На одномерном симплексе (отрезке заданной длины) интерполяционные функции определяются с помощью формулы:

$$\alpha_{ij} = R_i(n,\xi_1)\cdot R_j(n,\xi_2)\text{, где } i+j=n. \tag{11}$$

На двумерном симплексе (треугольнике) интерполяционные функции определяются выражением:

$$\alpha_{ijk} = R_i(n,\xi_1)\cdot R_j(n,\xi_2)\cdot R_k(n,\xi_3)\text{, где } i+j+k=n. \tag{12}$$

Каждая из этих интерполяционных функций обращается в нуль во всех узловых точках, за исключением связанного с ней узла, где она принимает значение равное единице. Следовательно, данные функции представляют собой полиномы Лагранжа, записанные в нестандартном виде.

Рассматриваемые интерполяционные функции обладают следующими важными для построения конечных элементов свойствами. Интерполяционные функции определяются через симплексные координаты и, следовательно, инвариантны при поворотах и переносах глобальной системы координат. Кроме того, симплексные координаты удобны с вычислительной точки зрения, так как охватывают одинаковый диапазон значений для любого симплекса.

УДК 539.21

ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ГИНЗБУРГА-ЛАНДАУ И ОБРАЗОВАНИЕ ВИХРЕВОЙ РЕШЕТКИ В МНОГОСЛОЙНЫХ СВЕРХПРОВОДЯЩИХ НАНОСТРУКТУРАХ

Кушнир В. Н.
Белорусский национальный технический университет
Минск, Беларусь

Повышенный интерес к исследованию сверхпроводящих многослойных наноструктур (СМНС) обусловлен следующими причинами: Во-первых, ряд интересных физических свойств [1], а также, относительно простая технология формирования СМНС позволяют их использовать как для изучения фундаментальных проблем теории сверхпроводимости, так и в практических приложениях. Во-вторых, свойства системы магнитных вихрей, образующихся в промежуточном состоянии в СМНС, во многом подобны свойствам вихревой среды в высокотемпературных сверхпроводниках (ВТСП). Поэтому СМНС являются удобным объектом для моделирования процессов, происходящих в вихревой среде. Изучение вихревых процессов в сверхпроводниках важно, в частности, с точки зрения повышения их токонесущей способности.

В данной работе исследуется сверхпроводящее состояние СМНС типа сверхпроводник/нормальный металл, находящихся во внешнем магнитном поле, величина H_0 которого близка к верхнему критическому значению $H_{c2}(T)$. Описание сверхпроводящего состояния проводится в рамках феноменологической теории Гинзбурга-Ландау (ГЛ) [2], использование которой, в том числе и в данном случае, экспериментально обоснованно. Применение теории ГЛ предполагает решение вариационной задачи для функционала ГЛ, который в нашем случае можно записать следующим образом:

$$G=\int d^2r\left\{\left|(\nabla-i\mathrm{A})\Psi(\mathrm{r})\right|^2-\eta(z)\left|\Psi(\mathrm{r})\right|^2+\frac{1}{2}\left|\Psi(\mathrm{r})\right|^4+\kappa^2\cdot\mathrm{H}^2(\mathrm{r})\right\} \qquad (1)$$

Здесь использованы следующие обозначения: G – линейная плотность (по y) функционала ГЛ; $A(\boldsymbol{r})$ — вектор-потенциал магнитного поля $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$; Y($\boldsymbol{r}$) — волновая функция (ВФ) конденсата сверхпроводящих пар; k — параметр ГЛ (в нашем случае k > 1), h(z) – ступенчатая функция, определенная соотношением

$$\eta(z)=\begin{cases}1, & z\in\Omega_S\\ -\xi_S^2(T)/\xi_N^2(T), & z\in\Omega_N\end{cases} \qquad (2)$$

где x$S(T)$, x$N(T)$ — «корреляционные длины», характеризующие быстроту изменения ВФ внутри сверхпроводящего и нормального слоев, T — температура, WS , WN — области, занятые сверхпроводящими и нормальными слоями, соответственно. При этом мы выбрали следующую систему координат: ось OZ направлена перпендикулярно поверхности слоев, координатная плоскость XOY параллельна поверхностям слоев и совпадает с плоскостью симметрии структуры, внешнее магнитное поле направлено вдоль оси OY. СМНС полагается бесконечной в направлениях OX и OY.

