ставляется полное описание структуры базы данных и рекомендации по технологии организации обмена.

УДК 621.1.0.18

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ СТАБИЛИЗАЦИИ НАГРЕВА МЕТАЛЛА

Ковалевский В.Б., Зенин В.Н.
Белорусский национальный технический университет
Минск, Беларусь

Вопросы экономической эффективности, а именно выбора оптимальных технологических режимов по заданным критериям, являются одними из важнейших при изучении работы любых промышленных устройств. Однако, особенно остро эта проблема поставлена в области энергосбережения.

Задача аналитического конструирования оптимальных регуляторов (АКОР) рассматривалась многочисленными исследователями (например [1], [2]). Основные идеи ее решения связаны с принципом максимума Л.С. Понтрягина (задача сводится к соответствующей краевой), с динамически программированием (задача сводится к решению специально построенного уравнения Беллмана) и с построением функции Кротова. Во всех этих случаях приходится интегрировать систему нелинейных уравнений Рикатти.

Предлагаемый подход решения задачи основан на построении специальной функции Кротова, которую можно получить в квадратурах. При этом для ее построения приходится интегрировать систему стационарных линейных дифференциальных уравнений и одно нелинейное дифференциальное уравнение. Таким образом, отпадает необходимость решения нелинейного уравнения Беллмана, что позволяет построить более эффективный алгоритм решения задачи аналитического конструирования оптимальных регуляторов [3].

Имеется вполне управляемая стационарная линейная система

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu, \qquad (1)$$

$$x(T_k) = x_T, \qquad (2)$$

где x — вектор-столбец размерности $n \times 1$; u — вектор-столбец управления размерности $m \times 1$; A — матрица размерности $n \times n$; B — матрица размерности $n \times m$; t_k — фиксированное конечное время $t_k > 0$; x_T — вектор фазовых координат в момент времени t_k.

Требуется найти такое гладкое управление $u(t)$, которое переводило бы решение системы (1) в конечное состояние (2) за время t_k и доставляло бы минимум функционалу

$$I^*(u)=\int_0^{t_k}\left((a,x)+(b,u)+x^T Px+u^T Qu\right)dt\to\min_{u\in R^m},\qquad (3)$$

где P — матрица размерности $n\times n$; Q — положительно определенная, симметричная матрица размерности $m\times m$.

Для решения полученной задачи рассматривается вспомогательное квазилинейное ДУ в частных производных [5]

$$\frac{\partial S(x,t)}{\partial t}+\left(\frac{\partial S(x,t)}{\partial x},Ax+Bu\right)=(a,x)+(b,u)+x^T Px+u^T Qu,\qquad (4)$$

с начальным условием $S(x,0)=0$, (5)

Определим из (4) точку экстремума, при котором производится решение системы (4), (5):

$$u=\frac{1}{2}\left(Q^{-1}\right)^T B^T\left(\frac{\partial S(x,t)}{\partial x}\right)^T-\frac{1}{2}\left(Q^{-1}\right)^T b^T,\qquad (6)$$

После подстановки (6) в (4) получается

$$\frac{\partial S(x,t)}{\partial t}+\left(\frac{\partial S(x,t)}{\partial x},Ax+\frac{1}{2}\left(W\left(\frac{\partial S(x,t)}{\partial x}\right)^T-V\right)\right)=$$
$$(a,x)+\frac{1}{2}\left(b,\left(Q^{-1}\right)^T B^T\left(\frac{\partial S(x,t)}{\partial x}\right)^T-\left(Q^{-1}\right)^T b^T\right)+x^T Px+$$
$$+\frac{1}{4}\left(\frac{\partial S(x,t)}{\partial x}W\left(\frac{\partial S(x,t)}{\partial x}\right)^T-b\left(Q^{-1}\right)^T B^T\left(\frac{\partial S(x,t)}{\partial x}\right)^T-\right.,\qquad (7)$$
$$\left.-\frac{\partial S(x,t)}{\partial x}V+b\left(Q^{-1}\right)^T b^T\right),$$

где $W=B\left(Q^{-1}\right)^T B^T$, $V=B\left(Q^{-1}\right)^T b^T$.

Таким образом, имеется задача Коши для нелинейного уравнения с частными производными первого порядка (7), (5). Данная задача решается методом характеристик [4].

Введем обозначения $R=\frac{\partial S}{\partial x}, R_0=\frac{\partial S}{\partial t}$ и построим характеристическую систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dt}{dv}=1, \\ \frac{dx}{dv}=Ax+\frac{1}{2}WR^T-\frac{1}{2}V \\ \frac{dR_0}{dv}=0 \\ \frac{dR}{dv}=-RA-a-x^T\left(P+P^T\right) \\ \frac{dS}{dv}=R_0+RAx+\frac{1}{2}RWR^T-\frac{1}{2}RV \end{cases} \tag{8}$$

с начальными условиями

$$\begin{cases} t\big|_{v=0}=0, \\ x\big|_{v=0}=\tau, \\ R_0\big|_{v=0}=(a,\tau)+\tau^T P\tau, \\ R\big|_{v=0}=(0,\dots,0), \\ S\big|_{v=0}=0, \end{cases} \tag{9}$$

Из анализа систем уравнений (8), (9) следует, что $t=v$ и $R_0=(a,\tau)+\tau^T P\tau$.

