Литература
1. Масленников М.В. Проблема Милна с анизотропным рассеянием. Труды математического института АН СССР. 1968. Т.97.
2. Гермогенова Т.А., Шулая Д.А. О характеристическом уравнении теории переноса излучения // Докл. АН СССР. 1976. Т.231, № 4. С.841-844.
3. Роговцов Н.Н. О решении характеристического уравнения теории переноса излучения в замкнутой форме// Труды международной конференции, посвященной 90-ю академика Ф.Д. Гахова (Беларусь, Минск, февраль 16-20, 1996): Краевые задачи, специальные функции и дробное исчисление. Минск. 1996. С.305-312.

УДК 515.552

Теорема Пифагора в n-мерном пространстве

Соколова Н.М.
Белорусский национальный технический университет

В свое время Пифагор предсказал, что полное воплощение идеи о значении геометрических форм, человечество познает в эпоху Водолея, которая наступила вместе третьим тысячелетием.

Знаменитая теорема Пифагора на плоскости – это частный, но основополагающий случай обобщения теоремы на n-мерные евклидовы пространства.

Принятая теорема Пифагора в многомерном пространстве – это всего лишь квадрат длины вектора, квадрат полилинейной формы. Геометрическая иллюстрация – конфигурационная структура на плоскости: каждая гипотенуза становится катетом на следующем шаге, к квадрату катета прибавляется квадрат очередной координаты. По числу ненулевых координат определяется валентность полилинейной формы, но не размерность пространства.

Для формулировки обобщенной теоремы рассмотрим бином степени.

Выберем такие два положительных числа, чтобы они не равнялись единице и сумма их тоже не равнялась единице.

$$a_1 > 0,\ \ b_1 > 0,\ a_1 + b_1 = c \neq 1,\ \ a_1 \neq 1,\ \ b_1 \neq 1\,.$$

Бином степени n запишем в виде:

$$c^n = (a_1 + b_1)^n = (a_1 + b_1)c^{n-1} = a_1 c^{n-1} + b_1 c^{n-1} \equiv a_n^n + b_n^n\,,$$

$$\left(\frac{a_n}{c}\right)^n + \left(\frac{b_n}{c}\right) \equiv 1\,, \tag{1}$$

Здесь $\begin{cases} a_n^n \equiv a_1 c^{n-1} \\ b_n^n \equiv b_1 c^{n-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_n = a_1^{\frac{1}{n}} c^{\frac{n-1}{n}} \\ b_n = b_1^{\frac{1}{n}} c^{\frac{n-1}{n}} \end{cases}$ (2)

Преобразуем соотношения (2):

$$\begin{cases} \dfrac{a_1}{a_n} = \left(\dfrac{a_n}{c}\right)^{n-1} \\ \dfrac{b_1}{b_n} = \left(\dfrac{b_n}{c}\right)^{n-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{a_n}{c} = \left(\dfrac{a_1}{a_n}\right)^{\frac{1}{n-1}}; \\ \dfrac{b_n}{c} = \left(\dfrac{b_1}{b_n}\right)^{\frac{1}{n-1}}. \end{cases} \tag{3}$$

Значения $\dfrac{a_n}{c}$, $\dfrac{b_n}{c}$ подставим в уравнение (1):

$$\left(\frac{a_n}{c}\right)^n + \left(\frac{b_n}{c}\right)^n \equiv \left(\frac{a_1}{a_n}\right)^{\frac{n}{n-1}} + \left(\frac{b_1}{b_n}\right)^{\frac{n}{n-1}} \equiv 1\,. \tag{4}$$

Обозначим через p величину $\dfrac{n}{n-1}$,

$$p=\frac{n}{n-1}\ \Rightarrow\ n=\frac{p}{p-1}\ .$$

и перепишем тождества (4) в соответствии с обозначением

$$\left(\frac{a_{\frac{p}{p-1}}}{c}\right)^{\frac{p}{p-1}}+\left(\frac{b_{\frac{p}{p-1}}}{c}\right)\equiv\left(\frac{a_1}{a_{\frac{p}{p-1}}}\right)^{p}+\left(\frac{b_1}{b_{\frac{p}{p-1}}}\right)^{p}\equiv 1.$$

Переменную (букву) p заменим переменной (буквой) n, которая обычно применяется при записи показателя степени

$$\left(\frac{a_{\frac{n}{n-1}}}{c}\right)^{\frac{n}{n-1}}+\left(\frac{b_{\frac{n}{n-1}}}{c}\right)^{\frac{n}{n-1}}\equiv\left(\frac{a_1}{a_{\frac{n}{n-1}}}\right)^{n}+\left(\frac{b_1}{b_{\frac{n}{n-1}}}\right)^{n}\equiv 1\ ,\qquad (5)$$

При этом выполняются соотношения:

$$\begin{cases}\left(\dfrac{a_1}{a_{\frac{n}{n-1}}}\right)^{n}\equiv\left(\dfrac{a_{\frac{n}{n-1}}}{c}\right)^{\frac{n}{n-1}}\\[2ex]\left(\dfrac{b_1}{b_{\frac{n}{n-1}}}\right)^{n}\equiv\left(\dfrac{b_{\frac{n}{n-1}}}{c}\right)^{\frac{n}{n-1}}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{a_1}{a_{\frac{n}{n-1}}}\equiv\left(\dfrac{a_{\frac{n}{n-1}}}{c}\right)^{\frac{1}{n-1}};\\[2ex]\dfrac{b_1}{b_{\frac{n}{n-1}}}\equiv\left(\dfrac{b_{\frac{n}{n-1}}}{c}\right)^{\frac{1}{n-1}}\end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{a_{\frac{n}{n-1}}}{c} \equiv \left(\dfrac{a_1}{a_{\frac{n}{n-1}}}\right)^{n-1} \\ \dfrac{b_{\frac{n}{n-1}}}{c} \equiv \left(\dfrac{b_1}{b_{\frac{n}{n-1}}}\right)^{n-1} \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} a^n_{\frac{n}{n-1}} = a_1^{n-1}c\,; \\ b^n_{\frac{n}{n-1}} = b_1^{n-1}c\,. \end{cases}$$

