

ных испытаниях малых лабораторных образцов, определены величины нормальных и касательных напряжений в ребрах и гранях.

Заключение. Применение влагопрочного многослойного гофрокартона обработанного гидрофобными составами, обеспечивает снижение массы пространственных конструкций, экономию материальных ресурсов, сокращение трудозатрат и стоимости. Сравнение экспериментального напряженно-деформированного состояния с теоретическим, полученным на основании расчета, показывает их достаточное соответствие. Проверка по прочности и по деформациям при расчетных нагрузках выполняется.

Литература

1. V.A. Ivanov. The multiply building corrugated board for protect structures // 5 th International Conference. Modern building materials, structures and techniques (21 – 24 May 1997, Vilnius, LITHUANIA). III tomas. Vol. III. – Vilnius: «Technika», 1997. – P.134-138.

УДК 624.071.3

КОРРЕКТИРОВКА НАПРАВЛЕНИЯ ПОИСКА ОПТИМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ВЕЛИЗИ ГРАНИЦ ДЛЯ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИНОК КУСОЧНО-ПОСТОЯННОГО СЕЧЕНИЯ

Вербицкая О.Л.

*Белорусский национальный технический университет
Минск, Беларусь*

Рассматривается задача оптимизации прямоугольной линейно деформируемой шарнирно опертой по контуру пластинки. Статический расчет пластинки выполняется методом конечных элементов (МКЭ) с применением прямоугольных конечных элементов, имеющих двенадцать степеней свободы. Примененный тип конечных элементов согласно исследованиям Адини, Клаусом и Мелашом [1], является неконформным, но обеспечивает хорошую сходимость решения и упрощает алгоритм расчета.

Для подтверждения конвергенции решения выполнен расчет квадратной шарнирно опертой пластинки по разработанной нами программе *Cross*. Были приняты следующие исходные данные: размеры пластинки 6х6 м; толщина 20 см; модуль упругости $E=20$ ГПа; коэффициент Пуассона $\nu = 0.30$;

интенсивность поперечной нагрузки $p = 36 \text{ кН/м}^2$. Получено решение на конечно-элементной сетке, содержащей 361 (19x19) конечных элементов. Значения максимального прогиба и максимальных изгибающих моментов, соответственно, равны: $W_{\max} = 12.89 \text{ мм}$; $M_{x\max} = M_{y\max} = 61.593 \text{ кНм}$. По точному решению [2] значения прогиба и изгибающего момента в центре пластинки равны:

$$W_{\max} = C_5 \frac{pa^4}{D_0} = 0.00406 \frac{36 \cdot 103 \cdot 64}{0.01465 \cdot 109} = 12.93 \text{ мм};$$

$$M_{x\max} = C_6 pa^2 = 0.0479 \cdot 36 \cdot 103 \cdot 62 = 62.078 \text{ кНм},$$

где $C_5 = 0.00406$ и $C_6 = 0.0479$ — коэффициенты табулированного решения [2]; D_0 — цилиндрическая жесткость пластинки

$$D_0 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{20 \cdot 109 \cdot 0.23}{12(1-0.32)} = 0.01465 \cdot 109 \text{ Нм}$$

Сравнение результатов показывает, что значения и прогибов и изгибающих моментов согласно точного и численного решений практически совпадают. Вычислительная погрешность не превышает 0.8%.

Для оптимизации пластинки использован метод навигации направления поиска решения с помощью карты проекций текущего решения на границы, установленные ограничениями. Пусть пластинка имеет кусочно-постоянное поперечное сечение. Разделим ее на n участков и поставим условие постоянства толщины пластинки в пределах каждого такого участка. В качестве целевой функции принят объем пластинки. Требуется минимизировать функцию $V(\vec{X})$, где $\vec{X} \in R_n$ — вектор (точка) n — мерного пространства Rn , компонентами которого являются толщины участков, на которые разделена пластинка $\vec{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$. В этом случае целевая функция является линейной относительно параметров оптимизации и может быть представлена в виде:

$$V(\vec{X}) = \sum_{i=1}^n a_i x_i, \quad (1)$$

где a_i — постоянные коэффициенты, устанавливаемые по геометрическим соотношениям, $a_i > 0$; x_i — толщина пластинки на участке с номером i .

