Белорусский национальный технический университет
Факультет информационных технологий и робототехники
Кафедра высшей математики № 1

СОГЛАСОВАНО
Заведующая кафедрой
_______ Катковская И. Н.
__ июля 2014 г.

СОГЛАСОВАНО
Декан факультета
_______ Трофименко Е. Е.
__ июля 2014 г.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ

МАТЕМАТИКА. ЧАСТЬ 2

для специальностей:

1-53 01 01 – Автоматизация технологических процессов и производств

1-53 01 02 – Автоматизированные системы обработки информации

1-53 01 05 – Автоматизированные электроприводы

1-53 01 06 – Промышленные роботы и робототехнические комплексы

1-54 01 02 – Методы и приборы контроля качества и диагностики состояния объектов

1-55 01 01 – Интеллектуальные приборы, машины, технологии и производства

1-55 01 02 – Интегральные сенсорные системы

1-70 02 01 – Промышленное и гражданское строительство

1-31 03 02 – Механика

1-36 01 01 – Технология машиностроения

1-36 01 03 – Технологическое оборудование машиностроительного производства

1-36 01 04 – Оборудование и технологии высокоэффективных процессов обработки материалов

1-36 01 07 – Гидропневмосистемы мобильных и технологических машин

1-36 11 01 – Подъемно-транспортные, строительные, дорожные машины и оборудование

1-44 01 01 – Организация перевозок и управление на автомобильном и городском транспорте

1-44 01 02 – Организация дорожного движения

Составители: Бричикова Елена Алексеевна, Воронович Галина Константиновна, Габасова Ольга Рафаиловна, Катковская Ирина Николаевна, Лебедева Галина Ивановна, Мартыненко Игнат Михайлович, Романюк Георгий Александрович,
Сагарда Елена Васильевна, Федосик Евгений Анатольевич,
Чепелев Николай Иосифович, Чепелева Тереса Иосифовна

Рассмотрено и утверждено
на заседании совета факультета информационных технологий
и робототехники 29 мая 2014 г., протокол № 9

ПЕРЕЧЕНЬ МАТЕРИАЛОВ

Электронный учебно-методический комплекс по учебной дисциплине «МАТЕМАТИКА. Часть 2» состоит из следующих разделов:

– кратких теоретических материалов по курсу математики второго семестра обучения;

– материалов для проведения практических занятий по учебной дисциплине;

– материалов для текущей и итоговой аттестации;

– вспомогательных материалов.

Теоретический раздел ЭУМК содержит материалы для теоретического изучения учебной дисциплины в объеме, установленном учебным планом по специальности.

Практический раздел ЭУМК содержит материалы для проведения практических занятий в аудитории и заданий для самостоятельной работы.

Раздел контроля знаний ЭУМК содержит материалы текущей и итоговой аттестации, позволяющие определить соответствие результатов учебной деятельности обучающихся требованиям образовательных стандартов высшего образования и учебно-программной документации, и представлен типовыми расчетами по темам учебной дисциплины и тестами. В разделе тестов приведен пример их решения и размещены ответы ко всем тестам.

Вспомогательный раздел ЭУМК содержит программу дисциплины, экзаменационные вопросы, перечень учебно-методических пособий, рекомендуемых к использованию в образовательном процессе.

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Цели ЭУМК: ЭУМК предназначен для изучения дисциплины «МАТЕМАТИКА». Он содержит набор методических материалов по этой дисциплине.

Особенности структурирования и подачи учебного материала: ЭУМК состоит из четырех частей.

Теоретический раздел содержит набор методических материалов по этому предмету: рекомендаций студенту для работы с дисциплиной, кратких теоретических материалов, посвященных изложению в наглядном виде основных определений, свойств, формул и теорем, сопровождающихся подробными примерами.

Практический раздел содержит практикум по дисциплине, состоящий из материалов для проведения аудиторных занятий по математике. Каждое занятие содержит задачи для домашней работы с ответами.

Раздел контроля знаний содержит типовые расчеты, тесты для организации текущего контроля знаний студентов и контрольные работы для студентов заочного отделения.

Вспомогательный раздел содержит программу дисциплины, перечень экзаменационных вопросов, список рекомендуемой литературы.

Рекомендации по организации работы с ЭУМК: конспект лекций в ЭУМК представляет собой гипертекстовый pdf-документ, предоставляющий возможность навигации по содержанию документа. Все задачи в практикуме снабжены ответами, которые могут быть использованы для самоконтроля. В конце каждого раздела практикума предложены типовые расчеты, предназначенные для самостоятельного выполнения. Тестовые задания при текущем контроле могут быть выполнены как в аудитории, так и в компьютерной системе тестирования.

1 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

1.1 Функции многих переменных

1.1.1 Основные понятия и определения

Пусть $D \subset R^n$ – произвольное множество точек *n*-мерного пространства.

Определение 1.1. Если правило *f* каждой точке $M(x_1, \ldots, x_n) \in D$ ставит в соответствие некоторое вполне определенное действительное число $u = f(M) = f(x_1, \ldots, x_n)$, то говорят, что на множестве *D задана числовая функция f* от *n переменных*: $u = f(x_1, \ldots, x_n)$.

Множество *D* называется *областью определения*, а множество $E = \{u \in R\}$ – *множеством значений* функции $u = f(M)$. В случае $n = 2$ имеем функцию 2-х переменных. Ее можно рассматривать как функцию точек плоскости *OXY*. *Частное* значение функции $z = f(x, y)$ при $x = x_0$, $y = y_0$ обозначают $f(x_0, y_0)$ или $z_0 = f(M_0)$.

Функция двух переменных (x, y) может быть задана *аналитическим*, *табличным*, *графическим* и другими способами.

Функцию трех и более переменных изобразить графически невозможно.

Примеры. Найти области определения следующих функций.

1.1. $z = x^2 + y^2$.

Решение. Областью определения является вся область $D \in R^2$. Областью значений является $[0;\infty)$. Графиком функции является параболоид вращения.

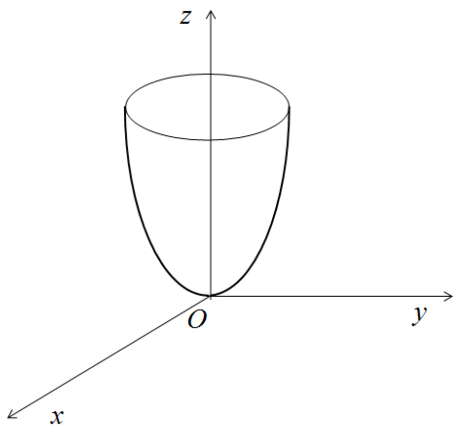


Рис. 1.1

1.2. $z = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$.

Решение. Для существования функции *z* необходимо, чтобы выполнялось неравенство $1 - x^2 - y^2 > 0$ или $x^2 + y^2 < 1$. Этому неравенству удовлетворяет внутренняя часть круга единичного радиуса. Причем граница не входит в область определения.

1.3. $z = y + \sqrt{x}$.

Решение. Функция существует для всех $x \geq 0$, т.е. в правой полуплоскости.

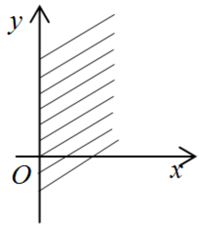


Рис. 1.2

Функции нескольких переменных могут быть заданы *явно* $(z = f(x, y), u = f(x, y, z))$ либо *неявно*, уравнением, не разрешенным относительно зависимой переменной (например, $F(x, y, z) = 0$). Например, функция *z* двух переменных *x* и *y*, определяемая уравнением $xyz - \frac{1}{x} - \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = 0$, задана неявно.

1.1.2 Предел функции

Рассмотрим последовательность точек $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2), \ldots, M_k(x_k, y_k) = \{M_k\}$ плоскости *XOY*. Говорят, что эта последовательность сходится к точке $M_0(x_0, y_0)$, если расстояние $\rho(M_k, M_0) = \sqrt{(x_k - x_0)^2 + (y_k - y_0)^2}$ стремится к нулю при $k \to \infty$, т.е.

$$\lim_{k\to\infty} \rho(M_k, M_0) = \lim_{k\to\infty} \sqrt{(x_k - x_0)^2 + (y_k - y_0)^2} = 0.$$

Либо предел последовательности точек $\{M_k\}$ равен M_0: $\lim_{k\to\infty} M_k = M_0$.

