УДК 539.384.6

ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ ТЕРМОУПРУГИХ ИЗОТРОПНЫХ СУЩЕСТВЕННО НЕЛИНЕЙНЫХ РАЗНОСПРОТИВЛЯЮЩИХСЯ МАТЕРИАЛОВ

Делягин М.Ю., Теличко В.Г., Астахов Д.С.
Тульский государственный университет

Получены определяющие соотношения для существенно нелинейных изотропных разносопротивляющихся материалов. Рассмотрена методика построения конечного элемента для решения связанных задач термоупругости материалов, свойства которых зависят от вида напряженного состояния.

Во многих новых конструкционных материалах проявляется зависимость механических и температурных свойств от вида реализуемого в точке напряженного состояния [1, 2]. Характер деформирования этих материалов обладает явно выраженным нелинейным характером. В связи с этим классические модели механики деформируемого твердого тела могут приводить к большим неточностям в расчетах. Для построения определяющих соотношений, адекватно описывающих поведение таких материалов при термомеханическом нагружении, предлагается использовать потенциал Гиббса в форме [3]:

$$\begin{aligned}\Gamma = &\left(A_e + B_e\cdot\xi\right)\cdot\sigma_0^2 + \left(C_e + D_e\cdot\xi + E_e\cdot\eta\cdot\cos\left(3\varphi\right)\right)\cdot\tau_0^2 + \\ &+\left[\left(A_e + B_e\cdot\xi\right)\cdot\sigma_0^2 + \left(C_e + D_e\cdot\xi + E_e\cdot\eta\cdot\cos\left(3\varphi\right)\right)\cdot\tau_0^2\right]^n + \\ &+C_\sigma\cdot\frac{\theta^2}{T_0} + \left(\left(b_{t1}\cdot\xi + b_{t2}\right)\cdot\sigma_0 + b_{t1}\cdot\eta\cdot\tau_0\right)\cdot\theta.\end{aligned} \qquad (1)$$

Здесь A_e, B_e, C_e, D_e, E_e – константы линейной части потенциала, A_p, B_p, C_p, D_p, E_p – константы нелинейной части потенциала, b_{t1}, b_{t2} – константы части потенциала, связывающий поля напряжений и температур, C_σ – теплоемкость материала при постоянном давлении, $\xi = \cos\psi = \sigma/S_0$, $\eta = \sin\psi = \tau/S_0$ – гармонические функции, которые трактуются как нормированные нормальные и касательные напряжения на октаэдрической площадке; $\cos 3\varphi$ – фазовый инвариант, $\sigma_0 = \sigma_{ij}\delta_{ij}/3$ – средние нормальные напряжения; σ_{ij} – компоненты тензора напряжений; δ_{ij} – символ Кронекера; $S_0 = \sqrt{\sigma_0^2 + \tau_0^2}$; $\tau_0 = \sqrt{S_{ij}S_{ij}/3}$ – октаэдрические касательные напряжения; $S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_0$ – компоненты девиатора напряжений, $\theta = T - T_0$ – изменение температуры от начального ненапряжённого состояния; T – конечная температура в точке тела; T_0 – начальная температура в точке тела в ненапряжённом состоянии.

На основе предложенного потенциала (1) строятся определяющие соотношения для изотропных разносопротивляющихся материалов, находящихся в поле действия температур. Для решения широкого круга задач механики деформируемого твердого тела предлагается построить новый конечный элемент в виде тетраэдра с четырьмя узлами. Система разрешающих уравнений МКЭ для связанной термоупругости при статических нагрузках записывается в виде:

$$\begin{bmatrix} [0] & [0] \\ [C^{tu}] & [C^t] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{u}\} \\ \{\dot{T}\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K] & [K^{ut}] \\ [0] & [K^t] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u\} \\ \{T\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F\} \\ \{Q\} \end{Bmatrix}, \qquad (2)$$

