УДК 517.977

Успокоение линейной автономной системы с запаздыванием второго порядка посредством регулятора вырождения

Карпук В.В., Метельский А.В.
Белорусский национальный технический университет

Рассмотрим систему линейных дифференциально-разностных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-h) + bu(t), \quad t \ge 0, \\ x(t) = \varphi(t), \quad t \in [-h, 0], \varphi(\cdot) \in C([-h,0], R^n) \end{cases} \tag{1}$$

Здесь x – n-вектор, u – скалярное управление, A_0, A_1 – постоянные $n \times n$-матрицы, b – постоянный n-вектор, $h > 0$ – запаздывание.

Определение. Систему (1) называют полностью управляемой по $T = [0; t_1]$, $t_1 > 0$ – фиксированный момент времени, если для всякой начальной функции $\varphi(t), t \in [-h, 0]$, найдется суммируемое с квадратом управление $u(t), t \in T : u(\cdot) \in L_2(T, R)$ такое, что $x(t) \equiv 0, t \in [t_1 - h, t_1]$.

Пусть для системы (1) выполнен спектральный критерий полной управляемости [1]:

$$\operatorname{rank}\left[pE - A_0 - A_1 e^{-ph}, b\right] = n \forall p \in \boldsymbol{C}, \tag{2}$$

где E – единичная матрица, $\boldsymbol{C}$ – множество комплексных чисел.

Замкнем систему (1) регулятором:

$$\begin{cases} u(t) = \sum\limits_{i=0}^{m} (G_i x(t - ih) + H_i y(t - ih)), \\ \dot{y}(t) = \sum\limits_{i=0}^{m} (C_i x(t - ih) + D_i y(t - ih)). \end{cases} \tag{3}$$

Здесь y – l-вектор, $G_i, H_i, C_i, D_i, i = \overline{0,m}$ – постоянные матрицы подходящих размеров.

Для удобства записи положим $A_i = 0, i = \overline{2,m}$. В результате получим замкнутую систему:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=0}^{m}\big((A_i + BG_i)x(t-ih) + BH_i y(t-ih)\big), \\ \dot{y}(t) = \sum_{i=0}^{m}(C_i x(t-ih) + D_i y(t-ih)). \end{cases} \quad (4)$$

Пусть $(')$ штрих обозначает операцию транспонирования матрицы (вектора).

Определение. Система (1) $(u(\cdot)=0)$, называется [2] точечно вырожденной в направлении $g \in R^n (g \neq 0)$, если $g'x(t) \equiv 0, t \geq (n-1)h$, для любой начальной функции $\varphi(t), t \in [-h,0]$.

В частности, в системе (1) могут вырождаться несколько фазовых переменных: $x_i(t) \equiv 0, t \geq (n-1)h, i \in \{\overline{1,n}\}$ $(x(\cdot) = \mathrm{col}(x_1,\ldots,x_n)$ – столбец фазовых переменных).

Если найдутся матрицы G_i, H_i, C_i, D_i, $i = \overline{0,m}$, такие, что в системе (4) выродятся первые n компонент, то регулятор (3) решает задачу полной управляемости (успокоения) исходной системы.

Пусть в (1) $n = 2$. Без потери общности считаем, что $b = \mathrm{col}(0;1)$. Обозначим $A_k = (a_{ij}^k)$, $\lambda = e^{-ph}$. Условие (2) полной управляемости системы (1) в этом случае равносильно несовместности системы уравнений

$$\begin{cases} a_{11}^0 + a_{11}^1\lambda - p = 0, \\ a_{12}^0 + a_{12}^1\lambda = 0. \end{cases}$$

Если уравнение $a_{12}^0 + a_{12}^1\lambda = 0$ имеет корень, то обозначим его λ_0, положим $p_1 = a_{11}^0 + a_{11}^1\lambda_0$, в противном случае p_1 – любое действительное число. Число p_1 войдет в спектр замкнутой системы, другие элементы спектра могут быть назначены.

Пусть $y \in R$, обозначим $y = x_3$, тогда рассматриваемая задача сводится к следующей: для системы $\dot{x}(t) = \sum_{k=0}^{m}\tilde{A}_k x(t-kh)$, где

$x \in R^3$, $\widetilde{A}_k = (\widetilde{a}_{ij}^k)$, $i, j = \overline{1,3}$, $\widetilde{a}_{1j}^k = a_{1j}^k$, $j = \overline{1,3}$, $k = \overline{0,m}$, подобрать коэффициенты $\widetilde{a}_{ij}^k$, $i = \overline{2,3}$, $j = \overline{1,3}$, $k = \overline{0,m}$, таким образом, чтобы в ней выродились первые две компоненты.

Пример. Для системы управления $\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t-1), \\ \dot{y}(t) = u(t) \end{cases}$ замкнутая система имеет вид (здесь p_1=0 и $\det(\widetilde{A}(\lambda) - pE) \equiv -p^3$):

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t-1), \\ \dot{y}(t) = -x(t) + 2x(t-1) - x(t-2) - \frac{3}{2}y(t) + 2y(t-1) - \\ \qquad -\frac{1}{2}y(t-2) - z(t) + 3z(t-1) - 3z(t-2) + z(t-3), \\ \dot{z}(t) = \frac{3}{2}x(t) - \frac{1}{2}x(t-1) + \frac{9}{4}y(t) - \frac{1}{4}y(t-1) + \frac{3}{2}z(t) - 2z(t-1) + \frac{1}{2}z(t-2). \end{cases}$$

В случае замыкания этой системы регулятором нейтрального типа можно обойтись двумя запаздываниями:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t-1), \\ \dot{y}(t) = -x(t) - x(t-1) + \frac{1}{2}\dot{x}(t-1) - 2y(t) - \frac{5}{2}y(t-1) + \dot{y}(t-1) + \\ \qquad + z(t) - z(t-2) - 2\dot{z}(t-1), \\ \dot{z}(t) = -2x(t) - 4y(t) + \frac{1}{2}\dot{y}(t-1) + 2z(t) - 2z(t-1) - \dot{z}(t-1). \end{cases}$$

Изложенные результаты применимы к аналитическому конструированию регуляторов в объектах управления, описываемых линейными автономными системами с запаздыванием.

Литература

1. Метельский А.В. О построении успокаивающих управлений для дифференциально-разностных систем с соизмеримыми запаздываниями // Дифференциальные уравнения. – 1995. – Т. 31. – № 12. – С. 1989-1995.

2. Метельский А.В. Проблема точечной полноты в теории управления дифференциально-разностными системами // Успехи математических наук. – 1994. – Т. 49. – Вып. 2 (296). – С. 103-140.