Пусть функция $z = f(x, y) = f(M)$ определена в некоторой ε-окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ (т.е. при условии $\rho(M, M_0) < \varepsilon$).

Определение 1.2 (по Гейне). Число z_0 называется *пределом* функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$, если для любой сходящейся к $M_0(x_0, y_0)$ последовательности точек $\{M_k\}$, соответствующая последовательность $f(M_1), f(M_2), \ldots, f(M_k)$ значений функции сходится к z_0:

$$z_0 = \lim_{M\to M_0} f(M), \text{если } \forall \{M_k(x_k, y_k)\}: \lim_{k\to\infty} M_k = M_0(x_0, y_0) \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} f(M_k) = f(M_0).$$

Обозначается $\lim\limits_{M\to M_0} f(M) = z_0$ или $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f(x, y) = z_0$.

Определение 1.3 (по Коши). Число z_0 называется пределом функции $z = f(x, y)$ при $x \to x_0, y \to y_0$, (т.е. в т. $M_0(x_0, y_0)$), если для $\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0$: для $\forall$ точки $M(x, y)$ из δ-окрестности т. M_0 выполняется неравенство: $|f(x, y) - z_0| < \varepsilon$.

Эти определения предела функции в точке эквивалентны.

Примеры. Вычислить пределы.

1.4. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^3-y^3}{x-y} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\left(x^2+xy+y^2\right)(x-y)}{(x-y)} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} x^2+xy+y^2 = 0$.

1.5. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 3}} \dfrac{\operatorname{tg} xy}{x}$. Умножим и разделим эту функцию на $y \neq 0$:

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 3}} \dfrac{\operatorname{tg} xy}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 3}} \dfrac{\operatorname{tg} xy \cdot y}{xy} = 3\cdot 1 = 3$, где $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 3}} \dfrac{\operatorname{tg} xy}{xy} = 1$.

1.6. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} \dfrac{x^3-y}{x^2+y^2} = \dfrac{1-2}{1+4} = \dfrac{-1}{5}$.

1.1.3 Непрерывность функции

Понятие непрерывности функции нескольких переменных определяется с помощью пределов.

Определение 1.4. Функция $u = f(x_1,\dots,x_n)$ называется *непрерывной* в т. $M_0\left(x_1^0, x_2^0,\dots,x_n^0\right)$, если выполняются следующие 3 условия:

1) $f(M)$ определена в т. M_0 и некоторой ее окрестности;

2) существует $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)$;

3) $\lim\limits_{M\to M_0} f(M) = f(M_0)$.

Если в т. M_0 не выполняется хотя бы одно из отмеченных условий, то эта точка является точкой *разрыва* функции $u = f(M)$.

Для функции $z = f(x, y)$ двух независимых переменных *точки разрыва могут быть изолированными* или образовывать *линию*. Для функции $u = f(x, y, z)$ точки разрыва могут быть либо изолированными, либо образовывать линию, либо поверхность разрыва.

Примеры. Найти точки разрыва.

1.7. $z = \dfrac{1}{(x+4)^2+y^2}$. Данная функция определена на R^2 всюду, кроме т. $M(-4{,}0)$, которая является *точкой разрыва*.

1.8. $z = \dfrac{1}{x+y-4}$. Данная функция определена для таких значений *x, y*, при которых $x+y-4 \neq 0$. Следовательно, прямая $y = 4-x$ является линией разрыва.

1.9. $u = \dfrac{2}{x^2 + y^2 + z^2 - 9}$. Эта функция определена для любых *x*, *y*, *z* таких, что $x^2 + y^2 + z^2 \neq 9$. В данном случае мы имеем *поверхность разрыва*, которая является сферой с центром в начале координат и $R = 3$.

Определение 1.5. Функция $u = f(M)$ называется *непрерывной на множестве D*, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Функции нескольких переменных, непрерывные на замкнутых ограниченных множествах, обладают свойствами, аналогичными свойствам функции одной переменной, непрерывной на отрезке. Отметим основные из них.

Теорема 1.1. *Если функция* $z = f(M)$ *непрерывна на замкнутом ограниченном множестве* $D \in R^n$*, то она ограничена на нем и достигает в некоторых точках* M_1 *и* M_2 *этого множества своих точных верхней и нижней граней*:

$$f(M_1) = \sup f(M), \quad f(M_2) = \inf f(M).$$

Замечание. Точки M_1 и M_2 могут определяться неоднозначно.

Теорема 1.2. *Если функция* $z = f(M)$ *непрерывна на замкнутом связном ограниченном множестве D, то она принимает на нем все промежуточные значения.*

Другими словами, если $\inf f(M) \leq \mu \leq \sup f(M)$, то существует такая точка $M_0 \in D$, что $f(M_0) = \mu$.

В частности, если $f(M_1) < 0$, а $f(M_2) > 0$, то на множестве *D* существует по крайней мере одна точка M_0 такая, что $f(M_0) = 0$.

Определение 1.6. Множество называется *связным*, если любые две его точки могут быть соединены линией, принадлежащей этому множеству.

Теорема 1.3. *Если функция* $z = f(M)$ *непрерывна на замкнутом ограниченном множестве D, то она равномерно-непрерывна на этом множестве, т.е. для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta(\varepsilon) > 0$: *для любых точек* M_1 *и* M_2 *множества D, находящихся на расстоянии, меньшем δ, выполняется неравенство:*

$$|f(M_1) - f(M_2)| < \varepsilon.$$

Замечание. Для функций, непрерывных на незамкнутых или неограниченных множествах, указанные теоремы могут и не выполняться.

1.2 Частные производные функции нескольких переменных. Дифференциал функции

1.2.1 Частные производные функции нескольких переменных

Пусть рассматривается функция двух переменных $z = z(x, y)$. Если один из аргументов получит приращение, то будет иметь место частное приращение функции:

$$\Delta_x z = z(x + \Delta x; y) - z(x, y), \tag{1.1}$$

$$\Delta_y z = z(x; y + \Delta y) - z(x, y). \tag{1.2}$$

Если приращение получат *x* и *y*, то имеем полное приращение функции:

$$\Delta z = z(x + \Delta x; y + \Delta y) - z(x, y). \tag{1.3}$$

Геометрически частные и полное приращения функции $\Delta_x z, \Delta_y z, \Delta z$ можно изобразить отрезками A_1B_1, A_2B_2 и A_3B_3 соответственно (рис. 1.3).

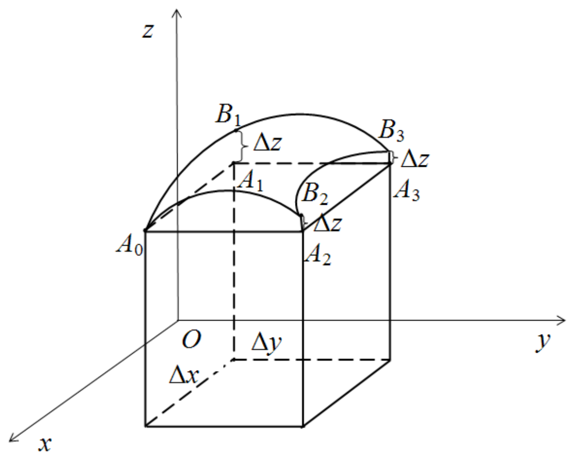


Рис.1.3

Пример 1.10. Найти частные и полное приращения функции $z = x^2 y^3$ в точке $M(2;3)$, если $\Delta x = 0{,}2,\ \Delta y = 0{,}3$.