На основании системы уравнений (8) составляется уравнение

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dv} \\ \left(\frac{dR}{dv}\right)^T \end{pmatrix}=\Delta(t)\begin{pmatrix} x \\ R^T \end{pmatrix}+f(t), \tag{10}$$

Получено неоднородное нестационарное уравнение вида $\dot{x}=\Delta(t)x+f(t)$ с начальным условием $x(0)=x_0$. Для данного уравнения решение записывается в виде

$$\begin{pmatrix} x \\ R^T \end{pmatrix}=\Phi(v)\begin{pmatrix} \tau \\ 0 \end{pmatrix}+L(v), \tag{11}$$

где $\Phi(v)$ — фундаментальная матрица размерности $2n\times2n$;

$$L(v)=\Phi(v)\int_0^v \Phi^{-1}(\xi)f(\xi)d\xi$$

или
$$\begin{pmatrix} x \\ R^T \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \varphi_1(v) & \varphi_3(v) \\ \varphi_2(v) & \varphi_4(v) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \tau \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} l_1(v) \\ l_2(v) \end{pmatrix}, \tag{12}$$

Из (12) следует

$$x=\varphi_1(v)\tau+l_1(v), \tag{13}$$

$$R^T=\varphi_2(v)\tau+l_2(v), \tag{14}$$

Вектор τ определяется как

$$\tau=\varphi_1(v)^{-1}x-\varphi_1(v)^{-1}l_1(v), \tag{15}$$

После подстановки выражений (13), (14) в формулу — из системы $\dfrac{dS}{dv}$ (8) последняя имеет вид

$$\frac{dS(\tau,v)}{dv}=(a,\tau)+\tau^T P\tau+\left(\tau^T\varphi_2(v)^T+l_2(v)^T\right)\times$$
$$\times\left[A\left(\varphi_1(v)\tau+l_1(v)\right)+\frac{1}{2}W\left(\varphi_2(v)\tau+l_2(v)\right)-\frac{1}{2}V\right]. \tag{16}$$

Отсюда, интегрирую, можно получить выражение для $dS(\tau,t)$. После подстановки в него выражения (15), дифференцирования выражения по x и транспонирования имеется выражение, которое можно подставить в (6) получим выражение для u:

$$u=-\frac{1}{2}\left(Q^{-1}\right)^T b^T+\frac{1}{2}\left(Q^{-1}\right)^T B^T\left[\left(\varphi_1(t)^{-1}\right)^T a^T t+2\left(\varphi_1(t)^{-1}\right)^T\times\right.$$
$$\times P\left(\varphi_1(t)^{-1}x-\varphi_1(t)^{-1}l_1(t)\right)t+\left(\varphi_1(t)^{-1}\right)^T\int_0^t\varphi_2(v)^T A l_1(v)dv+$$
$$+\left(\varphi_1(t)^{-1}\right)^T\left(\int_0^t\varphi_2(v)^T A\varphi_1(v)dv+\left(\int_0^t\varphi_2(v)^T A\varphi_1(v)dv\right)^T\right)\times$$
$$\times\left(\varphi_1(t)^{-1}x-\varphi_1(t)^{-1}l_1(t)\right)+\frac{1}{2}\left(\varphi_1(t)^{-1}\right)^T\int_0^t\varphi_2(v)^T W l_2(v)dv-$$
$$\frac{1}{2}\left(\varphi_1(t)^{-1}\right)^T\left(\int_0^t\varphi_2(v)^T W\varphi_2(v)dv+\left(\int_0^t\varphi_2(v)^T W\varphi_2(v)dv\right)^T\right)\times$$

$$\times\left(\varphi_1(t)^{-1}x-\varphi_1(t)^{-1}l_1(t)\right)+\frac{1}{2}\left(\varphi_1(t)^{-1}\right)^T\int_0^t\varphi_2(v)^T dv$$

$$+\left(\varphi_1(t)^{-1}\right)^T\left[\left(\left(\int_0^t l_2(v)^T A\varphi_1(v)dv\cdot\right)^T+\frac{1}{2}\left(\int_0^t l_2(v)^T W\varphi_2(v)dv\right)^T\right)\right].$$

Затем это выражение подставляем в исходную систему (1). Это позволяет получить уравнение вида

$$\frac{dx}{dt}=N(t)x+M(t), \tag{17}$$

Решение уравнения (17) с начальным условием (2) является искомой оптимальной траекторией $x^*(t)$.

Постановка $x^*(t)$ позволяет получить оптимальное управление $u^*(t)$. Для численного решения описанной задачи было разработано программное обеспечение.

Литература:

1. Кротов В.Ф., Гурман В.И. Методы и задачи оптимального управления. – М.: Наука, 1973.

2. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Методы оптимизации. – Мн.: Вышэйшая школа, 1975.

3. Ковалевский В.Б., Панасюк В.И. Автоматика. 1992. №4. С. 23–29.

4. Ройтенберг А.Н. Автоматическое управление.– М.: Наука, 1971.

5. Смирнов В.И. Курс высшей математики. – М.: Наука, 1981.