(6)

Из равенств (3) и (6) определим a_1 и b_1:

$$a_1 = \frac{a_n^n}{c^{n-1}}, \quad b_1 = \frac{b_n^n}{c^{n-1}},$$

(3′)

$$a_1 = \frac{a_{\frac{n}{n-1}}^{\frac{n}{n-1}}}{c^{\frac{1}{n-1}}}, \qquad b_1 = \frac{b_{\frac{n}{n-1}}^{\frac{n}{n-1}}}{c^{\frac{1}{n-1}}}.$$

(6′)

Сравнивая зависимости для a_1 и b_1, установим связи между a_n и $a_{\frac{n}{n-1}}$; b_n и $b_{\frac{n}{n-1}}$:

$$a_{\frac{n}{n-1}} = a_n^{n-1}c^{2-n}; \quad b_{\frac{n}{n-1}} = b_n^{n-1}c^{2-n}.$$

(7)

Составим произведения вида $a_n \cdot a_{\frac{n}{n-1}}$, $b_n \cdot b_{\frac{n}{n-1}}$ и сложим эти произведения (с учетом (7)):

$$a_n \cdot a_{\frac{n}{n-1}} = a_n \cdot a_n^{n-1}c^{2-n} = a_n^n c^{2-n};$$

$$b_n \cdot b_{\frac{n}{n-1}} = b_n \cdot b_n^{n-1} c^{2-n} = b_n^n c^{2-n};$$

$$a_n \cdot a_{\frac{n}{n-1}} + b_n \cdot b_{\frac{n}{n-1}} = a_n^n c^{2-n} + b_n c^{2-n} = c^2 \left(\left(\frac{a_n}{c} \right)^n + \left(\frac{b_n}{c} \right)^n \right) = c^2,$$

$n \geq 2$.

Получим формулу

$$a_n \cdot a_{\frac{n}{n-1}} + b_n \cdot b_{\frac{n}{n-1}} = c^2. \qquad (8)$$

Эта формула описывает теорему Пифагора в n-мерном пространстве.

Здесь a_n и b_n длины ребер многогранников в n-мерном пространстве, построенных по закону (2) на основе a_1, b_1, $c = a_1 + b_1$; $a_{\frac{n}{n-1}}$, $b_{\frac{n}{n-1}}$ также являются длинами ребер многогранников в n-мерном пространстве, построенных по закону (7) на основе a_1, b_1, $c = a_1 + b_1$.

Геометрически теорему (8) можно интерпретировать следующим образом: площадь квадрата со стороной, равной c, равна сумме площадей двух прямоугольников со сторонами a_n, $a_{\frac{n}{n-1}}$ и b_n, $b_{\frac{n}{n-1}}$ для всех $n. > 2$. Только при $n. = 2$ прямоугольники становятся квадратами: $n = \dfrac{n}{n-1} = 2$ и тогда

$$a_n \cdot a_{\frac{n}{n-1}} = a_2^2,\ b_n \cdot b_{\frac{n}{n-1}} = b_2^2 \Rightarrow a_2^2 + b_2^2 = c^2.$$

Итак, только при $n. = 2$ квадрат раскладывается на сумму двух квадратов; для всех остальных $n. > 2$ квадрат раскладывается на сумму двух прямоугольников.

Таким образом, геометрическая интерпретация теоремы (8) приводит к доказательству великой теоремы Ферма.

Ферма сформулировал свою теорему в 1630 году следующим образом: «невозможно разложить ни куб на два куба, ни биквадрат на два биквадрата и вообще никакую степень, большую квадрата, на две степени с тем же показателем».

В современной формулировке теорема Ферма – это утверждение, что «для любого натурального числа $n. > 2$, уравнение $a^n + b^n = c^n$ не имеет решений в целых положительных числах a, b, c».

В такой постановке теорема является объектом исследования в теории чисел, и поэтому подход к доказательству теоремы всегда был одинаковый – выбираем натуральное n и разными методами перебираем массивы чисел.

В этой работе применен геометрический подход: выбраны два отрезка прямой и рассматривается эволюция этих двух величин и их суммы при переходе из пространства одной размерности в пространство другого измерения.

Теорема Пифагора не только доказывает теорему Ферма. У нее много интересных приложений. Если учесть, что теорему можно распространить на

полиномы: $c^n = (a_1 + b_1 + \ldots + p_1)^n$, то можно упростить тензорное исчисление (вместо n^p операций всего $n \cdot p$ операций); в каждом евклидовом пространстве размерности n существует область, размерность которой условно можно считать «дробной»: $\dfrac{n}{n-1} = 1 + \dfrac{1}{n-1} = (n-1) \cdot \dfrac{1}{n-1} + \dfrac{1}{n-1}$, в ней $n \neq 1$; преобразование пространства с применением новой теоремы Пифагора разделяется на два преобразования, отдельно – растяжения и отдельно – поворота.