Решение. В соответствии с формулами (1.1) – (1.3) имеем:

$$\Delta_x z = (x + \Delta x)^2 y^3 - x^2 y^3 = \left(x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2\right) y^3 - x^2 y^3 = y^3\left(x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2\right) =$$
$$= y^3\left(2x\Delta x + (\Delta x)^2\right) = 3^3\left(2 \cdot 2 \cdot 0{,}2 + 0{,}2^2\right) = 27 \cdot 0{,}84 = 22{,}68$$

$$\Delta_y z = x^2 (y + \Delta y)^3 - x^2 y^3 = x^2\left(y^3 + 3y^2\Delta y + 3(\Delta y)^2 y + (\Delta y)^3 - y^3\right) =$$
$$= x^2\left(3y^2\Delta y + 3y(\Delta y)^2 + (\Delta y)^3\right) = 4\left(27 \cdot 0{,}3 + 9 \cdot 0{,}3^2 + 0{,}3^3\right) = 35{,}748$$

$$\Delta z = (x + \Delta x)^2 (y + \Delta y)^3 - x^2 y^3 = \left(x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2\right)\left(y^3 + 3y^2\Delta y + 3y(\Delta y)^2 + (\Delta y)^3\right) - x^2 y^3 =$$
$$= \left(2^2 + 0{,}8 + 0{,}04\right)\left(27 + 8{,}1 + 0{,}8 + 0{,}027\right) - 4 \cdot 27 = 4{,}84 \cdot 35{,}937 - 108 = 65{,}935$$

Определение 1.7. *Частной производной* функции $z = z(x, y)$ по переменной *x* в точке $M(x_0, y_0)$ называется предел отношения частного приращения функции $\Delta_x z$ к соответствующему приращению аргумента Δx при условии, что последнее стремится к нулю:

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}.$$

Аналогично $z'_y = \dfrac{\partial z}{\partial y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta_y z}{\Delta y}$.

Частные производные определяют скорость изменения функции в точке $M(x_0, y_0)$ в направлении изменения независимой переменной.

Вычисляются частные производные по тем же правилам, формулам и свойствам, что и для функции одной переменной, при условии, что остальные переменные остаются постоянными.

Пример 1.11. Найти частные производные функции $z = 2^{xy}$.

Решение. Частную производную z'_x вычисляем как производную показательной функции, считая y постоянной: $z'_x = 2^{xy} \cdot \ln 2 \cdot y$. Аналогично $z'_y = 2^{xy} \cdot \ln 2 \cdot x$.

Пример 1.12. Найти $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial u}{\partial z}$, если $u = xy + \cos^2\left(z - x^2 y^3\right)$.

Решение. Имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u'_x = y + 2\cos\left(z - x^2 y^3\right)\left(-\sin\left(z - x^2 y^3\right)\right) \cdot \left(-2xy^3\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x + 2\cos\left(z - x^2 y^3\right)\left(-\sin\left(z - x^2 y^3\right)\right) \cdot \left(-x^2 \cdot 3y^2\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 2\cos\left(z - x^2 y^3\right)\left(-\sin\left(z - x^2 y^3\right)\right) = -\sin\left(2z - 2x^2 y^3\right)$$

Геометрический смысл частных производных функции двух переменных состоит в том, что они равны тангенсам углов, образованных касательными, проведенными к линиям пересечения поверхности $z = z(x, y)$ с соответствующими плоскостями ($y = y_0$, $x = x_0$, $z = z_0$).

Механический смысл частных производных функции двух переменных: они характеризуют скорость изменения функции $z = z(x, y)$ в т. $M(x_0, y_0)$ в направлении соответствующей прямой ($y = y_0$ или $x = x_0$).

1.2.2 Дифференцируемость функции двух переменных

Функция $z = z(x, y)$ является дифференцируемой в точке $M(x_0, y_0)$, если ее полное приращение в этой точке можно представить в виде: $\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$,

где α и β – бесконечно малые, т.е. $\alpha \to 0$ и $\beta \to 0$ при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$.

Теорема 1.4. *Если функция* $z = z(x, y)$ *дифференцируема в точке* $M(x_0, y_0)$*, то она и непрерывна в этой точке.*

Доказательство. По определению дифференцируемости функции имеем

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y,$$

где $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\alpha = 0$, $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\beta = 0$, A и B – некоторые коэффициенты, не зависящие от Δx и Δy. Следовательно, $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Delta z = 0$. А это значит, что функция $z = z(x, y)$ непрерывна в точке $M(x_0, y_0)$.

Теорема 1.5 (необходимое условие дифференцируемости функции). *Если функция* $z = z(x, y)$ *дифференцируема в точке* $M(x_0, y_0)$*, то она имеет в этой точке частные производные* $z'_x(x_0, y_0) = A$ *и* $z'_y(x_0, y_0) = B$.

Доказательство. Пусть $z = z(x, y)$ – дифференцируема в точке $M(x_0, y_0)$. Ее приращение

$$\Delta z = A(x_0, y_0)\Delta x + B(x_0, y_0)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y.$$

Пусть $\Delta y = 0$. Тогда $\Delta_x z = A\Delta x + \alpha\Delta x$. Разделим последнее равенство на Δx и возьмем предел при $\Delta x \to 0$: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta_x z}{\Delta x} = A = z'_x(x_0, y_0)$. То есть в точке $M(x_0, y_0)$ существует частная производная $z'_x(x_0, y_0)$. Аналогично доказывается существование частной производной $z'_y(x_0, y_0) = B$. Обратное утверждение теорем 2.1 и 2.2 – неверно.

Например, функция $z = \sqrt{2x^2 + 2y^2}$ непрерывна в точке $O(0,0)$, но не имеет в этой точке частных производных. Производная $z'_x = \dfrac{2x}{\sqrt{2x^2 + 2y^2}}$ не существует в т. $O(0,0)$. Аналогично $z'_y = \dfrac{2y}{\sqrt{2x^2 + 2y^2}}$ также не существует в т. $O(0,0)$.

Теорема 1.6 (достаточное условие дифференцируемости функции). *Если функция* $z = z(x, y)$ *имеет частные производные в некоторой окрестности точки* $M(x_0, y_0)$*, непрерывные в этой точке, то* $z(x, y)$ *дифференцируема в точке* $M(x_0, y_0)$.

Доказательство. Полное приращение функции имеет вид

$$\Delta z(x_0, y_0) = z(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - z(x_0, y_0).$$

Добавим и вычтем из правой части $z(x_0, y_0 + \Delta y)$:

$$\Delta z = z(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - z(x_0, y_0 + \Delta y) + z(x_0, y_0 + \Delta y) - z(x_0, y_0)$$

По теореме Лагранжа $z(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-z(x_0, y_0+\Delta y)=z'_x(\xi, y_0+\Delta y)\Delta x$, где $x_0<\xi<x_0+\Delta x$.

Аналогично $z(x_0, y_0+\Delta y)-z(x_0, y_0)=z'_x(x_0,\omega)\Delta y$, где $y_0<\omega<y_0+\Delta y$.

Следовательно, $\Delta z(x_0, y_0)=z'_x(\xi, y_0+\Delta y)\Delta x+z'_y(x_0,\omega)\Delta y$. По условию теоремы z'_x и z'_y непрерывны в т. $M(x_0, y_0)$. Значит,

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} z'_x(\xi, y_0+\Delta y)=z'_x(x_0, y_0) \text{ и } \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} z'_y(x_0,\omega)=z'_y(x_0, y_0).$$

А из полученных равенств, согласно определению предела, имеем

$$z'_x(\xi, y_0+\Delta y)=z'_x(x_0, y_0)+\alpha; \quad z'_y(x_0,\omega)=z'_y(x_0, y_0)+\beta$$

А это значит, что

$$\Delta z(x_0, y_0)=z'_x(x_0, y_0)\Delta x+z'_y(x_0, y_0)\Delta y+\alpha\Delta x+\beta\Delta y.$$

То есть функция $z=z(x,y)$ – дифференцируема в точке $M(x_0, y_0)$, что и требовалось доказать.

Функции с непрерывными частными производными называются *непрерывно дифференцируемыми*.

Например, функция $z=2^{xy}$ дифференцируема в любой точке $M(x,y)\in R^2$, т.к. ее частные производные $z'_x=2^{xy}\cdot\ln 2\cdot y$ и $z'_y=2^{xy}\cdot\ln 2\cdot x$ являются непрерывными при любых x и y.

1.2.3 Дифференциал функции нескольких переменных

Пусть $z=z(x,y)$ – дифференцируемая в т. $M(x_0, y_0)$ функция. Ее полное приращение $\Delta z=z'_x(x_0, y_0)\Delta x+z'_y(x_0, y_0)\Delta y+\alpha\Delta x+\beta\Delta y$.