где $\{u\}$ – вектор перемещений; $\{T\}$ – вектор температур; $\{\dot{u}\}$ – вектор скоростей изменения перемещений; $\{\dot{T}\}$ – вектор скоростей изменения температур, в расчетах для аппроксимации производных по времени будем применять неявную разностную схему; $\{F\}$ – вектор узловых механических нагрузок; $\{Q\}$ – вектор узловых температурных нагрузок; $[K]=\iiint\limits_{vol}[B]^T[D][B]dx\cdot dy\cdot dz$ – матрица жесткости КЭ в виде тетраэдра при механическом нагружении; $[B]$ – матрица деформаций, $[D]$ – матрица упругости; $[K^{ut}]=-\iiint\limits_{vol}[B]^T\{\beta\}\left([C]^T\right)dx\cdot dy\cdot dz$ – термоупругая составляющая матрицы жесткости; $\{\beta\}=[D]\{\alpha\}$, $\{\alpha\}=\{\alpha_{11} \quad \alpha_{22} \quad \alpha_{33} \quad 0 \quad 0 \quad 0\}^T$, $\alpha_{ij}=\dfrac{b_{t1}\xi\sigma_{ij}}{3\sigma}+\dfrac{1}{3}b_{t2}\delta_{ij}$, $i=1,2,3$ – коэффициенты линейного теплового расширения материала по направлениям координатных осей, зависящие от вида напряженного состояния, $[C]$ – матрица интерполяционных функций; $[K^t]=\iiint\limits_{vol}[B_T]^T[D_T][B_T]dx\cdot dy\cdot dz$ – элемент матрицы теплопроводности; $[B]_T=\{L\}\{C\}\{C\}^T\{T\}$;

$\{L\} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z} \right\}^T$ – вектор оператор; $\left[D_T \right] = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{33} \end{bmatrix}$, $\lambda_{11}, \lambda_{22}, \lambda_{33}$ – коэффициенты теплопроводности материала по направлениям координатных осей; $\left[C^{tu} \right] = -T_0 \left[K^{ut} \right]^T$ – элемент матрицы термоупругого затухания; $\left[C^t \right] = \rho \iiint\limits_{vol} C_\sigma \{C\}\{C\}^T \, dx \cdot dy \cdot dz$ – элемент матрицы температурного затухания. Для определения матрицы $[D]$ получим зависимости между деформациями и напряжениями с помощью дифференцирования потенциала Гиббса без температурной составляющей:

$$e_{ij} = A_{ijkm} \sigma_{km}\,; \quad (i, j, k, m = 1, 2, 3),$$

где

$$\left[A_{ijkm} \right] = [D]^{-1} = \begin{bmatrix} A_{1111} & A_{1122} & A_{1133} & A_{1112} & A_{1123} & A_{1113} \\ A_{2211} & A_{2222} & A_{2233} & A_{2212} & A_{2223} & A_{2213} \\ A_{3311} & A_{3322} & A_{3333} & A_{3312} & A_{3323} & A_{3313} \\ A_{1211} & A_{1222} & A_{1233} & A_{1212} & A_{1223} & A_{1213} \\ A_{2311} & A_{2322} & A_{2333} & A_{2312} & A_{2323} & A_{2313} \\ A_{1311} & A_{1322} & A_{1333} & A_{1312} & A_{1323} & A_{1313} \end{bmatrix};$$

$$A_{1111} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -B_e \cdot \xi^3 + \frac{4}{3} C_e + \frac{1}{3} D_e \cdot \left(1 + 3 \cdot \xi^2 \right) \cdot \xi - \\ -\frac{2\sqrt{6}}{3} E_e \cdot \left(\alpha_{33} + \alpha_{22} \right) - E_e \cdot \cos(3\varphi) \cdot \eta^3 + \\ +\frac{1}{\sigma_{11}} \left(+2 \cdot A_e \cdot \sigma_0 + 3 \cdot B_e \cdot \sigma_0 \cdot \xi + D_e \cdot \tau_0 \cdot \eta + 2 \cdot \sqrt{2} \cdot E_e \cdot S_0 \right) \end{bmatrix} +$$

