УДК 539.19

КАЛИБРОВОЧНАЯ ТЕОРИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФЕРМИОНОВ В ИСКРИВЛЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Ционенко Д. А.
Белорусский национальный технический университет,
Минск, Беларусь

Геометрическими фермионами называются частицы с полуцелым спином, обладающие также и внутренними степенями свободы, допускающими геометрическое описание.

В рамках классической теории поля спиновые свойства частиц определяются генераторами преобразований группы Лоренца, представление которой осуществляют волновые функции соответствующих уравнений (см. [1]).

Так, для описания частиц со спином 1/2 используют уравнение Дирака [1,2]:

$$(\gamma^{\mu}\partial_{\mu}+m)\psi(x)=0, \quad (1)$$

волновой функцией которого является 4-компонентный объект — биспинор. Матрицы уравнения γ^{μ} размерностью 4x4 удовлетворяют перестановочным соотношениям: $\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}+\gamma^{\nu}\gamma^{\mu}=2g^{\mu\nu}$, где $g^{\mu\nu}$ — метрический тензор пространства-времени.

В пространстве Минковского ($g^{\mu\nu}=\eta^{\mu\nu}=diag(1,-1,-1,-1)$), когда группа Лоренца является группой пространственно-временной симметрии, и ее преобразования задают переход из одной системы отсчета в другую, соответствующим преобразованиям подвергаются волновые функции уравнения:

$$\psi'(x')=\exp\{i\omega^{\mu\nu}J_{\mu\nu}\}\psi(x), \quad J_{\mu\nu}=\frac{1}{4}\gamma_{\mu}\gamma_{\nu}, \qquad (2)$$

где параметры $\omega^{\mu\nu}$ определяются свойствами систем отсчета, между которыми осуществляется переход. Это обеспечивает ковариантность теории относительно преобразований Лоренца.

Кэлером был предложен тензорный аналог уравнения Дирака, названный впоследствии уравнением Дирака-Кэлера. Активное использование этого уравнения было определено развитием теории калибровочных полей в дискретном пространстве [3]. Перенесение теории, основанной на уравнении Дирака на решетку привело к трудностям, связанным с появлением дополнительных степеней свободы фермионов, которые не имеют физической интерпретации в континуальном пределе. Уравнение же Дирака-Кэлера имеет одно и то же число степеней свободы как на решетке, так и в непрерывном пространстве. Это объясняется тем, что спинор не является объектом геометрического происхождения в отличие от тензорных величин, которые допускают геометрическую интерпретацию. Роль уравнения Дирака-Кэлера при описании фермионов проявляется при рассмотрении теории в пространствах с топологией, отличной от топологии пространства Минковского.

В плоском пространстве уравнение Дирака-Кэлера имеет следующую матричную формулировку (см. [4,5]):

$$\left(\Gamma^{\mu}_{ab}\partial_{\mu} + mI_{ab}\right)\Phi_{a}(x) = 0;\ a,b = 1 \div 16,\ \hbar = 1,\ c = 1 \tag{3}$$

где 16-ти компонентная волновая функция $\Phi(x)$ является полным набором антисимметричных тензорных полей в пространстве размерности n=4:

$$\Phi(x) = (\ \varphi(x),\ \varphi_{\mu}(x),\ \varphi_{\mu\nu}(x),\ \varphi_{\tilde{\mu}}(x),\ \varphi(x)), \tag{4}$$

где $\tilde{\varphi}(x) = 1/4!\varphi_{\mu\nu\rho\beta}(x)\varepsilon^{\mu\nu\rho\beta}$; $\varphi^{\tilde{\beta}}(x) = 1/3!\varphi_{\mu\nu\rho}(x)\varepsilon^{\mu\nu\rho\beta}$ —псевдоскаляр и псевдотензор соответственно, *emnrs* — псевдотензор Леви-Чивита (*e1234* = -1). Матрицы уравнения (4) подчиняются перестановочным соотношениям алгебры матриц Дирака:

$$\Gamma_{\mu}\Gamma_{\nu} + \Gamma_{\nu}\Gamma_{\mu} = 2g_{\mu\nu}, \tag{5}$$

то есть реализуют 16-мерное представление алгебры Клиффорда, которое в 4-мерном пространстве является приводимым, что находит свое отражение в существовании матриц G_m, коммутирующих с матрицами G_m и подчиняющихся перестановочным соотношениям:

$$[\Gamma_{\mu}, \Gamma'_{\nu}]_{-} = 0,\ \{\Gamma'_{\mu}, \Gamma'_{\nu}\}_{+} = 2g_{\mu\nu}. \tag{6}$$

Следовательно, теория, основанная на уравнении Дирака-Кэлера обладает группой симметрии, генерируемой матрицами G_m и их произведениями. Генераторы группы внутренней симметрии имеют вид:

$$D_A = (\Gamma'_{\mu},\ \tfrac{1}{4}\Gamma'_{[\mu}\Gamma'_{\mu]},\ \Gamma'_{\tilde{\mu}},\ \Gamma'_{5}),\ A = 1 \div 15, \tag{7}$$

где $G'_5 = G'_1 G'_2 G'_3 G'_4$. То есть группой внутренней симметрии является группа SU(2.2). При этом ее действие на волновую функцию уравнения приводит к перемешиванию компонент, преобразующихся по различным неприводимым представлениям группы Лоренца.