Дифференциалом рассматриваемой функции является главная линейная часть ее полного приращения. Обозначается $dz=z'_x(x_0, y_0)\Delta x+z'_y(x_0, y_0)\Delta y$. Приращения Δx и Δy являются дифференциалами независимых переменных и поэтому равны dx и dy соответственно. Тогда полный дифференциал функции $z=z(x,y)$ будет иметь вид

$$dz=z'_x dx+z'_y dy. \tag{1.4}$$

Для функции трех переменных $u=u(x,y,z)$ дифференциал будет равен

$$du=u'_x dx+u'_y dy+u'_z dz. \tag{1.5}$$

Чтобы найти дифференциал функции, нужно найти ее частные производные и подставить их в соответствующие формулы (1.4), (1.5).

Пример 1.13. Найти дифференциал функции $z = x^2 y + x + y$.

Решение. Частные производные заданной функции равны

$z'_x = 2xy + 1,$

$z'_y = x^2 + 1.$

Тогда дифференциал заданной функции будет равен

$dz = (2xy + 1)dx + (x^2 + 1)dy$.

Пример 1.14. Найти дифференциал функции $z = \cos\dfrac{x}{y}$.

Решение. Находим частные производные $du = u'_x dx + u'_y dy + u'_z dz$:

$z'_x = -\sin\dfrac{x}{y}\cdot\dfrac{1}{y}, \quad z'_y = -\sin\dfrac{x}{y}\cdot\left(-\dfrac{x}{y^2}\right).$

Подставляем их в формулу (2.4): $dz = -\sin\dfrac{x}{y}\cdot\dfrac{1}{y}dx - \sin\dfrac{x}{y}\cdot\left(-\dfrac{x}{y^2}\right)dy$.

Пример 1.15. Найти дифференциал функции $u = x^2 yz + 2xz - 3y^2 z$.

Решение. Находим частные производные

$u'_x = 2xyz + 2z; u'_y = x^2 z - 6yz; u'_z = x^2 y + 2x - 3y^2$. Подставляем эти производные в формулу (1.5) и получаем дифференциал исходной функции

$du = (2xyz + 2z)dx + (x^2 z - 6yz)dy + (x^2 y + 2x - 3y^2)dz$.

1.2.4 Применение дифференциалов в приближенных вычислениях

Если функция $z = z(x, y)$ – дифференцируема, то ее полное приращение

$\Delta z = z(x + \Delta x, y + \Delta y) - z(x, y)$.

Откуда $z(x + \Delta x, y + \Delta y) = z(x, y) + \Delta z$. Поскольку $\Delta z \approx dz$, то

$$z(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx z(x, y) + dz \approx z(x, y) + z'_x \Delta x + z'_y \Delta y. \qquad (1.6)$$

Полученная формула является формулой применения дифференциалов в приближенных вычислениях.

Чтобы воспользоваться формулой (1.6), нужно:

1) По заданному числу записать функцию $z = z(x, y)$.

2) Выделить $x, \Delta x, y$ и Δy. В качестве x и y берутся целые значения заданного числа, при которых записанная функция легко вычисляется. Выделенные Δx и Δy должны быть достаточно малыми.

3) Вычисляем все составляющие формулы (1.6) и определяем приближенное значение заданного числа.

Пример 1.16. Вычислить приближенно $1{,}01^{2{,}03}$.

Решение. По заданному числу запишем функцию $z = x^y$.

Выделяем $x, \Delta x, y$ и Δy: $x = 1,\ \Delta x = 0{,}01,\ y = 2,\ \Delta y = 0{,}03$.

Значение функции при выделенных x и y будет равно $z(1,2) = 1^2 = 1$. Частные производные будут равны:

$$z'_x = y \cdot x^{y-1}\Big|_{\substack{x=1\\ y=2}} = 2 \cdot 1^{2-1} = 2, \quad z'_y = x^y \cdot \ln x\Big|_{\substack{x=1\\ y=2}} = 1^2 \cdot \ln 1 = 0,$$

то есть $1{,}01^{2{,}03} \approx 1 + 2 \cdot (0{,}01) + 0 \cdot 0{,}03 \approx 1 + 0{,}02 + 0 \approx 1{,}02$.

Пример 1.17. Вычислить приближенно $\sqrt{(2{,}01)^2 + (1{,}02)^2 + (1{,}99)^2}$.

Решение. По заданному числу запишем функцию $f = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Выделяем

$x = 2,\ \Delta x = 0{,}01; \quad y = 1,\ \Delta y = 0{,}02; \quad z = 2,\ \Delta z = -0{,}01$.

Значение функции при выделенных x, y и z будет равно $f = \sqrt{4+1+4} = 3$.

Частные производные:

$$f'_x = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\Bigg|_{\substack{x=2\\ y=1\\ z=2}} = \frac{2}{3}$$

$$f'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\Bigg|_{\substack{x=2\\ y=1\\ z=2}} = \frac{1}{3}$$

$$f'_z = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\Bigg|_{\substack{x=2\\ y=1\\ z=2}} = \frac{2}{3}$$

Таким образом, имеем

$$\sqrt{(2{,}01)^2 + (1{,}02)^2 + (1{,}99)^2} \approx 3 + \frac{2}{3} \cdot 0{,}01 + \frac{1}{3} \cdot 0{,}02 + \frac{2}{3}(-0{,}01) \approx 3 + \frac{1}{3}(0{,}02 + 0{,}02 - 0{,}02) \approx$$

$$\approx 3 + \frac{1}{3} \cdot 0{,}02 \approx 3\frac{1}{150}.$$

1.3 Дифференцирование неявных и сложных функций. Приложения частных производных

1.3.1 Дифференцирование неявных и сложных функций. Приложения частных производных

Пусть имеется функция $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, неявно заданная уравнением $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) = 0$. Частные производные данной функции определяются по формулам:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = -\frac{F'_{x_1}}{F'_u}, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} = -\frac{F'_{x_2}}{F'_u}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial u}{\partial x_n} = -\frac{F'_{x_n}}{F'_u}.$$

Для функции двух переменных $F(x, y) = 0$ будет $\dfrac{\partial u}{\partial x} = -\dfrac{F'_x}{F'_y}$.

Пример 1.18. Найти y'_x, если $x^2 y + y^2 - 5x + 2y = 0$.

Решение. $F'_x = 2xy - 5, \quad F'_y = x^2 + 2y + 2, \quad y'_x = -\dfrac{2xy-5}{x^2+2y+2}$.

Пример 1.19. Найти x'_y, если $\cos(xy) + e^x + e^y = 0$.

Решение. $F'_x = -\sin(xy) \cdot y + e^x, \quad F'_y = -\sin(xy) \cdot x + e^y$.

Тогда $x'_y = -\dfrac{F'_y}{F'_x} = -\dfrac{-\sin(xy)\cdot x + e^y}{-\sin(xy)\cdot y + e^x}$.

Если $u = F(v_1, v_2, \ldots, v_n)$, где $v_1 = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $v_2 = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, …, $v_n = f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, , то функция u называется *сложной функцией* независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Переменные $v_1, v_2, \ldots, v_n$ называются *промежуточными* аргументами.

Частные производные сложной функции по одной из независимых переменных определяются по формулам

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial u}{\partial v_1}\cdot\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial v_2}\cdot\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial v_n}\cdot\frac{\partial v_n}{\partial x_1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{\partial u}{\partial v_1}\cdot\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u}{\partial v_2}\cdot\frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial v_n}\cdot\frac{\partial v_n}{\partial x_2}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_n} = \frac{\partial u}{\partial v_1}\cdot\frac{\partial v_1}{\partial x_n} + \frac{\partial u}{\partial v_2}\cdot\frac{\partial v_2}{\partial x_n} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial v_n}\cdot\frac{\partial v_n}{\partial x_n}$$

Если рассматривается функция двух переменных $z = z(u, v)$, где $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, тогда

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} \tag{1.7}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} \tag{1.8}$$

Пример 1.20. Найти частные производные функции $z=\ln\left(u^2+v^2\right)$, где $u=\operatorname{tg}^2 3x,\, v=2^{yx}$.