$$+\frac{Y_u^{n-1} \cdot n}{3} \cdot \begin{bmatrix} -B_p \cdot \xi^3 + \frac{4}{3} C_p + \frac{1}{3} D_p \cdot \left(1 + 3 \cdot \xi^2 \right) \cdot \xi - \\ -\frac{2 \cdot \sqrt{6}}{3} E_p \cdot \left(\alpha_{33} + \alpha_{22} \right) - E_p \cdot \cos(3\varphi) \cdot \eta^3 + \\ +\frac{1}{\sigma_{11}} \cdot \left(2 \cdot A_p \cdot \sigma_0 + 3 \cdot B_p \cdot \sigma_0 \cdot \xi + D_p \cdot \tau_0 \cdot \eta + 2 \cdot \sqrt{2} \cdot E_p \cdot S_0 \right) \end{bmatrix};$$

$$A_{1122}=A_{2211}=\frac{1}{3}\left[-\frac{2}{3}D_e\cdot\xi-\sqrt{6}\cdot E_e\cdot\alpha_{22}+\frac{2\sqrt{6}}{3}E_e\cdot\alpha_{33}-\frac{2}{3}C_e\right]+$$

$$+\frac{Y_u^{n-1}\cdot n}{3}\left(-\frac{2}{3}D_p\cdot\xi-\sqrt{6}\cdot E_p\cdot\alpha_{22}+\frac{2\sqrt{6}}{3}E_p\cdot\alpha_{33}-\frac{2}{3}C_p\right);$$

$$A_{1133}=A_{3311}=\frac{1}{3}\left[-\frac{2}{3}D_e\cdot\xi+\frac{2\sqrt{6}}{3}E_e\cdot\alpha_{22}-\sqrt{6}\cdot E_e\cdot\alpha_{33}-\frac{2}{3}C_e\right]+$$

$$+\frac{Y_u^{n-1}\cdot n}{3}\left(-\frac{2}{3}D_p\cdot\xi+\frac{2\sqrt{6}}{3}E_p\cdot\alpha_{22}-\sqrt{6}\cdot E_p\cdot\alpha_{33}-\frac{2}{3}C_p\right);$$

$$A_{1112}=A_{1211}=-\frac{\sqrt{6}}{9}\cdot E_e\cdot\alpha_{12}-Y_u^{n-1}\cdot n\cdot\frac{\sqrt{6}}{9}E_p\cdot\alpha_{12};$$

$$A_{1123}=A_{2311}=-\frac{10\sqrt{6}}{9}\cdot E_e\cdot\alpha_{23}-Y_u^{n-1}\cdot n\cdot\frac{10\sqrt{6}}{9}E_p\cdot\alpha_{23};$$

$$A_{1113}=A_{1311}=-\frac{\sqrt{6}}{9}E_e\cdot\alpha_{13}-Y_u^{n-1}\cdot n\cdot\frac{\sqrt{6}}{9}E_p\cdot\alpha_{13};$$

$$A_{2222}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}\frac{4}{3}C_e+\left(\frac{1}{3}+\xi^2\right)D_e\cdot\xi-B_e\cdot\xi^3+\\+E_e\left(\sqrt{6}\cdot\alpha_{11}+\sqrt{6}\cdot\alpha_{22}-\frac{2\sqrt{6}}{3}\cdot\alpha_{33}+\cos(3\varphi)\cdot\eta^3\right)+\\+\frac{1}{\sigma_{22}}\left(2\cdot A_e\cdot\sigma_0+3\cdot B_e\cdot\sigma_0\cdot\xi+D_e\cdot\tau_0\cdot\eta-S_0\cdot E_e\cdot\sqrt{2}\right)\end{bmatrix}+$$

