

8. Трещев, А. А. Теория деформирования и прочности материалов, чувствительных к виду напряженного состояния. Определяющие соотношения : монография / А. А. Трещев // РААСН, ТулГУ .— М. : Изд-во ТулГУ, 2008 .— 264 с. : ил. — Библиогр. в конце кн. — ISBN 978-5-7679-1283-4.
9. Трещев А.А., Теличко В.Г., Царев А.Н., Ходорович П.Ю. Конечно-элементная модель расчета пространственных конструкций из материалов с усложненными свойствами // Известия ТулГУ. Технические науки. – Тула: Изд-во ТулГУ. – 2012. Вып. 10. – С. 106-115.
10. Jones R.M. A Nonsymmetric Compliance Matrix Approach to Nonlinear Multimodulus Orthotropic Materials / R.M. Jones // AIAA Journal, 1977. – Vol. 15. - № 10. –P. 1436-1443.
11. Jones R.M. Modeling Nonlinear Deformation of Carbon-Carbon Composite Materials / R.M. Jones // AIAA Journal. – 1980. – Vol. 18. – № 8. – P. 995-1001.
12. Jones R.M. Stress-Strain Relations for Materials with Different Moduli in Tension and Compression / R.M. Jones // AIAA Journal, 1977. – Vol. 15. – № 1. – P. 16-25.
13. Jones R.M. Theoretical-experimental correlation of material models for non-linear deformation of graphite / R.M. Jones, D.A.R. Nelson // AIAA Journal. – 1976. – Vol. 14. – № 10. – P. 1427-1435.
14. Jones R.M. Material for nonlinear Deformation / R.M. Jones, D.A.R. Nelson // AIAA Journal. – 1976. – Vol. 14. – № 6. – P. 709–716.
15. Jones R.M. Further characteristics of a nonlinear material model for ATJ-S Graphite / R.M. Jones, D.A.R. Nelson // Journal Composit Materials – 1975. – Vol. 9. – № 7. – P. 251–265.

УДК 539.3

ПОТЕНЦИАЛ ДЕФОРМАЦИЙ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНО ОРТОТРОПНЫХ РАЗНОСОПРОТИВЛЯЮЩИХСЯ МАТЕРИАЛОВ

Трещев А.А., Лисицкий В.С.

Тулльский государственный университет

Построен новый потенциал деформаций для нелинейно ортотропных материалов, описывающий их деформирование с учетом чувствительности механических характеристик к виду напряженного состояния. Предложенный потенциал апробирован на примере углерода AVCO Mod 3a и может быть использован для расчета конструкций с учетом физической нелинейности.

В строительстве и других отраслях промышленности в настоящее время получили широкое применение конструкционные материалы, механические свойства которых не соответствуют классическим представлениям об упругопластическом деформировании твердых тел.

Построение математической модели состояния конструкционных материалов, универсально работающей при различных условиях нагружения, представляет собой одно из важнейших направлений механики деформированного твердого тела. Требуется установить

взаимнооднозначные соотношения между компонентами напряженного и деформированного состояния с указанием системы экспериментов, достаточной для определения констант, входящих в уравнения состояния и характеризующие механические свойства рассматриваемого материала.

Определяющие соотношения для нелинейно ортотропных материалов можно представить через потенциал деформаций:

$$W = W_1 + W_2 + W_3 + \dots, \quad (1)$$

где $W = W(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \tau_{12}\tau_{21}, \tau_{23}\tau_{32}, \tau_{31}\tau_{13}, \tau_{12}\tau_{23}\tau_{31})$, W_n – однородный многочлен степени $n+1$ по напряжениям.

Коэффициенты, входящие в разложение (1) являются параметрами материала, которые зависят от вида напряженного состояния и подлежат экспериментальному определению. Так для физически квазилинейных материалов имеем:

$$W_1 = A_1\sigma_{11}^2 + A_2\sigma_{22}^2 + A_3\sigma_{33}^2 + A_4\sigma_{11}\sigma_{22} + A_5\sigma_{22}\sigma_{33} + A_6\sigma_{33}\sigma_{11} + A_7\tau_{12}\tau_{21} + A_8\tau_{23}\tau_{32} + A_9\tau_{31}\tau_{13}. \quad (2)$$

Число слагаемых в разложении (1) с ростом n быстро увеличивается. Так, для $n=2$ имеем:

$$W_2 = B_1\sigma_{11}^3 + B_2\sigma_{22}^3 + B_3\sigma_{33}^3 + B_4\sigma_{11}^2\sigma_{22} + B_5\sigma_{11}\sigma_{22}^2 + B_6\sigma_{22}^2\sigma_{33} + B_7\sigma_{22}\sigma_{33}^2 + B_8\sigma_{33}^2\sigma_{11} + B_9\sigma_{33}\sigma_{11}^2 + B_{10}\sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} + B_{11}\sigma_{11}\tau_{12}^2 + B_{12}\sigma_{11}\tau_{23}^2 + B_{13}\sigma_{11}\tau_{31}^2 + B_{14}\sigma_{22}\tau_{12}^2 + B_{15}\sigma_{22}\tau_{23}^2 + B_{16}\sigma_{22}\tau_{31}^2 + B_{17}\sigma_{33}\tau_{12}^2 + B_{18}\sigma_{33}\tau_{23}^2 + B_{19}\sigma_{33}\tau_{31}^2 + B_{20}\tau_{12}\tau_{13}\tau_{23}. \quad (3)$$

При $n=3$ число слагаемых достигает уже 42.