Зададим ограничения по параметрам оптимизации

$$x_i \geq x_{\text{от}}, i = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

и ограничения, выражающие условие прочности и условие жесткости

$$R - \sigma_{et} \geq 0, t = 1, 2, \dots, m - 1; \quad (3)$$

$$W_{\max} \leq W_{adm}$$

где R — расчетное сопротивление материала; σ_{et} — максимальное эквивалентное напряжение в пластинке; W_{\max} — максимальный прогиб; W_{adm} — допустимый прогиб пластинки; m — число ограничений по прочности и по жесткости.

Целевая функция $V(\vec{X})$ представляет собой гиперплоскость в $n+1$ — мерном пространстве, построенном на параметрах вектора \vec{X} и V . Условия (3) не могут быть выражены в явном виде через параметры оптимизации $\{x_i\}$. Поэтому наиболее приемлемым методом оптимизации является метод градиентного спуска. Градиент целевой функции во всех точках пространства R_n одинаков и может быть найден аналитически. В связи с этим поиск очередной точки \vec{X} пространства R_n , отстоящей от предыдущей на расстоянии s , в процессе оптимизации, можно выполнить по следующей зависимости:

$$x_i^{k+1} = x_i^k - \frac{a_i s}{\sqrt{\sum_{j=1}^n a_j^2}} \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad (4)$$

где s — шаг перемещения точки в процессе поиска решения в пространстве R_n , a_i и s не зависят от положения точки $\{x_i\}$ в пространстве R_n .

Поиск направления движения точки $\{x_i\}$ к оптимальному решению усложняется вблизи границ, описанных ограничениями вида (2) и (3). Так как статический расчет пластинки связан с большим объемом вычислений, поиск оптимального решения на каждом шаге приближений должен осуществляться при минимальном количестве обращений к подпрограмме статического расчета пластинки. Наиболее приемлемым в этом случае является способ, предусматривающий перемещение точки при очередном шаге поиска в одну из проекций текущей точки на поверхностях ограничений в пространстве R_n .

Пусть точка N с координатами $x_{1N}, x_{2N}, \dots, x_{nN}$ располагается вблизи границы, описываемой условием (3). Левую часть уравнения (3) можно рассматривать как некоторую функцию $\varepsilon(\vec{X})$, неявно выраженную через параметры оптимизации x_1, x_2, \dots, x_n . Так как размеры окрестности точки N малы, функцию $\varepsilon(\vec{X})$ можно представить как линейную. Приравняв ее к нулю, получим границу допустимой области параметров оптимизации, представляющую собой гиперплоскость в пространстве R_n .

$$\varepsilon(\bar{X}) = b_0 + b_1 x_1 + \dots + b_n x_n = 0, \quad (5)$$

где n – количество параметров оптимизации.

Для определения коэффициентов b_0, b_1, \dots, b_n вычислим значения $\varepsilon_j(\bar{X})$ в точках, расположенных на координатных осях пространства R_n и удаленных от точки N на расстоянии s , а также в самой точке N . Используя равенство (5) для перечисленных точек получим систему, содержащую $n+1$ линейных алгебраических уравнений

$$\varepsilon_j = b_0 + \sum_{i=1}^n b_i x_{ij}, \quad j = 0, 1, \dots, m. \quad (6)$$

Здесь первый индекс обозначает номер параметра оптимизации, а второй – номер базовой точки в окрестности точки N . Решив систему уравнений (6) найдем значения коэффициентов b_i .

Для продолжения поиска оптимального решения вблизи границы (5) из точки N направим вектор в сторону антиградиента функции $V(\bar{X})$ и обозначим конец этого вектора буквой M . Координаты точки M определим из выражения (4). Если условие (3) в точке M выполняется, то на данном шаге приближения в качестве промежуточного решения принимается вектор \bar{X}_M

$$\bar{X}_M = (x_{1M}, x_{2M}, \dots, x_{nM})^T \quad (7)$$

Направление поиска оптимального решения необходимо скорректировать в том случае, если в точке M условие (3) не выполняется, то есть точка M оказалась расположенной в недопустимой области. Для этого вначале определим проекции точки M на гиперплоскостях (5), аппроксимирующих границу в окрестности точки N . Для этого вычислим направляющие косинусы β_i гиперплоскости:

$$\beta_i = \frac{b_i}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2}}, \quad g_0 = \frac{b_0}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2}} \quad (8)$$

и запишем уравнение нормали, опущенной из точки M , на плоскость $\varepsilon(\bar{X}) = 0$

$$\frac{x_i - x_{iM}}{\beta_i} = \frac{x_{i+1} - x_{i+1M}}{\beta_{i+1}}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (9)$$

Координаты точки пересечения гиперплоскости $\varepsilon(\bar{X}) = 0$ и нормали к ней, то есть проекции точки M на гиперплоскость, определяются решением системы уравнений

$$A_b \bar{X}_p = G, \quad (10)$$

где
$$G = \left(\frac{x_{1M}}{\beta_1} - \frac{x_{2M}}{\beta_2}, \frac{x_{2M}}{\beta_2} - \frac{x_{3M}}{\beta_3}, \dots, \frac{x_{n-1M}}{\beta_{n-1}} - \frac{x_{nM}}{\beta_n} \right),$$

$$\bar{X}_p = (x_{1p}, x_{2p}, \dots, x_{np})^T$$

A_b – матрица, составленная из направляющих косинусов гиперплоскости.