$$+\frac{Y_u^{n-1}\cdot n}{3}\begin{bmatrix}\frac{4}{3}C_p+\left(\frac{1}{3}+\xi^2\right)D_p\cdot\xi-B_p\cdot\xi^3+\\+E_p\cdot\left(\sqrt{6}\cdot\alpha_{11}+\sqrt{6}\cdot\alpha_{22}-\frac{2\sqrt{6}}{3}\cdot\alpha_{33}+\cos(3\varphi)\cdot\eta^3\right)+\\+\frac{1}{\sigma_{22}}\left(2\cdot A_p\cdot\sigma_0+3\cdot B_p\cdot\sigma_0\cdot\xi+D_p\cdot\eta\cdot\tau_0-E_p\cdot S_0\cdot\sqrt{2}\right)\end{bmatrix};$$

$$A_{2233}=A_{3322}=\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}D_e\cdot\xi+\frac{2\sqrt{6}}{3}E_e\cdot\alpha_{11}-\frac{2}{3}C_e\right)+$$

$$+\frac{Y_u^{n-1}\cdot n}{3}\left[-\frac{2}{3}D_p\cdot\xi+\frac{2\sqrt{6}}{3}E_p\cdot\alpha_{11}-\frac{2}{3}C_p\right];$$

$$A_{2212}=A_{1222}=\frac{5\sqrt{6}}{9}E_e\cdot\alpha_{12}+Y_u^{n-1}\cdot n\cdot\frac{5\sqrt{6}}{9}E_p\cdot\alpha_{12};$$

$$A_{2223}=A_{2322}=\frac{5\sqrt{6}}{9}E_e\cdot\alpha_{23}+Y_u^{n-1}\cdot n\cdot\frac{5\sqrt{6}}{9}E_p\cdot\alpha_{23};$$

$$A_{2213}=A_{1322}=-\frac{4\sqrt{6}}{9}E_e\cdot\alpha_{13}-Y_u^{n-1}\cdot n\frac{4\sqrt{6}}{9}\cdot E_p\cdot\alpha_{13};$$

$$A_{3333}=\frac{1}{3}\left[\begin{array}{l}\frac{4}{3}C_e+\left(\frac{1}{3}+\xi^2\right)D_e\cdot\xi-B_e\cdot\xi^3+\\+E_e\cdot\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\alpha_{11}-\frac{2\sqrt{6}}{3}\alpha_{22}+\sqrt{6}\cdot\alpha_{33}-\eta^3\cdot\cos(3\varphi)\right)+\\+\frac{1}{\sigma_{33}}\left(2\cdot A_e\cdot\sigma_0+3\cdot B_e\cdot\sigma_0\cdot\xi+D_e\cdot\eta\cdot\tau_0-E_e\cdot S_0\cdot\sqrt{2}\right)\end{array}\right]+$$
$$+\frac{Y_u^{n-1}\cdot n}{3}\left[\begin{array}{l}\frac{4}{3}C_p+\left(\frac{1}{3}+\xi^2\right)\cdot D_p\cdot\xi-B_p\cdot\xi^3+\\+E_p\cdot\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\alpha_{11}-\frac{2\sqrt{6}}{3}\alpha_{22}+\sqrt{6}\cdot\alpha_{11}-\eta^3\cdot\cos(3\varphi)\right)+\\+\frac{1}{\sigma_{33}}\left(2\cdot A_p\cdot\sigma_0+3\cdot B_p\cdot\sigma_0\cdot\xi+D_p\cdot\eta\cdot\tau_0-E_p\cdot S_0\cdot\sqrt{2}\right)\end{array}\right];$$

$$A_{3312}=A_{1233}=-\frac{4\sqrt{6}}{9}E_e\cdot\alpha_{12}-Y_u^{n-1}\cdot n\cdot\frac{4\sqrt{6}}{9}\cdot E_p\cdot\alpha_{12};$$