Волновая функция уравнения (3) преобразуется по Лоренцу с генераторами

$$J'_{\mu\nu} = \frac{1}{4}(\Gamma_{[\mu}\Gamma_{\nu]} + \Gamma'_{[\mu}\Gamma'_{\nu]}). \tag{8}$$

С точки зрения теории релятивистских волновых уравнений (РВУ), уравнение с волновой функцией, реализующей представление группы Лоренца с генераторами (6) описывает частицу с набором спиновых состояний 0 и 1. Но внутренняя симметрия теории уравнения Дирака-Кэлера имеет в качестве подгруппы группу, генерируемую матрицами d_{mn} =1/4 G ? $_{[m}$G ? $_{n]}$, изоморфную SO(3.1). Поэтому, когда симметрия теории не нарушена, возможно переопределение генераторов группы Лоренца:

$$J_{\mu\nu} \rightarrow J'_{\mu\nu} - d_{\mu\nu} = \frac{1}{4}\Gamma_{[\mu}\Gamma_{\nu]}. \qquad (9)$$

Теория с переопределенными генераторами описывает мультиплет частиц со спином 1/2, реализующих представление группы SU(2.2) внутренней симметрии. Это связано с тем, что группа внутренней симметрии теории Дирака-Кэлера образует полупрямое произведение с группой Лоренца, и после переопределения спиновых свойств системы, определенных соотношением (7), мультиплет дираковских полей также будет обладать группой SU(2.2) внутренней симметрии, но которая здесь уже является изотопической, не имеющей геометрической интерпретации.

Таким образом, когда группа внутренней симметрии уравнения Дирака-Кэлера не нарушена, посредством этого уравнения возможно описание частиц со спином 1/2, обладающих группой SU(2.2) внутренней симметрии. Соответствие в описании частиц со спином 1/2 посредством уравнений Дирака и Дирака-Кэлера имеет место и при введении взаимодействия полей обоих типов с электромагнитным полем, которое осуществляется минимальным способом.

При обобщении теории Дирака-Кэлера на искривленное пространство, волновая функция уравнения является скаляром по отношению к преобразованиям координат многообразия и реализует представление локальной группы Лоренца с генераторами (6). Так как волновая функция представляет собой полный набор антисимметричных тензоров по отношению к локальной группе Лоренца, то преобразования группы SU(2.2) внутренней симметрии не могут быть глобальными, поскольку их действие на волновую функцию определяется действием на тензоры. Поэтому в обобщенное уравнение Дирака-Кэлера необходимо ввести взаимодействие с неабелевым калибровочным полем A_m^A, соответствующим локализации группы внутренней симметрии. Общековариантное уравнение Дирака-Кэлера имеет вид [7]:

$$\Gamma^{\mu}(\partial_{\mu} - i\mathrm{B}_{\mu}^{(i)(j)}\frac{1}{4}(\Gamma_{[(i)}\Gamma_{(j)]} + \Gamma'_{[(i)}\Gamma'_{(j)]}) - iqA_{\mu}^{A}D_{A})\Phi(x) + m\Phi(x) = 0$$

Калибровочное поле $\mathrm{B}_{\mu}^{(i)(j)}$ выражается через поле тетрадных элементов и является компенсирующим для локальных преобразований Лоренца (индексы *(i)* и *(j)* являются локальными лоренцевыми).