В разложениях (2) и (3) для разносопротивляющихся материалов параметры A_k и B_k не являются константами, а представляют собой функции от комбинаций нормированных напряжений [2, 3]:

$$\alpha_{ij} = \sigma_{ij} / S; \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (4)$$

$$\text{где } S = \sqrt{\sigma_{ij}\sigma_{ij}} = \sqrt{\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2 + 2\tau_{12}^2 + 2\tau_{23}^2 + 2\tau_{13}^2}. \quad (5)$$

Очевидно, что нормированные напряжения связаны условием нормировки [2, 3]:

$$\alpha_{ij}\alpha_{ij} = \alpha_{11}^2 + \alpha_{22}^2 + \alpha_{33}^2 + 2\alpha_{12}^2 + 2\alpha_{23}^2 + 2\alpha_{13}^2 = 1. \quad (6)$$

Параметры A_k и B_k представим следующими функциями:

$$\begin{aligned}
 A_k &= A_{kk} + A_{km}\alpha_{nn} && - \text{для } k = 1,2,3; \\
 A_k &= A_{kk} + A_{km}(\alpha_{nn} + \alpha_{pp}) && - \text{для } k = 4,5,6; \\
 A_k &= A_{kk} + A_{km}\sqrt{2}\alpha_{np} && - \text{для } k = 7,8,9; \\
 B_k &= B_{kk} + B_{km}\alpha_{nn} && - \text{для } k = 1,2,3; \\
 B_k &= B_{kk} + B_{km}(\alpha_{nn} + \alpha_{pp}) && - \text{для } k = 4-9; \\
 B_k &= B_{kk} + B_{km}(\alpha_{nn} + \alpha_{pp} + \alpha_{qq}) && - \text{для } k = 10; \\
 B_k &= B_{kk} + B_{km}(\alpha_{nn} + \sqrt{2}\alpha_{qp}) && - \text{для } k = 11-19; \\
 B_k &= B_{kk} + \sqrt{2}B_{km}(\alpha_{np} + \alpha_{qr} + \alpha_{st}) && - \text{для } k = 20.
 \end{aligned} \tag{7}$$

Уравнения связи компонентов тензоров деформаций и напряжений для нелинейно ортотропных материалов могут быть определены в главных осях анизотропии на основе потенциала деформаций (1) – (3) в соответствии с формулами Кастильяно:

$$e_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \sigma_{ij}}; \quad (i, j = 1,2,3). \tag{8}$$

Константы потенциала деформаций определяются по результатам обработки данных испытания образцов ортотропного материала на одноосное растяжение и одноосное сжатие поочередно вдоль главных осей анизотропии и под углом 45 к ним с использованием метода наименьших квадратов. Последние опыты можно заменить экспериментами по сдвигу в главных плоскостях анизотропии.

Рассмотрим композитный материал – углерод AVCO Mod 3a [6, 7].

Графическая зависимость напряжений от деформаций при нелинейной аппроксимации для осевых растяжения или сжатия вдоль главной оси анизотропии x_1 представлена на рис.1.

Графическая зависимость напряжений от деформаций при нелинейной аппроксимации для осевых растяжения или сжатия вдоль главной оси анизотропии x_2 представлена на рис.2.

Графическая зависимость напряжений от деформаций для сдвига в плоскости: а) x_1x_2 ; б) x_2x_3 в) x_1x_3 на рис. 3.

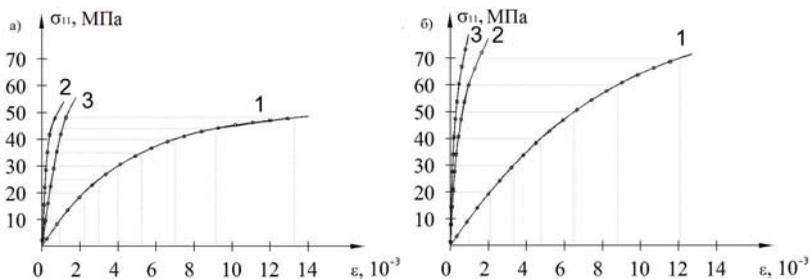


Рис. 1. Кривые напряжение-деформация в направлении оси x_1 :
 а) растяжение; б) сжатие;
 1 – продольная деформация e_{11} ; 2, 3 – поперечная деформация e_{22} и e_{33} ;
 — — — экспериментальные данные, —□— — нелинейные аппроксимации.