Варьирование функционала (1) приводит к следующей системе уравнений для Y($\boldsymbol{r}$) и $A(\boldsymbol{r})$:

$$\begin{cases}(\nabla-i\mathrm{A}(\mathrm{r}))^2\Psi(\mathrm{r})+\eta(z)\Psi(\mathrm{r})-\left|\Psi(\mathrm{r})\right|^2\Psi(\mathrm{r})=0\\ \nabla\times\mathrm{H}(\mathrm{r})=-\dfrac{i}{2\kappa^2}\left(\Psi^*(\mathrm{r})\nabla\Psi(\mathrm{r})-\Psi(\mathrm{r})\nabla\Psi^*(\mathrm{r})\right)-\mathrm{A}(\mathrm{r})\left|\Psi(\mathrm{r})\right|^2\end{cases} \qquad (3)$$

Данная система дополняется граничными условиями

$$\left(\partial_z - i\mathrm{A}_z\right)\Psi(r)\Big|_{z=\pm L/2} = 0\,, \tag{4}$$

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})|z=\pm\, L/2 = (0, H0, 0)\,, \tag{5}$$

а также условиями сшивания ВФ на границах между сверхпроводящими и нормальными слоями.

Заметим, что в подавляющем большинстве работ [1,3] вместо (5) используются граничные условия $\Upsilon(z\to\pm\infty) = 0$, что соответствует приближению бесконечной сверхрешетки

В окрестности $H_{c2}(T)$ $\Upsilon(\boldsymbol{r}) \to 0$, так что нелинейными членами в (3) в нулевом порядке теории возмущений (ТВ) можно пренебречь. В результате, для магнитного поля и вектор-потенциала имеем

$$\boldsymbol{H}^{(0)}(\boldsymbol{r}) = (0, H_0\,, 0) \tag{6}$$

$$\boldsymbol{A}^{(0)}(\boldsymbol{r}) = (\mathrm{H}_0 z\,, 0, 0) \tag{7}$$

ВФ ищем в виде $\Upsilon(\boldsymbol{r}) = e^{ikx}\, y\,(z)$, где $y\,(z)$ определяется уравнением

$$\left(\partial_z^{\,2} + \eta\,(z) - H_0^{\,2}(z - z_0)^2\right)\psi\,(z) = 0 \tag{8}$$

Здесь параметр $z_0 \equiv k / H_0$.

Уравнение (8) вместе с граничными условиями (4) представляет собой задачу на собственные значения для H_0 при каждом фиксированном z_0. Вычисления проводились следующим образом. Для каждого заданного значения параметра z_0 находилось наибольшее собственное значение $H_0(z_0)$. Максимум $H_0(z_0)$ есть верхнее критическое поле H_{c2}. При этом при низких температурах верхнему критическому полю соответствует набор значений параметра z_0 в количестве, равном числу N_b би-слоев наноструктуры. Иначе говоря, при низких температурах собственное значение H_{c2} N_b — кратно вырождено. При промежуточных температурах (достаточно близких к критической T_c) собственное значение H_{c2} вырождено двукратно — легко видеть, что одному и тому же H_{c2} соответствуют ВФ $e^{ikx}\, y\,(z)$ и $e^{-ikx}\psi\,(-z)$. При этом ВФ (всюду положительно определенная) оказывается «локализованной» у одного из краев наноструктуры. Данный факт имеет место лишь для конечной СМНС (до сих пор в литературе рассматривалось лишь приближение бесконечной сверхрешетки) и оказывается существенным при исследовании сверхпроводника в магнитном поле, близком к верхнему критическому. Известно [4], что при понижении величины магнитного поля от критического в сверхпроводнике образуется решетка вихрей магнитного потока. В нашем случае это происходит при низких температурах, когда имеется N_b — кратное вырождение критического значения H_{c2}. При промежуточных температурах имеет место иная ситуация. Рассмотрим этот случай подробнее. Для исследования окрестности критического состояния необходимо учесть первый порядок ТВ по $|Y(r)|^2$. Очевидно, при расчете ВФ первого приближения, в силу двукратного вырождения, в качестве исходного (нулевого) приближения для ВФ конденсата следует взять

$$Y^{(0)}(r) = c_1\, e^{ikx}\, \psi(z) + c_2\, e^{-ikx}\, \psi(-z) \qquad (9)$$

с неизвестными коэффициентами c1 , c2 .