Анализ общековариантного уравнения Дирака-Кэлера (8) позволяет утверждать, что и в искривленном пространстве возможно описание частиц со спином 1/2 посредством этого уравнения. То есть решения уравнения (8) можно сопоставить решениям общековариантного уравнения Дирака, взаимодействующего с неабелевым калибровочным полем, соответствующим локализации группы SU(2.2) внутренней симметрии. В плоском пространстве соответствие было глобальным, а в искривленном пространстве – только в точке. При этом необходимо выполнение условий:

$$\delta_a^{(i)}(x)\delta_b^{(j)}(x)\tilde{F}_{\mu\nu}^{ab} = F_{\mu\nu}^{(i)(i)} + qR_{\mu\nu}^{(i)(j)}$$

$$\partial_\nu \delta_{(i)}^a(x) + B_{\nu(i)(j)}\delta^{a(j)}(x) - E_\nu^{ab}\delta_{b(i)}(x) = 0 \ ,$$

где величины da(i)(x) и *db(j)(x)* определяются соотношениями: *da(i)(x)*=1, если *a=(i)*, и *da (i)(x)*=0 в противном случае. Эти величины преобразуются по нижнему индексу согласно преобразований Лоренца, а по верхнему — согласно преобразований группы внутренней (изотопической) симметрии. $\tilde{F}_{\mu\nu}^{ab}$ — тензор напряженности калибровочного поля E_ν^{ab}, соответствующего локализации подгруппы SO(3.1) в случае дираковского поля, $F_{\mu\nu}^{(i)(i)}$ — соответствующий тензор напряженности в случае поля Дирака-Кэлера и $R_{\mu\nu}^{(i)(j)}$ — тензор напряженности поля $B_\mu^{(i)(j)}$, то есть тензор кривизны пространства-времени, два индекса которого превращены в реперные. Таким образом, при описании частиц со спином 1/2 посредством уравнения Дирака-Кэлера, тензор напряженности калибровочного поля, соответствующего группе внутренней симметрии, определяется тензором кривизны пространства-времени.

Как было показано в А.К. Горбацевичем [8], общековариантное уравнение Дирака можно рассматривать в качестве квантово механического уравнения движения в специальном координатном представлении с неортонормированными базисными векторами. Аналогичную интерпретацию допускает и уравнение (8). При этом выбор калибровки для поля A_μ^{D} должен быть связан с заданием системы отсчета. То есть выбор базиса в пространстве представления группы внутренней симметрии определяется заданием системы отсчета в пространстве-времени.

При построении квантовой механики необходим выбор систем отсчета, допускающих рассмотрение координат в виде 3+1 — системы, так как время в квантовой механике, являясь параметром, играет выделенную по отношению к координатам роль. Указанному условию удовлетворяет, в частности, система отсчета одиночного наблюдателя. Записывая в этой системе отсчета уравнение Дирака-Кэлера (8) в форме уравнения Шредингера и анализируя динамические переменные, приходим к выводу, что квантовая система, описываемая этим уравнением, после переопределения локальных преобразований

Лоренца согласно (7) описывает частицы со спином 1/2. При этом система имеет дополнительные степени свободы, что приводит к зависимости ее энергии от нового квантового числа. Дополнительные степени свободы могут быть описаны в терминах момента инерции частицы, сопоставляемой волновой функции уравнения.

Отметим, что существует пространство, задаваемое как внешняя поверхность пятимерного гиперболоида, обладающее тем свойством, что каждая его точка ассоциируется с физическим объектом, обладающим помимо спиновых степеней свободы и собственным моментом инерции [9]. Поэтому сопоставление теории, основанной на общековариантном уравнении Дирака-Кэлера с теорией общековариантного уравнения Дирака естественно проводить в рамках указанного пространства, поскольку дополнительные степени свободы фермионов в обоих случаях имеют одинаковую физическую интерпретацию. В данном (гиперболическом) пространстве электростатический потенциал определяется формулой:

$$\varphi(r) = e\left(\frac{1}{r} - \frac{r}{a^2} - \frac{1}{a}\right),$$

где a — параметр, определяющий поверхность гиперболоида. Таким образом, введение электромагнитного взаимодействия в теорию приводит к возникновению запирающего потенциала. Последнее обстоятельство может быть положено в основу объяснения конфаймента кварков в рамках топологических методов.

Литература

1. Федоров Ф.И. //Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. 1967. N2. С.85-3.

2.Богуш А.А., Мороз Л.Г. Введение в теорию классических полей. Мн., 1968.

3. Becher P., Joos H. // Zeit. f. Phys. 1982. Bd 15. S. 343 – 361.

4. Стражев В.И., Плетюхов В.А. // Acta. Phys. Polon. 1981. Vol. B12. № 7. P. 651.

5.Стражев В.И. // Acta. Phys. Polon. 1978. Vol. B9. № 5. P. 449.

6.Стражев В.И. Спиновые степени свободы и калибровочные симметрии. Автореф. дис. докт. физ.-мат. наук. Мн., 1985.

7.Ционенко Д.А. // Изв. НАН РБ, 2002, Сер. Физ.-мат. №4. с. 75 - 84.

8.Горбацевич А.К. Квантовая механика в общей теории относительности. Мн., 1985.

9.Пестов А. Б. К проблеме объединения взаимодействий. Дубна, 1983. (Препринт / ОИЯИ: Р2–83–506).