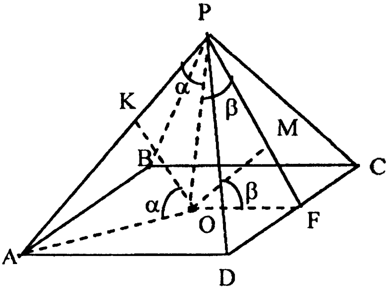
УДК 514.113(079.1)(075.3)

Анализ некоторых методов решения задач стереометрии с применением тригонометрии при подготовке к олимпиадам по математике

Кобрусев Л.К., Егорова Л.В.
Белорусский национальный технический университет

Задачи по стереометрии изучаются в 10ом и 11ом классах и являются самым большим объектом практического применения тригонометрии. При этом функции угловых параметров пространственных тел могут быть вспомогательными при определении линейных параметров фигур, их поверхностей и объемов.

Задача 1. Из основания высоты правильной четырехугольной пирамиды проведены два перпендикуляра: длиной a к боковому ребру и длиной b к боковой грани. Найти объем пирамиды.



Решение

Введем вспомогательные угловые параметры: $\angle KPO = \angle KOA = \alpha$; $\angle OPM = \angle MOF = \beta$.

Пусть также PO=H; FO=x; AO=$x\sqrt{2}$. Из $\triangle KPO$ и $\triangle AKO$: $\sin\alpha = \dfrac{a}{H}$; $\cos\alpha = \dfrac{a}{x\sqrt{2}}$; воспользуемся тождеством $\sin^2 + \cos^2 = 1$, получим $\dfrac{a^2}{H^2} + \dfrac{a^2}{2x^2} = 1$. Из $\triangle PMO$ и $\triangle FMO$: $\sin\beta = \dfrac{b}{H}; \cos\beta = \dfrac{b}{x}$; $\dfrac{b^2}{H^2} + \dfrac{b^2}{x^2} = 1$. Решаем линейную систему уравнений относительно $\dfrac{1}{H^2}$ и $\dfrac{1}{x^2}$

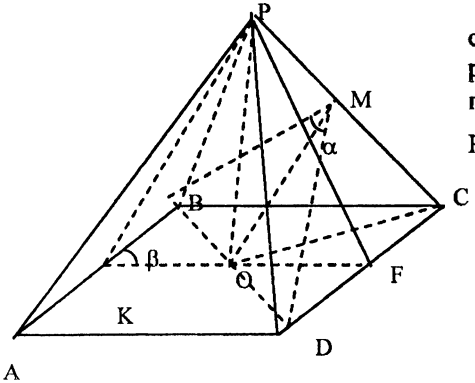
$$\begin{cases} \dfrac{1}{H^2}+\dfrac{1}{2x^2}=\dfrac{1}{a^2}; \\ \dfrac{1}{H^2}+\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{1}{b^2}. \end{cases} \qquad H=\frac{ab}{\sqrt{2b^2-a^2}}; \qquad x^2=\frac{b^2a^2}{2\left(a^2-b^2\right)}.$$

$$V=\frac{1}{6}\cdot\frac{a^3b^3}{\left(a^2-b^2\right)\sqrt{2b^2-a^2}}.$$ Решение завершено.

Линейные параметры пространственных фигур также могут быть вспомогательными для определения угловых характеристик и их функций.

Задача 2. Двугранный угол при боковом ребре правильной четырехугольной пирамиды, равен α. Найти двугранный угол при основании.

Решение



Построение и его описание составляют значительную часть решения, но мы анализируем применение тригонометрии. Пусть РО=Н; ОК=a; ОС=$a\sqrt{2}$ вспомогательные линейные параметры пирамиды.

Пусть $\angle BMD=\alpha$, а искомый угол $\angle PKO=\beta$. Из $\triangle KPO: tg\beta=\dfrac{H}{a}$; из $\triangle OMD: OM=$ $=a\sqrt{2}ctg\dfrac{\alpha}{2}$. Установим зависимость между РО, ОМ и ОС в $\triangle POC$: $OM\cdot\sqrt{OP^2+OC^2}=OP\cdot OC$ или $a\sqrt{2}ctg\dfrac{\alpha}{2}\sqrt{H^2+2a^2}=$ $=Ha\sqrt{2}$. Преобразуя получим $\dfrac{H^2}{a^2}=\dfrac{1+\cos\alpha}{-\cos\alpha}; tg^2\beta+1=\dfrac{1}{-\cos\alpha};$. $\cos\beta=\sqrt{-\cos\alpha}$ Решение завершено, но нельзя ограничиваться вычислением $\cos\beta$, а следует изучить значения α и убедиться в том, что $\alpha>90°$.

Действительно, так как OD=OC и $OC > OM$, то $tg\frac{\alpha}{2} > 1, \frac{\alpha}{2} > 45°$.

Таким образом изучение параметров позволяет сделать дополнительные выводы о данной величине и объяснить полученный результат.

В школьной программе отсутствует теорема косинусов для трехгранного угла.

Теорема. Если α, β и γ - плоские углы трехгранного угла, а двугранный угол C противолежит плоскому углу γ, то $\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos C$.

