УДК 539.214

ОБ ОДНОМ ВАРИАНТЕ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ В КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ

Нифагин В. А.
Белорусский национальный технический университет
Минск, Беларусь

Среди основных типов теорий пластичности, получивших распространение в последнее время центральное место занимает класс теорий, в основу которых положено представление о предельных поверхностях нагружения и деформирования. При этом для теорий, описывающих малые упругопластические деформации принимается существование функции нагружения $f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, \chi)$, удовлетворяющей уравнению

$$f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, \chi) = 0 \tag{1}$$

где $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p$ — тензоры напряжений и пластических деформаций, χ — множество параметров, зависящих от истории нагружения, представляющих функционалы траекторий нагружения и деформирования в пространствах $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$.Определяющее соотношение такой теории обычно представляет собой неравенство

$$\int\limits_{\varepsilon} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \geq 0 \tag{2}$$

неотрицательности работы внутренних сил в элементе среды на любом замкнутом по деформациям цикле. Применительно к теориям с поверхностью нагружения следствием из неравенства (2) является основное неравенство пластичности

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^0)\delta\varepsilon_{ij}^p \geq 0 \tag{3}$$

где $\sigma_{ij}^0, \sigma_{ij}$ — напряжения на поверхности нагружения и вне ее, $\delta\varepsilon_{ij}^p$ — приращения пластических деформаций в цикле. Относительно последнего предполагается, что он начинается и заканчивается внутри поверхности (1) и содержит малый участок вне последней. В случае, когда приращение напряжений $\delta\sigma_{ij}$ на участке вне поверхности мало, неравенство пластичности имеет вид

$$\delta\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}^p \geq 0 \tag{4}$$

Из (3) для регулярных (без угловых точек) поверхностей нагружения вытекает выпуклость последних и искомое соотношение для бесконечно малого приращения деформаций:

$$\delta\varepsilon_{ij}^{p} = dk\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}} \qquad (5)$$

Равенство (5) представляет с геометрической точки зрения градиентальность приращения пластических деформаций к поверхности нагружения. Определяющее соотношения таких теорий (теорий течения) на основе (4) имеют вид

$$d\varepsilon_{ij}^{p} = \begin{cases} d\dfrac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}\dfrac{\partial f}{\partial\sigma_{mn}}d\sigma_{mn}, & \textit{активный процесс} \\ 0 & , \textit{пассивный процесс} \end{cases}$$

Активный и пассивный процесс при этом различаются накоплением на шаге $d\sigma_{mn}$ дополнительных пластических деформаций, что происходит при выходе процесса нагружения вне поверхности (1) с условиями

$$f = 0,\ d'f = \frac{\partial f}{\partial\sigma_{mn}}d\sigma_{mn} \qquad (7)$$

или их отсутствии, если

$$f < 0 \ \textit{или} \ f = 0, \quad d'f \le 0 \qquad (8)$$

Условие градиентальности (5) и ассоциированный закон пластичности (6) — (8) являются следствием более общего принципа макродетерминизма, согласно которому если для двух близких траекторий в пространстве напряжений установлено взаимнооднозначное соответствие так, что расстояние между соответствующими точками меньше δ, то расстояние между отвечающими им точками полученных путей деформирования будет меньше $\eta(\delta)$, причем $\eta \to 0$ при $\delta \to 0$.

Система определяющих уравнений пластичности должна включать закон упругой разгрузки, условие нагружения и ассоциированный закон пластичности.

Для описания процессов обратимого (упругого) деформирования элемента сплошной среды, достаточно кинематических величин, образующих, так называемую, энергетическую согласованную пару: тензор напряжений S и тензор деформаций Коши ε_1. Для процессов, приводящих к необратимому изменению геометрии элемента требуется дополнительное выделение (в явном или неявном виде) параметров тензорного характера, отражающих остаточную (неупругую) часть дефрмации. Этот вопрос в геометрически линейных теориях получил удовлетворительное решение, применительно к случаю конечных деформаций не имеет общепринятого разъяснения.

Введем симметричный тензор метрики актуального состояния в виде

$$Q = \nabla r \cdot L \cdot \nabla r^T \qquad (9)$$

где тензор-градиент ∇r связывает начальное и актуальное состояние элемента, L — симметричный вспомогательный тензор второго ранка, изменяющийся лишь в активном процессе. При разгрузке L — фиксирован с точностью до жесткого вращения начальной конфигурации.

Представим в виде мультипликативного разложения тензор-градиент

$$\nabla r = \Phi_e^{-1} \cdot \Phi_p^{-1} \qquad (10).$$

Тогда совмещение представлений (10) возможно, если записать

$$Q = \Phi_e^{-1} \cdot \Phi_p^{-1} \cdot L \cdot \Phi_p^{-1^T} \cdot \Phi_e^{-1^T}$$

и принять

$$L = \Phi_p \cdot \Phi_p^T; \quad Q = \Phi_e^{-1} \Phi_e^{-1^T} \qquad (11)$$

По теореме о полярном разложении

$$\Phi_e = O_e \cdot V_e = U_e \cdot O_e; \quad \Phi_p = U_p \cdot O_p = O_p \cdot V_p \qquad (12)$$

где U, V — тензоры чистой деформации, O_e, O_p — ортогональные тензоры сопутствующих деформации поворотов. Тогда с учетом (11) тензоры в (9) запишутся

$$L = U_p^2; \quad Q = (O_e \cdot V_e)^{-1} \cdot (O_e \cdot V_e)^{-1^T} = V_e^{-1} \cdot V_e^{-1} = V_e^{-2} \qquad (13)$$

и зависят только от чистой деформации.