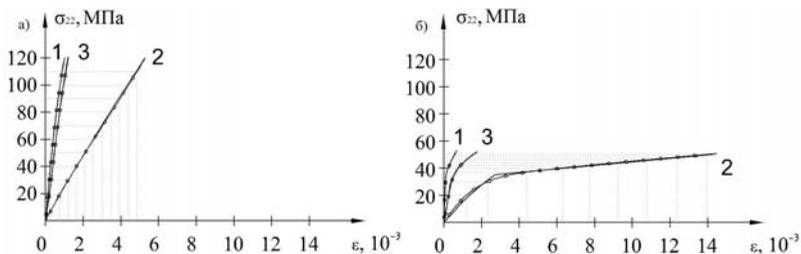


Рис. 2. Кривые напряжение-деформация в направлении оси x_2 :
 а) растяжение; б) сжатие;
 2 – продольная деформация e_{22} ; 1, 3 – поперечная деформация e_{11} и e_{33} ;
 — — — экспериментальные данные, —□— — нелинейные аппроксимации.

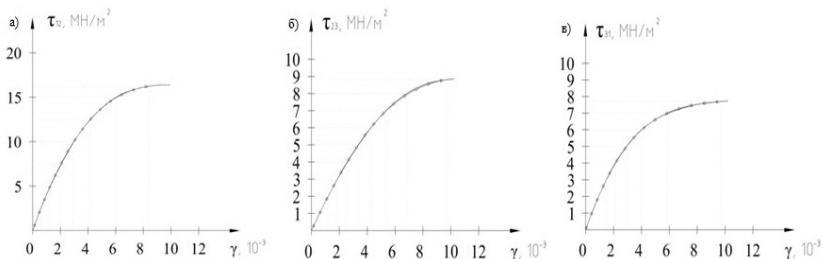


Рис. 3. Кривые напряжение-деформация в плоскости:
 а) x_1x_2 ; б) x_2x_3 в) x_1x_3 ;
 — — — экспериментальные данные, —□— — нелинейные аппроксимации.

Таким образом, предложенные зависимости деформаций от напряжений достаточно точно описывают диаграммы деформирования нелинейно ортотропного композита углерод AVCO Mod 3a [6, 7].

Из анализов проведенных исследований можно утверждать, что нелинейная аппроксимация кривых деформирования дает результаты, максимально приближенные к экспериментам. Поэтому очевидно, что предложенная модель структурно ортотропных упруго-пластических разнсопротивляющихся материалов, может быть использована для расчета ответственных конструкций, работающих при сложных напряженных состояниях. При построении материальных функций, проводилась проверка энергетической непротиворечивости по Дуккеру.

$$\delta \epsilon_{ij} \delta \sigma_{ij} = \frac{\partial^2 W}{\partial \sigma_{km} \partial \sigma_{ij}} \delta \sigma_{km} \delta \sigma_{ij} \geq 0. \quad (9)$$

Предложенные уравнения связи деформаций с напряжениями с учетом полученных из экспериментов констант для композита AVCO Mod 3a [6, 7] удовлетворяют ограничениям (9).

Литература

1. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин: прочность, устойчивость, колебания / С.А. Амбарцумян // М.: Наука, 1967. 266 с.
2. Трещев А.А. Теория деформирования и прочности материалов, чувствительных к виду напряженного состояния. Определяющие соотношения / А.А. Трещев // Москва – Тула: РААСН – ТулГУ. 2008. – 264с.
3. Трещев А.А. Анизотропные пластины и оболочки из разнсопротивляющихся материалов / А.А. Трещев // Москва – Тула: РААСН – ТулГУ. 2007. – 160с.
4. Schmuesser D.W. Nonlinear Stress-Strain and Strength Response of Axisymmetric Bimodulus Composite Material Shells / D.W.Schmuesser // AIAA Journal. – 1983. – Vol. 21. – №12. – P. 1742 – 1747.
5. Reddy L.N., Bert C.W. On the Behavior of Plates Laminated of Bimodulus Composite Materials / L.N.Reddy, C.W.Bert // ZAMM. – 1982. – Vol. 62. – № 6. – P. 213 – 219.
6. Jones R.M. A Nonsymmetric Compliance Matrix Approach to Nonlinear Multimodulus Ortotropic Materials / R.M.Jones // AIAA Journal. – 1977. – Vol. 15. - № 10. – P. 1436 – 1443.
7. Jones R.M. Modeling Nonlinear Deformation of Carbon-Carbon Composite Material / R.M.Jones // AIAA Journal. – 1980. – Vol. 18. - № 8. – P. 995 – 1001.
8. Jones R.M. Bucling of Stiffened Multilayered Circular Shells with Different Ortotropic Moduli in Tension and Compression / R.M.Jones // AIAA Journal. – 1971. – Vol. 9. - № 5. – P. 917 – 923.
9. Амбарцумян С.А. Основные уравнения и соотношения разномодульной теории упругости анизотропного тела / С.А.Амбарцумян // Изв. АН СССР. МТТ. - № 3. – С. 51 – 61.