Применим эту теорему к задаче 2. Рассмотрим трехгранный угол с вершиной C. Согласно теореме $\cos\angle BCD = \cos\angle BCP\cos\angle DCP + \sin\angle BCP\sin\angle DCP\cos\angle BMD$ или обозначив $\angle BCP = \angle DCP = \gamma$ получим $\cos 90° = \cos^2\gamma + \sin^2\gamma\cos\alpha$, откуда $ctg^2\gamma = -\cos\alpha$. По той же теореме для трехгранного угла C и двугранного угла β с ребром CD имеем $\cos\gamma = \cos 90°\cos\gamma + \sin 90°\sin\gamma\cos\beta$, откуда $ctg\gamma = \cos\beta$ и окончательно $\cos\beta = \sqrt{-\cos\alpha}$. Преимущество последнего решения очевидно. Отсутствует в школьной программе и теорема синусов для трехгранного угла.

Теорема. Если α, β, γ - плоские углы трехгранного угла и A, B, C соответственно противолежащие им двугранные углы, то $\frac{\sin\alpha}{\sin A} = \frac{\sin\beta}{\sin B} = \frac{\sin\gamma}{\sin C}$. Применим эту теорему к той же задаче 2. Рассмотрим трехгранный угол с вершиной C. Согласно приведенной теореме синусов $\frac{\sin\angle BCD}{\sin\angle BMD} = \frac{\sin\angle BCP}{\sin\angle OFP}$ или

$\frac{1}{\sin\alpha} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}(*)$ Рассмотрим трехгранный угол с вершиной D и двугранным углом с ребром DM и перпендикулярными гранями (OMD) и (DMC).

По теореме косинусов для трехгранного угла с вершиной D $\cos\angle ODC = \cos\angle ODM\cos\angle CDM + \sin\angle ODM\sin\angle CDM\cos 90°$

или $\cos 45° = \cos\left(90 - \frac{\alpha}{2}\right)\cos(90 - \alpha)$, значит, $\sin\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}}$.

Подставив значение $\sin\gamma$ в (*) получим $\sin\alpha = \sin\beta\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}$ или $\sin\beta = \sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}$. Возводя в квадрат и вычитая по единице получим $\cos\beta = \sqrt{-\cos\alpha}$.

Частные случаи теорем косинусов и синусов для трехгранного угла используются в украинских учебно-методических пособиях, в частности в «Геометрія – це нескладно». О. Тайштут, Г. Литвиненко. Київ «Магистр - S», 1997г.

Если двугранный угол C – прямой, то из теоремы косинусов имеем $\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta$, ее называют теоремой трех косинусов.

Теорема. Если два плоских угла трехгранного угла лежат в перпендикулярных плоскостях, то косинус третьего плоского угла равен произведению косинусов первых двух плоских углов.

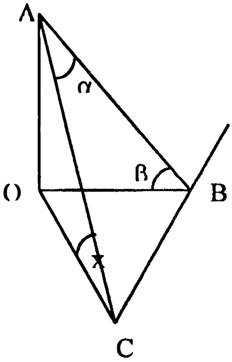
Применим теорему о трех косинусах к задаче 2.

$\cos\angle ODF = \cos\angle ODM \cdot \cos\angle MDC$,

$\cos 45° = \cos\left(90° - \frac{\alpha}{2}\right)\cos(90 - \gamma), \sin\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}}$; и т.д.

В журнале «Математика в школе» 1988 г. №5 учителем А.М. Фельдманом (СШ № 19 г. Минск) предложен метод прямоугольного тетраэдра (МПТ). Тетраэдр, все грани которого являются прямоугольными треугольниками называется прямоугольным тетраэдром. Доказываются некоторые утверждения, например: три прямых угла не могут сходится в одной вершине. Суть метода в следующей теореме: по двум плоским углам разных граней прямоугольного тетраэдра можно определить любые плоские углы других граней.

Доказательство



Пусть даны углы α и β и определяют угол x.

α	ABC
B	AOB
X	AOC

Общая вершина треугольников – А, а ребра исходящие из А: АО, АВ, АС. Составим функцию плоского угла из пары названных ребер

$$\sin x = \frac{AO}{AC} = \frac{AO}{AB} \cdot \frac{AB}{AC} = \frac{\sin\beta}{\cos\alpha}.$$

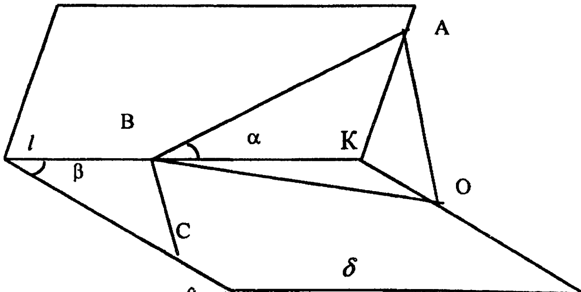
Задача 3. В гранях острого двугранного угла лежат стороны прямого угла так, что одна сторона составляет с ребром угол α, а другая - угол β. Найти двугранный угол.

Решение

$(l,\hat{}BC) = \beta$; $(l,\hat{}AB) = \alpha$

Пусть $AO \perp \delta$, где δ – грань двугранного угла.

Построим линейный угол АКО. Так как АВ перпендикулярна ВС, то по теореме о трех перпендикулярах ОВ



перпендикулярна ВС, поэтому $\angle KBO = 90^0 - \beta$. Обозначим $\angle AKO = x$. АОВК – прямоугольный тетраэдр.

α	ABK	
90^0-β	KBO	K(KB, KO, KA)
x	AKO	

$$\cos x = \frac{KO}{KA} = \frac{KO}{KB} \cdot \frac{KB}{KA} = tg(90^0 - \beta)ctg\alpha = ctg\beta\, ctg\alpha$$

Очевидно, что весь набор приемов будет полезен при решении задач стереометрии, а выбор самого очевидного и простого решения является целью математического исследования.