом геометрической нелинейности / А.А. Трещёв, М.Ю. Делягин // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я.Яковлева. Серия Механика предельного состояния. Чебоксары: ЧувГПУ. 2012. №3(13). С. 18-26.