Тогда для поправки $Y^{(1)}(r)$ к ВФ получим уравнение

$$\left(\nabla - iA^{(0)}\right)^2 \Psi^{(1)}(r) + \eta(z)\Psi^{(1)}(r) = 2iA^{(1)}\left(\nabla - iA^{(0)}\right)\Psi^{(0)}(r) + \left|\Psi^{(0)}(r)\right|^2 \Psi^{(0)}(r) \qquad (10)$$

Условие ортогональности $Y^{(0)}(r)$ и $Y^{(1)}(r)$ влечет следующее интегральное соотношение

$$\int dr \left\{ \overset{*}{\Psi}{}^{(0)}(r)\cdot 2iA^{(1)}\left(\nabla - iA^{(0)}\right)\Psi^{(0)}(r) + \left|\Psi^{(0)}(r)\right|^4 \right\} = 0 \qquad (11)$$

где $A^{(1)}(r)$ — поправка первого приближения для вектор-потенциала магнитного поля, которую мы не станем выписывать.

Процедура минимизации функционала (1) с использованием (11) приводят к вполне ожидаемому соотношению $c_1 = c_2$ для весовых коэффициентов ВФ (9). Отсюда следует, что ВФ (9) имеет вдоль оси OX цепочку нулей с периодом $\Delta x = \pi/2k$. Это означает, что в плоскости симметрии наноструктуры (XOY) образуется цепочка вихрей магнитного потока — 1-мерная, а не 2-мерная решетка, как при низких температурах. Данная цепочка вихрей не обладает свойствами устойчивости обычной двумерной вихревой решетки по отношению к внешним возмущениям. Именно, при возмущении сверхпроводящего состояния транспортным током, необходимым для наблюдения резистивной характеристики (он пропускается вдоль направления OX), на вихри действует сила Лоренца в направлении оси OZ. Кроме того, вихри находятся в поле т.н. сил пиннинга, создаваемом неоднородной (периодической) структурой сверхпроводника. Результат совместного действия сил пиннинга и силы Лоренца на вихревую цепочку оказывается различным в зависимости от типа симметрии многослойной структуры. Для многослойной структуры N-типа (плоскость симметрии находится в нормальном слое) цепочка вихрей находится посередине нормального слоя, и сила пиннинга препятствует проникновению вихрей в сверхпроводящий слой. Так как транспортный ток протекает по сверхпроводящим слоям (рассматривается окрестность критического поля), то он практически не испытывает потерь, поскольку не пересекается с вихрями центрального нормального слоя. Следовательно, будем наблюдать в этом случае резкий спад резистивной характеристики. Симметричное состояние (9) при этом устойчиво. Если же плоскость симметрии находится в сверхпроводящем слое (многослойные структуры S-типа), то вихри, находящиеся в ней, будут препятствовать прохождению транспортного тока. Следовательно, за счет центрального слоя будет иметь место не полное подавление сопротивления в сверхпроводнике. Разрушение сверхпроводящего состояние в центральном слое наноструктуры, либо, в альтернативном случае, перераспределение плотности проходящего через сверхпроводник тока означает неустойчивость состояния с ВФ (9) для структур S-типа: сверхпроводящая фаза в силу условий на границах между S — и N-слоями «выдавливается» к краям сверхпроводника. Следовательно, энергетически выгодным может оказаться в этом случае состояние, соответствующее меньшим значениям верхнего критического поля. И в том, и в другом случае переход в сверхпроводящее состояние затягивается.

Литература:

1. Jin B.Y. and Ketterson J.B., Advances. in Phys., 1989, 38, №. 3, pp.189.
2. Гинзбург В.Л., Ландау Л.Д., ЖЭТФ, 1950, 10, с. 1064.
3. Lykov A.N., Advances in Phys., 1993, v. 42, p. 263.
4. Абрикосов А.А., Основы теории металлов, М., Наука, 1987.