$$A_{3323}=A_{2333}=\frac{5\sqrt{6}}{9}E_e\cdot\alpha_{23}+Y_u^{n-1}\cdot n\cdot\frac{5\sqrt{6}}{9}\cdot E_p\cdot\alpha_{23};$$

$$A_{3313}=A_{1333}=\frac{5\sqrt{6}}{9}E_e\cdot\alpha_{13}+Y_u^{n-1}\cdot n\cdot\frac{5\sqrt{6}}{9}\cdot E_p\cdot\alpha_{13};$$

$$A_{1212} = \frac{1}{3}\left[\begin{array}{l} 2 \cdot D_e \cdot \left(1+\xi^2\right) \cdot \xi - 2 \cdot B_e \cdot \xi^3 + 4 \cdot C_e + \\ + \frac{\sqrt{6}}{3} E_e \cdot \left(7\alpha_{11} + \alpha_{22} - 8\alpha_{33} - \sqrt{6}\cos\left(3\varphi\right) \cdot \eta^3\right) \end{array}\right] +$$

$$+ \frac{Y_u^{n-1} \cdot n}{3}\left[\begin{array}{l} 2 \cdot \left(1+\xi^2\right) \cdot D_p \cdot \xi - 2 \cdot \xi^3 \cdot B_p + 4 \cdot C_p + \\ + \frac{\sqrt{6}}{3} E_p \cdot \left(7\alpha_{11} + \alpha_{22} - 8\alpha_{33} - \sqrt{6} \cdot \cos\left(3\varphi\right) \cdot \eta^3\right) \end{array}\right];$$

$$A_{1223} = A_{2312} = E_e \cdot \sqrt{6} \cdot \alpha_{13} + Y_u^{n-1} \cdot n \cdot E_p \cdot \sqrt{6} \cdot \alpha_{13};$$

$$A_{1213} = A_{1312} = E_e \cdot \sqrt{6} \cdot \alpha_{23} + Y_u^{n-1} \cdot n \cdot E_p \cdot \sqrt{6} \cdot \alpha_{23};$$

$$A_{2323} = \frac{1}{3}\left[\begin{array}{l} -2 \cdot B_e \cdot \xi^3 + 4 \cdot C_e + \frac{2}{3} D_e \left(1+\xi^2\right) \cdot \xi + \\ + \frac{\sqrt{6}}{3} E_e \cdot \left(-2 \cdot \alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33} - \sqrt{6} \cdot \cos\left(3\varphi\right) \cdot \eta^3\right) \end{array}\right] +$$

$$+ \frac{Y_u^{n-1} \cdot n}{3}\left(\begin{array}{l} -2 \cdot B_p \cdot \xi^3 + 4 \cdot C_p + \frac{2}{3} D_p \left(1+\xi^2\right) \cdot \xi + \\ + \frac{\sqrt{6}}{3} E_p \cdot \left(-2 \cdot \alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33} - \sqrt{6} \cdot \cos\left(3\varphi\right) \cdot \eta^3\right) \end{array}\right);$$

$$A_{2313} = A_{1323} = E_e \cdot \sqrt{6} \cdot \alpha_{12} + Y_u^{n-1} \cdot n \cdot E_p \cdot \sqrt{6} \cdot \alpha_{12};$$

$$A_{1313} = \frac{1}{3}\left[\begin{array}{l} 2 \cdot \left(\xi^2 + 1\right) D_e \cdot \xi - 2 \cdot B_e \cdot \xi^3 + 4 \cdot C_e + \\ + \frac{\sqrt{6}}{3} E_e \cdot \left(7 \cdot \alpha_{11} - 8 \cdot \alpha_{22} + \alpha_{33} - \sqrt{6} \cdot \eta^3 \cdot \cos\left(3\varphi\right)\right) \end{array}\right] +$$