Решение. В соответствии с записанными формулами (1.7) и (1.8) имеем:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} \text{ и } \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\text{, где}$$

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{1}{u^2+v^2}\cdot 2u=\frac{2u}{u^2+v^2},\quad \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{1}{u^2+v^2}\cdot 2v=\frac{2v}{u^2+v^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2\operatorname{tg}3x\cdot\frac{1}{\cos^2 3x}\cdot 3=\frac{6\operatorname{tg}3x}{\cos^2 3x},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=2^{yx}\cdot\ln 2\cdot y,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=2^{yx}\cdot\ln 2\cdot x.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2u}{u^2+v^2}\cdot\frac{6\operatorname{tg}3x}{\cos^2 3x}+\frac{2v}{u^2+v^2}\cdot 2^{yx}\cdot\ln 2\cdot y=$$

$$=\frac{2\operatorname{tg}^2 3x}{\operatorname{tg}^4 3x+2^{2yx}}\cdot\frac{6\operatorname{tg}3x}{\cos^2 3x}+\frac{2\cdot 2^{yx}}{\operatorname{tg}^4 3x+2^{2yx}}\cdot 2^{yx}\cdot\ln 2\cdot y=$$

$$=\frac{12\operatorname{tg}^3 3x}{\left(\operatorname{tg}^4 3x+2^{2yx}\right)\cos^2 3x}+\frac{2^{1+2yx}\cdot\ln 2\cdot y}{\operatorname{tg}^4 3x+2^{2yx}}=\frac{12\operatorname{tg}^3 3x+2^{1+2yx}\cdot\ln 2\cdot y\cdot\cos^2 3x}{\left(\operatorname{tg}^4 3x+2^{2yx}\right)\cos^2 3x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2\operatorname{tg}^2 3x}{\operatorname{tg}^4 3x+2^{2yx}}\cdot 0+\frac{2\cdot 2^{yx}}{\operatorname{tg}^4 3x+2^{2yx}}\cdot 2^{yx}\cdot\ln 2\cdot x=\frac{2^{1+2yx}\cdot\ln 2\cdot x}{\operatorname{tg}^4 3x+2^{2yx}}$$

1.3.2 Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Касательной плоскостью к поверхности G в точке M_0 называется плоскость, в которой лежат все касательные к кривым, проведенным на поверхности через эту точку. Рассечем поверхность G плоскостями $x=x_0$ и $y=y_0$. Линия пересечения L_1 поверхности G плоскостью $x=x_0$ будет задаваться системой

$$\begin{cases} z=z(x,y),\\ x=x_0. \end{cases}$$

Линия пересечения L_2 поверхности G плоскостью $y = y_0$ будет задаваться системой

$\begin{cases} z = z(x, y), \\ y = y_0. \end{cases}$ Линии L_1 и L_2 показаны на рис. 1.4.

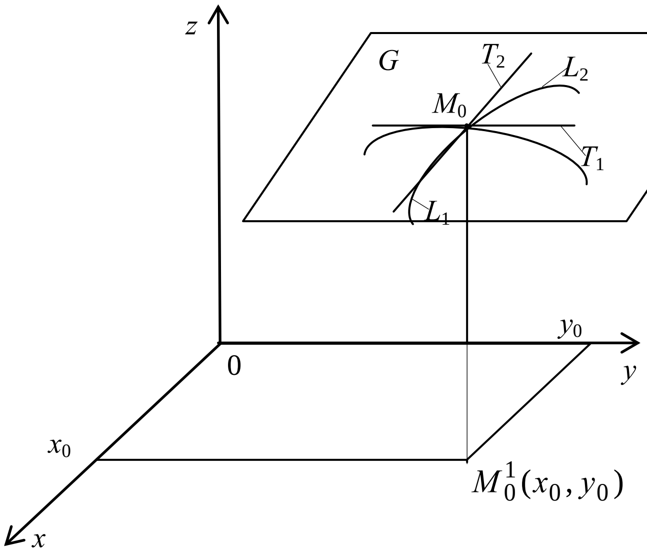


Рис. 1.4

Линии T_1 и T_2 являются касательными к линиям L_1 и L_2 в т. $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Они задаются системами

$\begin{cases} x = x_0, \\ z - z_0 = f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) \end{cases}$ – для линии L_1 и

$\begin{cases} y = y_0, \\ z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) \end{cases}$ – для линии L_2.

Уравнение плоскости, проходящей через точку с $x = x_0$, $y = y_0$, имеет вид

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \qquad (1.9)$$

Касательные T_1 и T_2 получаются сечением двумя плоскостями $x = x_0$ и $y = y_0$. Следовательно, уравнение касательной T_1 таково

$$z - z_0 = (-B / C)(y - y_0), \quad x = x_0.$$

Уравнение касательной T_2:

$$z - z_0 = (-A / C)(x - x_0), \quad y = y_0,$$

где $-A / C = f'_x(x_0, y_0), \quad -B / C = f'_y(x_0, y_0)$.

Подставляя эти выражения в (1.9), получаем уравнение плоскости β, проходящей через касательные T_1 и T_2:

$$f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0. \qquad (1.10)$$

Это уравнение (1.10) – для поверхности, заданной явно.

Для неявно заданной поверхности $F(x,y,z)=0$ уравнение касательной плоскости будет иметь вид:

$$F'_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F'_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F'_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0\,. \qquad (1.11)$$

Нормалью к поверхности G в данной точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$ является прямая, проходящая через эту точку перпендикулярно к касательной плоскости, проведенной в данной точке поверхности.

Уравнение нормали имеет вид:

$$\frac{x-x_0}{F'_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(x_0,y_0,z_0)}\,. \qquad (1.12)$$

Пример 1.21. Записать уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{8}=0$ в т. $M(2,2,4)$.

Решение. Поверхность задана неявно. Частные производные имеют вид:

$$F'_x=\frac{2x}{4}=\frac{x}{2}\bigg|_M=1,\quad F'_y=\frac{2y}{4}=\frac{y}{2}\bigg|_M=1,\quad F'_z=\frac{-2z}{8}\bigg|_M=-1\,.$$

Уравнение касательной плоскости (1.11) таково: $1(x-2)+1(y-2)-1\cdot(z-4)=0$, или после преобразований: $x+y-z=0$.

Уравнение касательной плоскости: $x+y-z=0$.

Уравнение нормали (1.12): $\frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{-1}$.

1.3.3 Вектор-градиент. Производная функции по направлению вектора

Вектор-градиент – это вектор, показывающий направление наискорейшего роста функции. Его координатами являются частные производные функции:

$$\operatorname{grad} z=\frac{\partial z}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial z}{\partial y}\vec{j}\,.$$

Для функции трех переменных $f=f(x,y,z)$: $\operatorname{grad} f=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{k}$.

Пример 1.22. Найти вектор-градиент функции $z=x^2+2y^2-4x+5y$.

Решение. Частные производные равны

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x-4,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=4y+5\,.$$

Следовательно, $\operatorname{grad} z=(2x-4)\vec{i}+(4y+5)\vec{j}$.

Пример 1.23. Найти вектор-градиент функции $f = x^2y + 3xz - z^2 + 4xyz - 2$ в точке $M(1,2,3)$.

Решение. Частные производные заданной функции в точке *M* равны

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_M = (2xy + 3z + 4yz)|_M = 2\cdot 1\cdot 2 + 3\cdot 3 + 4\cdot 2\cdot 3 = 37,$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_M = \left(x^2 + 4xz\right)\Big|_M = 1 + 12 = 13,$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_M = (3x - 2z + 4xy)|_M = 3 - 6 + 8 = 5$$

Тогда $\operatorname{grad} f(M) = 37\vec{i} + 13\vec{j} + 5\vec{k}$.

Производной функции *z* по направлению вектора $\vec{l} = \overrightarrow{MN}$ называется предел

$\dfrac{\partial z}{\partial \vec{l}} = \lim\limits_{\Delta l \to 0} \dfrac{z(N) - z(M)}{\Delta l}$, где Δl – приращение функции z в направлении $\overrightarrow{MN}$.

Для дифференцируемой функции $z = z(x, y)$ $\dfrac{\partial z}{\partial e} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \dfrac{\partial z}{\partial y}\cos\beta$,

где α – угол вектора $\vec{l} = \overrightarrow{MN}$ с осью *Ox*, β – угол с осью *OY*.