Представим линейные ограничения (2) в виде:

$$\varphi = x_j - x_0 j = 0, j = 1, 2, \dots, n. \quad (11)$$

Координаты проекции точки M на границе (11) определяются по следующей формуле:

$$x_j C = \begin{cases} xiM, i\delta\delta i \neq j, \\ x0i, i\delta\delta i = j. \end{cases} \quad (12)$$

Общее количество ограничений параметров оптимизации $\{x_i\}$ равно $n+m$. На каждом шаге поиска оптимального решения, если хотя бы одна из границ пересечена, строится план, включающий прогнозируемую точку M и все ее проекции на границах $\varepsilon_i(\bar{x}) = 0, i = 1, 2, \dots, m, \varepsilon_j(\bar{x}) = 0, j = 1, 2, \dots, n$.

Затем устанавливается такая точка плана, в которой одновременно выполняются условия (2), (3) и целевая функция $V(\bar{x})$ имеет наименьшее значение. Эта точка и принимается в качестве решения на данном шаге приближения.

В качестве примера выполнен расчет квадратной шарнирно опертой по контуру пластинки 6×6 м, разделенной на три части (рис.1). Пластинка нагружена сосредоточенной силой $F = 720$ кН. Модуль упругости и коэффициент Пуассона были приняты, соответственно, равными $E = 20$ ГПа, $\nu = 0.30$. Приняты ограничения по жесткости $W_{\max} \leq W_{adm} = 8$ мм и по прочности $s_{\max} \leq R = 5.4$ МПа. Начальная толщина пластинки на всех участках была принята равной 60 см. Решение получено на конечно-элементной модели, построенной из 100 элементов (10×10). В процессе поиска оптимального решения сделано 150 шагов. В результате найдена оптимальная форма пластинки с объемом $V_{opt} = 13.3$ м³ и толщиной ее крайних и средней частей соответственно равными $h_1 = 27.7$ см и $h_2 = 50.8$ см (рис.1).

Выводы.

Алгоритм и разработанная на его основе компьютерная программа *Cross* обеспечивают устойчивый вычислительный процесс поиска оптимального

решения для прямоугольных шарнирно-опертых по контуру пластин кусочно-постоянного сечения.

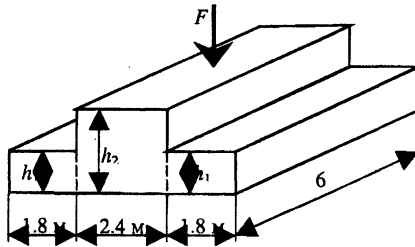


Рис. 1. Схема квадратной пластинки, разделенной на три части

Предлагаемый алгоритм оптимизации прямоугольных пластинок методом градиентного спуска с навигацией направления поиска вблизи границы по плану проекций на границы может быть успешно использован для разработки прикладных программ расчета строительных конструкций – плит перекрытий и покрытий зданий и сооружений.

Литература.

1. Adini.A., and Clough.P.W. «Analysis of Plate Bending by the Finite Element Method». Rept.to Narl., Sci. Found. USA., 1961.
2. Биргер И.А., Пановко Я.Г. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в трех томах. Т.1. – М.: Машиностроение, 1968. – 832 с.

УДК 624.12

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СВАЙНЫХ ФУНДАМЕНТОВ С ОСНОВАНИЕМ ПРИ ОТСУТСТВИИ И НАЛИЧИИ СЛАБЫХ СЛОЕВ В ГРУНТОВОЙ ТОЛЩЕ

Никитенко М. И., Роговенко В. В., Заяц С. С., Латыш В. В.

*Белорусский национальный технический университет
Минск, Беларусь*

В настоящее время часто при строительстве новых и эксплуатации старых зданий встречаются прослойки и линзы слабого грунта. Однако в процессе проведения инженерно-геологических изысканий бурением скважин не всегда удается определить расположение и размеры таких прослоек. Это