$$+ \frac{Y_u^{n-1} \cdot n}{3}\left[\begin{array}{l} 2 \cdot \left(\xi^2 + 1\right) D_p \cdot \xi - 2 \cdot B_p \cdot \xi^3 + 4 \cdot C_p + \\ + \frac{\sqrt{6}}{3} E_p \cdot \left(7 \cdot \alpha_{11} - 8 \cdot \alpha_{22} + \alpha_{33} - \sqrt{6} \cdot \eta^3 \cdot \cos\left(3\varphi\right)\right) \end{array}\right];$$

$$Y_u = \sigma_0^2 \cdot A_p + \sigma_0^2 \cdot \xi \cdot B_p + \tau_0^3 \cdot C_p + D_p \cdot \sigma_0 \cdot \tau_0 \cdot \eta + \tau_0^2 \cdot \eta \cdot E_p \cdot \cos\left(3\varphi\right);$$

$$\alpha_{ij} = \sqrt{3} \cdot \sigma_{ij} / S_0.$$

С помощью полученного конечного элемента можно исследовать НДС конструкций сложной формы, в том числе с криволинейным контуром и отверстиями. Математическая модель программно реализуется в среде Visual C++. Для апробации математической модели предполагается сравнить полученные решения с результатами работ [4, 5], в которых исследовались конструкции из квазилинейных изотропных разносопротивляющихся материалов с помощью метода конечных разностей.

Литература
1. Hart, P.E. The affect of pre-stressing on the thermal expansion and Young's modulus of graphite / P.E. Hart // Carbon. 1972. Vol. 10. P. 233-236.
2. Трещев А.А. Теория деформирования и прочности материалов, чувствительных к виду напряженного состояния. Определяющие соотношения / А.А. Трещев. М.: Тула; РААСН; ТулГУ, 2008. 264 с.
3. Трещёв, А. А. Термоупругий потенциал деформации для нелинейных материалов, находящихся в условиях термомеханического нагружения / Трещев А.А., Теличко В.Г., Чигинский Д.С., Астахов Д.С. // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. Чебоксары: Чувашский государственный педагогический университет им. И.Я. Яковлева, 2012. № 4. с. 66–73.
4. Трещёв, А.А. Решение связанной задачи термоупругости для сферической оболочки из разносопротивляющегося материала с учетом геометрической нелинейности / А.А. Трещёв, М.Ю. Делягин // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я.Яковлева. Серия Механика предельного состояния. Чебоксары: ЧувГПУ. 2012. №3(13). С. 18-26.
5. Чигинский, Д.С. Связанная задача термомеханического изгиба тонких прямоугольных пластин из изотропных разносопротивляющихся материалов / Д.С. Чигинский, А.А. Трещёв, В.Г. Теличко // Известия ТулГУ. Технические науки. Вып. 2. Проблемы специального машиностроения. Тула: Изд-во ТулГУ, 2011. С. 494-502.

УДК 539.3: 624.073

ДЕФОРМИРОВАНИЕ АРМИРОВАННЫХ БАЛОК-СТЕНОК ИЗ НЕЛИНЕЙНОГО МАТЕРИАЛА С УЧЕТОМ ТРЕЩИН

Трещев А.А., Неделин А.В., Злобин С.Ф.
Тульский государственный университет

Рассматривается задача о деформировании железобетонных балок-стенок. При этом бетон рассматривался как упруго-пластический разносопротивляющийся дилатирующий материал. Предложена математическая модель описания плоского напряженного состояния, базирующаяся на треугольных симплекс конечных элементах.

Общая техническая теория деформирования железобетонных балок-стенок с трещинами достаточно полно разработана Н.И.Карпенко [1]. В представленном работе предлагается исследовать напряженно-деформированное состояние (НДС) железобетонной балки-стенки с учетом основных предпосылок нелинейной механики разносопротивляющихся армированных материалов при минимальном привлечении технических гипотез [1]. При этом принималось во внимание низкая трещиностойкость