Для функции трех переменных $u = u(x, y, z)$:

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$$

γ – угол вектора $\vec{l} = \overrightarrow{MN}$ с осью *OZ*, $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ – направляющие косинусы вектора $\vec{l} = \overrightarrow{MN}$. Они удовлетворяют условию $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Наибольшее значение $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}}$ равно модулю вектора-градиента:

$$\max\left(\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}\right) = |\operatorname{grad} u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}\ .$$

Пример 1.24. Найти производную функции $u = x^2 + y^2 + z^2 + 4xyz - 2x + 6y + 5$ в точке $M(1,2,3)$ и ее наибольшее значение в направлении вектора $\overrightarrow{MN}$, где $N(3,4,6)$.

Решение. Вектор $\overrightarrow{MN} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$. Его направляющие косинусы:

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{4+4+9}} = \frac{2}{\sqrt{17}}, \quad \cos\beta = \frac{2}{\sqrt{17}}, \quad \cos\gamma = \frac{3}{\sqrt{17}}\ .$$

Частные производные в точке M

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M = \left.(2x+4yz-2)\right|_M = 2+4\cdot 2\cdot 3-2 = 24,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M = \left.(2y+4xz+6)\right|_M = 4+12+6 = 22,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M = \left.(2z+4xy)\right|_M = 6+8 = 14.$$

Следовательно,

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \bar{l}}\right|_M = 24\cdot\frac{2}{\sqrt{17}} + 22\cdot\frac{2}{\sqrt{17}} + 14\frac{3}{\sqrt{17}} = \frac{48+44+42}{\sqrt{17}} = \frac{134}{\sqrt{17}}.$$

Наибольшее значение производной функции u по направлению вектора $\overrightarrow{MN}$ в точке M будет равно

$$\max\left(\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}\right|_M\right) = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2} = \sqrt{24^2+22^2+14^2} = \sqrt{1256} = 35{,}44009.$$

1.4 Частные производные и дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора

1.4.1 Частные производные высших порядков

Рассмотрим функцию $z = f(x;y), (x;y)\in D$. Ее частные производные $\frac{\partial f(x;y)}{\partial x}$ и $\frac{\partial f(x;y)}{\partial y}$ называют *частными производными первого порядка*; они являются функциями аргументов x и y; $(x;y)\in D$. Частные производные этих функций называются *частными производными второго порядка*:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{xx} = f''_{x^2}(x;y);$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} = z''_{yx} = f''_{yx}(x;y);$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = z''_{xy} = f''_{xy}(x;y);$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z''_{yy} = f''_{y^2}(x;y).$$

Аналогично вводятся понятия частных производных 3-го, 4-го, …, n-го порядков, причем и для случая 3-х, 4-х и более переменных.

Частная производная второго и более высокого порядка, взятая по различным аргументам, называется *смешанной частной производной*. Так, смешанными производными для $f(x;y)$ являются, например, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}, \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}$.

Пример 1.25. Найти частные производные $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}$ для функции $z = f(x;y) = x^3 \sin y$.

Решение. $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 \sin y;$ $\frac{\partial f}{\partial y} = x^3 \cos y;$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2 \sin y\right) = 3x^2 \cos y;$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^3 \cos y\right) = 3x^2 \cos y;$ $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2 \cos y\right) = -3x^2 \sin y.$

Заметим, что в этом примере получено: $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

Оказывается, что это равенство не является случайным. Имеет место следующая теорема:

Теорема 1.7 (Шварц). *Если частные производные высшего порядка непрерывны, то смешанные производные одного порядка, отличающиеся лишь порядком дифференцирования, равны между собой.*

В частности, для $z = f(x;y)$ *справедливо равенство*:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}. \tag{1.13}$$

Доказательство равенства (1.13).

Рассмотрим выражение $A = \left(f(x+\Delta x; y+\Delta y) - f(x+\Delta x; y) - f(x; y+\Delta y) - f(x;y)\right)$. Если ввести вспомогательную функцию $\varphi(x) = f(x; y+\Delta y) - f(x;y) = \Delta f_y(x;y)$, то $A = \varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)$.

Так как (по условию) f'_x определена, то $\varphi(x)$ дифференцируема на отрезке $[x; x+\Delta x]$. Тогда по теореме Лагранжа:

$$A = \Delta x \cdot \varphi'(\bar{x}), \tag{1.14}$$

где $\bar{x} \in (x; x+\Delta x)$. Но

$$\varphi'(\bar{x}) = f'_x(\bar{x}; y+\Delta y) - f'_x(\bar{x}; y). \tag{1.15}$$

Так как f''_{xy} определена и непрерывна, то f'_x дифференцируема на отрезке $[y; y+\Delta y]$.

Тогда применим к разности (1.15) еще раз теорему Лагранжа (по переменной y):

$$f'_x(\bar{x}; y+\Delta y) - f'_x(\bar{x}; y) = \Delta y \cdot f''_{xy}(\bar{x}; \bar{y}), \tag{1.16}$$

где $\bar{y} \in (y; y+\Delta y)$. В итоге из (1.14)–(1.16):

$$A = \Delta x \cdot \Delta y \cdot f''_{xy}(\bar{x}, \bar{y}). \tag{1.17}$$

Запишем теперь выражение A по другому. Переставим слагаемые в A:

$$A = \left(f(x+\Delta x; y+\Delta y) - f(x; y+\Delta y)\right) - \left(f(x+\Delta x; y) - f(x; y)\right).$$

Введем вспомогательную функцию

$\psi(\bar{x}) = f'(x+\Delta x; y) - f'(x; y)$; тогда

$$A = \psi(y+\Delta y) - \psi(y). \tag{1.18}$$

Снова применяя 2 раза теорему Лагранжа к функции (1.18), получим тем же путем, что и ранее:

$$A = \Delta y \cdot \Delta x \cdot f''_{yx}(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}}), \tag{1.19}$$

где $\bar{\bar{x}} \in (x; x+\Delta x)$; $\quad \bar{\bar{y}} \in (y; y+\Delta y)$.

Из сравнения формул (1.17) и (1.19) следует: $f''_{xy}(\bar{x}; \bar{y}) = f''_{yx}(\bar{\bar{x}}; \bar{\bar{y}})$.

Перейдем к пределу в последнем равенстве при $\Delta x \to 0;\ \Delta y \to 0$:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f''_{xy}(\bar{x}; \bar{y}) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f''_{yx}(\bar{\bar{x}}; \bar{\bar{y}}). \tag{1.20}$$

Ясно, что $\bar{x} \to x;\ \bar{\bar{x}} \to x;\ \bar{y} \to y;\ \bar{\bar{y}} \to y$ при $\Delta x \to 0;\ \Delta y \to 0$. А так как (по условию) f''_{xy}, f''_{yx} – непрерывные функции, то равенство (1.20) становится таким:

$$f''_{xy}(x; y) = f''_{yx}(x; y),$$

что означает справедливость равенства (1.13).

1.4.2 Дифференциалы высших порядков функции нескольких переменных

Полный дифференциал du функции от нескольких переменных есть в свою очередь функция тех же переменных. Следовательно, можно найти полный дифференциал этой новой функции. Таким образом получается так называемый *дифференциал второго порядка* d^2u исходной функции u, который будет также функцией тех же переменных. Его полный дифференциал называется *дифференциалом третьего порядка* d^3u первоначальной функции и т.д.

Пусть функция $u = f(x; y)$ – функция двух переменных x и y.

Рассмотрим случай, когда x и y *являются независимыми переменными.* Тогда $dx = \Delta x;\ dy = \Delta y$ – величины постоянные. Следовательно,

$$d^2u = d\left(\frac{\partial f(x;y)}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial f(x;y)}{\partial y}\cdot dy\right) = \text{/используем линейность полного дифференциала/}=$$

$$= dx\cdot d\left(\frac{df(x;y)}{\partial x}\right) + dy\cdot d\left(\frac{df(x;y)}{\partial y}\right) = dx\left(\frac{d^2f(x;y)}{\partial x^2}dx + \frac{d^2f(x;y)}{\partial x\partial y}dy\right) +$$
$$+ dy\left(\frac{d^2f(x;y)}{\partial y\partial x}dx + \frac{d^2f(x;y)}{\partial y^2}dy\right) = \frac{d^2f(x;y)}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{d^2f(x;y)}{\partial x\partial y}dxdy + \frac{d^2f(x;y)}{\partial y^2}dy^2. \quad (1.21)$$

Получили формулу дифференциала второго порядка для функции двух переменных. Для дифференциала третьего порядка будем иметь:

$$d^3u = \frac{\partial^3 f(x;y)}{\partial x^3}\cdot dx^3 + 3\frac{\partial^3 f(x;y)}{\partial x^2\partial y}dx^2dy + 3\frac{\partial^3 f(x;y)}{\partial x\partial y^2}dxdy^2 + \frac{\partial^3 f(x;y)}{\partial y^3}\cdot dy^3. \quad (1.22)$$

Пример 1.26. Найти дифференциал второго порядка для функции $u = x^2y^5$.

