УДК 624.539.3

Оптимизация прямоугольных железобетонных плит кусочно-постоянного сечения методом градиентного спуска по границе

Вербицкая О.Л., Шевчук Л.И.
Белорусский национальный технический университет

Рассмотрим прямоугольную нелинейно деформируемую железобетонную плиту, разделенную на n частей. Пусть эти части плиты отличаются только толщиной и процентом армирования, которые и являются параметрами оптимизации x_i. В качестве целевой функции, также как и в работе [1], взята стоимость материала $C\left(\vec{X}\right)$. На параметрах оптимизации строим многомерное пространство R_n, в пределах которого определяется минимум целевой функции.

$$C\left(\vec{X}\right) = min C\left(\vec{X}\right), \qquad \vec{X} \in R_n, \qquad (1)$$

где $\vec{X}$ – вектор (точка) n–мерного пространства R_n

Параметры оптимизации ограничены только снизу

$$x_i \geq x_{lim}, i = 1,2,...,n. \qquad (2)$$

Кроме того, поставлены ограничения, выражающие условие прочности

$$R_d - s_d \geq 0 \qquad (3)$$

и условия жесткости

$$a_{lim} - a_k \geq 0, \qquad (4)$$

где x_{lim} – конструктивно допустимая толщина плиты и площади арматуры; R_d – предельное усилие для плиты; s_d – внутренней усилие, вызванное расчетной нагрузкой; a_{lim} – предельно допустимый прогиб плиты; a_k – максимальный прогиб плиты от расчетной нагрузки.

Так как напряжения s_d и прогибы a_k плиты нелинейно зависимы от параметров оптимизации x_i, то для решения задачи оптимизации плиты кусочно-постоянного сечения , как и в работе [1], могут быть использованы только численные методы. Общая схема решения задачи реализуется следующим образом.

Пусть для сформулированной выше задачи в процессе поиска оптимального решения точка $\vec{X}$ многомерного пространства R_n, построенного на параметрах оптимизации, находится вблизи границы, представленной в виде плоскости S_g, полученной по условиям ограничений (2), (3) и (4).

Для совершения очередного шага требуется найти такую точку из геометрического места точек многомерного пространства R_n, удаленных от точки $\vec{X}$ на расстоянии r и расположенных на границе S_g, в которой значение целевой функции $C(\vec{X})$ принимало бы самое минимальное значение. В окрестности точки $\vec{X}$ многомерного пространства R_n расположим сферу малого радиуса r с центром в этой точке и гиперплоскость границы

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = r^2, \qquad k_1 x_1 + k_2 x_2 + \ldots + k_n x_n = k_0 . \quad (5)$$

Геометрическое место точек в многомерном пространстве R_n, равноудаленных от точки $\vec{X}$ на расстоянии r и расположенных на плоскости S_g, образуют линию пересечения G. Такое геометрическое место точек можно определить по условию принадлежности их обоим геометрическим объектам, которое можно записать следующим образом

$$k_{n-1} x_{n-1} + k_n x_n = K; \qquad x_{n-1}^2 + x_n^2 = D, \qquad (6)$$

где

$$K = k_0 - \left(k_1 x_1 + k_2 x_2 + \ldots + k_{n-2} x_{n-2}\right); \; D = s^2 - \left(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n-2}^2\right).$$

В уравнениях системы (6) две компоненты x_n, x_{n-1} вектора $\vec{X}$ многомерного пространства R_n связаны с другими параметрами оптимизации следующим образом

$$x_{n-1}=\frac{K\cdot k_{n-1}\pm\sqrt{K^2k_{n-1}^2-\left(k_{n-1}^2+k_n^2\right)\cdot\left(K^2-Dk_n^2\right)}}{k_{n-1}^2+k_n^2};$$
$$x_n=\frac{K\cdot k_n\pm\sqrt{K^2k_n^2-\left(k_{n-1}^2+k_n^2\right)\cdot\left(K^2-Dk_{n-1}^2\right)}}{k_{n-1}^2+k_n^2}. \qquad (7)$$

Зависимость (7) при любых значениях координат $x_1, x_2, ..., x_{n-2}$ обеспечивают расположение исследуемых точек на пересечении сферы в окрестности точки $\vec{X}$ и границы S_g, построенной по условиям ограничений. Для поиска оптимального решения на поверхности пересечения использован метод градиентного спуска [2]. Учитывая сложность выражения целевой функции $C(\vec{X})=\varphi(\vec{X})$, частные производные вычисляются численным методом:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}=\frac{\varphi\left(x_1+\Delta x, x_2,...,x_{n-2}\right)-\varphi\left(x_1,x_2,...,x_{n-2}\right)}{\Delta x}; \qquad (8)$$

....

В найденную точку переносится текущее решение и описанный выше процесс повторяется. По предложенному нами алгоритму составлена программа *CROSS* и получены результаты оптимизации прямоугольных железобетонных плит.

Литература

1. Вербицкая, О. Л. Оптимизация прямоугольной пластинки методом градиентного спуска с навигацией направления поиска вблизи границ. Рефераты докладов международной научно-технической конференции “Наука — образованию, производству, экономике”, т.2. — Мн. 2003, С. 10.

2. Вербицкая, О. Л. Алгоритм оптимизации прямоугольных пластинок методом градиентного спуска с навигацией направления поиска вблизи границ. Научно-технический журнал “Вестник БНТУ” № 2, Мн. 2004, С. 15-21.