Можно доказать, что представление (9) снимает вопрос о неединственности разгруженной конфигурации элемента K_p. Так как

$$(V_e^{-1})^{**} = O^T \cdot V_e^{-1} \cdot O; \quad O_e^{**} = O_e \cdot O; \quad O_p^{**} = O_o^T \cdot O_p \qquad (14)$$

$$U_p^{**} = O_o^T \cdot U_p \cdot O_o$$

То согласно (13), (14) вращение O актуальной или разгруженной K_p конфигурации не влияет на тензор пластичности U_p, L.

Для установления связи между скоростями упругих и пластических деформаций вычислим

$$\frac{dQ}{dt} = \nabla r \cdot \frac{dL}{dt} \cdot \nabla r^T - \nabla V \cdot Q - Q \cdot \nabla V^T$$

откуда

$$\frac{\delta Q}{\delta t}=\nabla r\cdot\frac{dL}{dt}\cdot\nabla r^{T} \qquad (15)$$

Обозначая ε_e, ε_p — тензоры упругой и пластической деформации

$$\varepsilon_e=\frac{1}{2}(E-Q);\quad \varepsilon_p=\frac{1}{2}(L-E)$$

первый из которых имеет структуру типа Альманзи, второй, как и тензор L — структуру типа Коши.

С учетом равенства

$$\frac{\delta E}{\delta t}=\nabla V+\nabla V^{T}=2D$$

внося Q и L в (15) находим

$$D=\frac{\delta\varepsilon_e}{\delta t}+\nabla r\cdot\frac{d\varepsilon_p}{dt}\cdot\nabla r^{T}=\frac{\delta\varepsilon_e}{\delta t}+\varepsilon_p^{o} \qquad (16)$$

Таким образом, как и необходимо в кинематике необратимых сред равенство полной скорости деформации и суммы скоростей упругой и пластических деформаций выполняется.

Тогда, домножая (16) слева на ∇R и справа на ∇R^{T}, находим

$$\frac{de}{dt}=\frac{d\hat{\varepsilon}_e}{dt}+\frac{d\varepsilon_p}{dt} \qquad (17)$$

здесь e — тензор полной деформации, $\hat{\varepsilon}_e$ — тензор упругой деформации, полученный из аналогичной деформации Альманзи ε_e переходом в базис r^k

$$\hat{\varepsilon}_e=\nabla R\cdot\varepsilon_e\cdot\nabla R^{T}$$

На основе представления (9) можно, в частности, получить определяющие соотношения теории пластичности.

Неравенство пластичности

$$\left(\xi(B)-\xi(A)\right)\cdot\cdot\left(dl\cdot l^{-1}+l^{-1}\cdot\cdot dl\right)\geq 0$$

Условие градиентальности приращения пластической меры

$$dp=dl\cdot l^{-1}+l^{-1}\cdot dl=dm\cdot\frac{\partial f}{\partial\xi}\qquad (dm\geq 0)$$

где $\xi=\sqrt{I_3(G)}\cdot\rho^{-1}\cdot T\cdot\rho$ — симметричный вспомогательный тензор напряжений.

Цикл ω начинается внутри поверхности деформирования в точке А, выходит на поверхность в точке В, а затем вне ее на малом участке ВС. Из точки С происходит упругая разгрузка внутрь новой поверхности. Пластическая часть l постоянна на АВ, изменяется от l до $l + dl$ на ВС и далее сохраняется на участке CD.

Определяющие уравнения теории пластичности типа течения запишутся

$$dp = \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial \eta} dm, & f = 0, \quad dm \geq 0 \\ 0, & f < 0 \quad \text{или} \quad f = 0, \quad dm < 0 \end{cases}$$

Таким образом, полученные определяющие соотношения являются корректными для описания конечных упругопластичеких деформаций сплошной среды и обладают рядом преимуществ в сравнении с ранее предложенными.

УДК 539.214

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПАКЕТОВ MATHCAD, MATLAB ПРИ ИЗУЧЕНИИ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Анисимов В.Я., Голубева В.И., Нифагин В.А.

Белорусский национальный технический университет

Минск, Беларусь

Кафедрой разработан комплекс лабораторных работ по курсу информатики, позволяющий научить студентов решать ряд задач с помощью математических пакетов Mathcad и Matlab: численные методы решения уравнений и оптимизация функций, численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений, аппроксимация функций методом наименьших квадратов, интерполирование функций.

Для всех лабораторных работ разработана единая оболочка, которая позволяет расширять комплекс по мере добавления новых тем.

Каждая лабораторная работа включает:

1. Цель работы;
2. Теоретическую часть;
3. Варианты (несколько заданий с указанием уровня сложности);
4. Примеры выполнения каждого задания;
5. Контрольные вопросы.