Решение. Найдем частные производные рассматриваемой функции:

$$u'_x = 2xy^5,\quad u'_y = 5x^2y^4,\quad u''_{x^2} = 2y^5,\quad u''_{xy} = 10xy^4,\quad u''_{y^2} = 20x^2y^3.$$

Подставляем найденные частные производные второго порядка в формулу (1.21): $d^2u = 2y^5dx^2 + 20xy^4dxdy + 20x^2y^3dy^2$.

Пример 1.27. Найти дифференциал третьего порядка для функции $u = x^5 + y^4 - 3x^3y^2 + 2x - 5y + 6$.

Решение. Найдем частные производные третьего порядка, входящие в формулу (1.22):

$$u'_x = 5x^4 - 9x^2y^2 + 2,\quad u''_{x^2} = 20x^3 - 18xy^2,\quad u'''_{x^3} = 60x^2 - 18y^2,$$
$$u'_y = 4y^3 - 6x^3y - 5,\quad u''_{y^2} = 12y^2 - 6x^3,\quad u'''_{y^3} = 24y,$$
$$u'''_{x^2y} = -36xy,\quad u''_{xy} = -18x^2y,\quad u'''_{xy^2} = -18x^2.$$

В соответствии с формулой (1.22) имеем:

$$d^3u = \left(60x^2 - 18y^2\right)dx^3 - 108xydx^2dy - 54x^2dxdy^2 + 24ydy^3.$$

Рассматривая выражения для d^2u, d^3u, …, приходим к следующей *символической формуле для дифференциала произвольного порядка* $n \in N$:

$$d^nu = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n f. \quad (1.23)$$

Важно, *что если dx и dy нельзя считать постоянными*, то последняя *формула уже не будет верна*. Например, при $n = 2$ имеем:

$$d^2u = d(du) = d\left(\frac{\partial f(x;y)}{\partial x}\right)dx + \frac{\partial f(x;y)}{\partial x}\cdot d^2x + d\left(\frac{\partial f(x;y)}{\partial y}\right)dy + \frac{\partial f(x;y)}{\partial y}\cdot d^2y .$$

Сумма первого и третьего слагаемых даст нам выражение, ранее полученное для d^2u. Поэтому в итоге

$$d^2u = \frac{\partial^2 f(x;y)}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f(x;y)}{\partial x\partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f(x;y)}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial f(x;y)}{\partial x}d^2x + \frac{\partial f(x;y)}{\partial y}d^2y ,$$

т.е. в данном общем случае выражение для d^2u содержит слагаемые, зависящие от d^2x и d^2y, чего не было ранее в формуле (1.21) при $n = 2$.

1.4.3 Формула Тейлора для функции нескольких переменных

Для функции нескольких переменных формула Тейлора имеет вид:

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{df(x_0,y_0)}{1!} + \frac{d^2f(x_0,y_0)}{2!} + \ldots + \frac{d^nf(x_0,y_0)}{n!} + \frac{d^{n+1}f(x_0Qx, y_0+Qy)}{(n+1)!}, \quad (1.24)$$

Видим, что формула содержит в правой части функцию и ее дифференциалы различного порядка в заданной точке.

Пример 1.28. Разложить по формуле Тейлора функцию $f = x^5 + y^4$ в т. $M(1;2)$ до второго порядка включительно.

Решение. Формула Тейлора в этом случае будет иметь вид:

$$f(x,y) = f(M) + df(M) + \frac{d^2f(M)}{2!}$$

$$f(M) = 1 + 16 = 17$$

$$df(M) = f'_x(M)(x - x_0) + f'_y(M)(y - y_0)$$

$$f'_x = 5x^4,\ f'_y = 4y^3$$

Следовательно,

$$df(M) = 5\cdot 1^4(x-1) + 4\cdot 2^3(y-2) = 5(x-1) + 32(y-2),$$

$$d^2f(M) = f''_{x^2}(M)(x-1)^2 + 2f''_{xy}(M)(x-1)(y-2) + f''_{y^2}(M)(y-2)^2,$$

где $f''_{x^2} = 20x^3$, $f''_{xy} = 0$, $f''_{y^2} = 12y^2$, $d^2f(M) = 20(x-1)^2 + 48(y-2)^2$.

Тогда разложение (1.24) будет иметь вид:

$$f(x,y) = 17 + 5(x-1) + 32(y-2) + 10(x-1)^2 + 24(y-2)^2 .$$

1.5 Исследование функции на экстремум. Условный экстремум. Наибольшее и наименьшее значение функции в замкнутой области

1.5.1 Локальные экстремумы функций нескольких переменных

Пусть функция $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ определена в области *D* переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а точка $M_0(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n})$ является внутренней точкой этой области *D*.

Точка M_0 называется *точкой (локального) максимума (минимума) функции f*, если существует такая δ-окрестность точки M_0, что для любой точки $M(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$ выполняется неравенство

$f(M) \le f(M_0)$ (соотв.≥).

Если же для некоторой указанной δ-окрестности знак равенства может быть только в точке $M = M_0$, то соответствующий максимум (минимум) называется *собственным* или *строгим* (в противном случае – нестрогим, несобственным).

Для обозначения максимумов и минимумов применяется и общий термин – *экстремум, локальный экстремум*.

Теорема 1.8 (необходимое условие локального экстремума). *Пусть функция $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в некоторой точке $M_0(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n})$ имеет экстремум. Тогда, если в этой т. M_0 существуют конечные частные производные первого порядка, то* ***все эти частные производные равны нулю****:*

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{M_0} = 0; \\ \left.\dfrac{\partial f}{\partial x_2}\right|_{M_0} = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \left.\dfrac{\partial f}{\partial x_n}\right|_{M_0} = 0. \end{cases} \qquad (1.25)$$

Точки M_0 с таким свойством называются ***стационарными критическими точками функции*** *f.*

Доказательство. Зафиксируем $x_2 = x_{02}; x_3 = x_{03}; \ldots; x_n = x_{0n}$, сохраняя x_1 переменной величиной. Получаем тогда *функцию от одной переменной* x_1: $u = f(x_1, x_{02}, x_{03}, \ldots, x_{0n})$. Так как по предположению в точке $M_0(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n})$ достигается экстремум (пусть это будет максимум для определенности), то отсюда следует, что в некоторой δ-окрестности точки $x_1 = x_{01}$ должно выполняться неравенство

$$f(x_1, x_{02}, x_{03}, \ldots, x_{0n}) \le f(x_{01}, x_{02}, x_{03}, \ldots, x_{0n}),$$

и поэтому указанная функция одной переменной в точке $x_1 = x_{01}$ достигает максимума. Откуда по необходимому условию экстремума функции одной переменной получаем:

$$f'_{x_1}(x_{01}, x_{02}, x_{03}, \ldots, x_{0n}) = 0\,.$$

Т.е. доказано первое из равенств (1.25). Аналогично доказываются и все остальные равенства (1.25). Теорема доказана.

Достаточные условия существования экстремума функции двух переменных. Рассмотрим функцию двух переменных $u = f(x, y)$. Для нее справедлива

Теорема 1.9 (достаточное условие экстремума). *Пусть точка $M_0(x_0, y_0)$ является стационарной критической для функции $u = f(x, y)$. Пусть в точке M_0 и некоторой ее δ-окрестности $f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Обозначим*

$$f''_{xx}(x_0, y_0) = A;\ f''_{xy}(x_0, y_0) = B\,;\ f''_{yy}(x_0, y_0) = C\,.\ \textit{Тогда}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2. \tag{1.26}$$

Возможны следующие случаи:

1) если $\Delta(M_0) > 0$, то $f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет экстремум, причем максимум, если $A < 0$ и минимум, если $A > 0$;

2) если $\Delta(M_0) < 0$, то $f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ экстремума не имеет.

3) если $\Delta(M_0) = 0$, то экстремум в точке $M_0(x_0, y_0)$ может быть, а может и не быть (т.е. требуется дополнительное исследование).

Доказательство этого утверждения получается путем анализа формулы Тейлора для функции $f(x, y)$ при $n = 1$.

Пример 1.28. Исследовать на экстремум функцию $z = x^2 - 4xy + 8y^2 + x - 5y + 2$.

Решение. Определяем стационарные точки исходной функции из условия $\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0. \end{cases}$

В нашем случае

$$\begin{cases} z'_x = 2x-4y+1=0 \\ z'_y = -4x+16y-5=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-4y=-1 \\ -4x+16y=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x-8y=-2 \\ -4x+16y=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8y=3 \\ x=\dfrac{16y-5}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\dfrac{3}{8} \\ x=\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Получили одну стационарную точку $M\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{8}\right)$. Достаточное условие будем проверять с помощью определителя (1.26) $\Delta = AC - B^2$, где $A = z''_{x^2} = 2, C = z''_{y^2} = 16$, $B = z''_{xy} = -4$. Определитель $A(M) = \left(A\cdot C - B^2\right)\Big|_M = 2\cdot 16 - (-4)^2 = 16 > 0$.

Следовательно, экстремум существует. Так как $A = z''_{x^2} = 2 > 0$, то в т. M будет минимум: $z_{\min} = \dfrac{1}{16} - \dfrac{3}{8} + \dfrac{9}{8} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{15}{8} + 2 = \dfrac{19}{16}$.

Пример 1.29. Найти экстремум функции $z = 3x^2y + y^3 - 18x - 30y + 4$.

Решение. По необходимому условию существования экстремума имеем:

$$\begin{cases} z'_x = 6xy - 18 = 0 \\ z'_y = 3x^2 + 3y^2 - 30 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = 3 \\ x^2 + y^2 - 10 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{y} \\ \dfrac{9}{y^2} + y^2 - 10 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{y} \\ y^2 = 1;9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{y} \\ y_{1,2} = \pm 3 \\ y_{3,4} = \pm 1 \end{cases}$$

Получили четыре точки, подозреваемые на экстремум:

$M_1(1{,}3),\ M_2(-1{,}-3),\ M_3(3{,}1),\ M_4(-3{,}-1)$.

Достаточное условие проверяем с помощью определителя $\Delta = AC - B^2$, где $A = z''_{x^2} = 6y,\ C = z''_{y^2} = 6y$, $B = z''_{xy} = 6x$. Определитель будет равен

$\Delta = 6y\cdot 6y - (6x)^2 = 36y^2 - 36x^2$.

В точке $M_1(1{,}3)$ $\Delta(M_1) = 36\cdot 9 - 36\cdot 1 > 0$. Следовательно, в этой точке существует экстремум. Так как $A(M_1) = 18 > 0$, в точке M_1 будет минимум:

$z_{\min} = z(M_1) = 3\cdot 1^2\cdot 3 + 3^3 - 18\cdot 1 - 30\cdot 3 + 4 = -68$.

В точке $M_2(-1{,}-3)$ $\Delta(M_2) = 36\cdot 9 - 36\cdot 1 > 0$ тоже существует экстремум. $A(M_2) = -18 < 0$. Следовательно, в точке M_2 будет максимум:

$z_{\min} = 3\cdot(-1)^2\cdot(-3) + (-3)^3 - 18\cdot(-1) - 30\cdot(-3) + 4 = 76$.

Для точки $M_3(3{,}1)$ имеем $\Delta(M_3) = 36\cdot 1 - 36\cdot 9 < 0 \Rightarrow$ в точке M_3 экстремум не существует.

Для точки $M_4(3{,}1)$ будет $\Delta(M_4) = 36 \cdot 1 - 36 \cdot 9 < 0 \Rightarrow$ в точке M_4 тоже не существует экстремум.

1.5.2 Условный экстремум

Условным экстремумом функции $z = f(x, y)$ называется экстремум, который достигается при условии, что переменные x и y связаны дополнительным условием (ограничением) $\varphi(x, y) = b$.

Удобно исследования на условный экстремум проводить с помощью *функции Лагранжа*

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda(\varphi(x, y) - b), \tag{1.27}$$

где λ – множитель Лагранжа. Он неизвестен и подлежит определению.

Если задано n ограничений, то функция Лагранжа имеет вид

$$F(x, y, \lambda_1, \ldots \lambda_n) = f(x, y) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (\varphi_i(x, y) - b_i), \tag{1.28}$$

т.е. функция Лагранжа содержит столько λ_i, сколько задано дополнительных условий.

Необходимым условием существования условного экстремума является равенство нулю частных производных первого порядка:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0; \\ &\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0; \\ &\frac{\partial F}{\partial \lambda} = \varphi(x, y) = 0 \end{aligned}$$

– для функции (1.27) и

$$\begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0; \\ &\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0; \\ &\frac{\partial F}{\partial \lambda_1} = \varphi_1(x, y) = 0) \\ &\frac{\partial F}{\partial \lambda_2} = \varphi_2(x, y) = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\frac{\partial F}{\partial \lambda_m} = \varphi_m(x, y) = 0 \end{aligned}$$

– для функции (1.28).

Решая полученные системы, определяем точки условного экстремума.

Достаточное условие проверяется с помощью дифференциала второго порядка от функции Лагранжа в точке экстремума:

$$d^2F(M) = F''_{x^2}(M)dx^2 + 2F''_{xy}(M)dxdy + F''_{y^2}(M)dy^2.$$

Если в рассматриваемой точке M $d^2F(M) > 0$, то в этой точке минимум, если $d^2F(M) < 0$, то – максимум.

Пример 1.30. Найти экстремум функции $z = x^2 + y^2 - 4$ при условии, что $2x + y = 4$.

Решение. Геометрически задача сводится к нахождению экстремальных значений аппликаты z к поверхности $z = x^2 + y^2 - 4$ для точек ее пересечения с плоскостью $2x + y = 4$. Составляем функцию Лагранжа, определяемую формулой (1.27):

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 4 + \lambda(2x + y - 4).$$

Ее частные производные:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + 2\lambda, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y + \lambda, \quad \frac{\partial F}{\partial \lambda} = 2x + y - 4.$$

Система уравнений необходимого условия примет вид:

$$\begin{cases} 2x + 2\lambda = 0 \\ 2y + \lambda = 0 \\ 2x + y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\lambda \\ y = -\dfrac{\lambda}{2} \\ -2\lambda - \dfrac{\lambda}{2} - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{8}{5} \\ y = \dfrac{4}{5} \\ \lambda = -\dfrac{8}{5} \end{cases}$$

Мы получили точку $M\left(\frac{8}{5}; \frac{4}{5}\right)$. Находим частные производные второго порядка

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = F''_{x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = F''_{y^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = F''_{xy} = 0.$$

Дифференциал второго порядка $d^2F(M) = 2dx^2 + 2dy^2 > 0$. Следовательно, в т. $M\left(\frac{8}{5}; \frac{4}{5}\right)$ будет минимум. Минимальное значение функции $z_{\min} = \frac{64}{25} + \frac{16}{25} - 4 = -\frac{20}{25} = -\frac{4}{5}$.

Пример 1.31. Найти экстремум функции $z = x^2 + 10xy + y^2 - 2x + 3y$ при условии, что $x + y = 4$.

Решение. В соответствии с формулой (1.27) функция Лагранжа будет иметь вид $F(x, y, \lambda) = x^2 + 10xy + y^2 - 2x + 3y + \lambda(x + y - 4)$. Ее частные производные:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + 10y - 2 + \lambda, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 10x + 2y + 3 + \lambda, \quad \frac{\partial F}{\partial \lambda} = x + y - 4.$$

Система уравнений необходимого условия существования условного экстремума будет равна

$$\begin{cases} 2x + 10y + \lambda - 2 = 0 \\ 10x + 2y + \lambda + 3 = 0 \\ x + y - 4 = 0 \end{cases}$$

Вычтем из первого уравнения второе: $\begin{cases} -8x+8y-5=0 \\ x+y-4=0 \end{cases}$

Умножим второе уравнение на 8:

$\begin{cases} -8x+8y=5 \\ 8x+8y=32 \end{cases}$, $\quad 16y=37 \Rightarrow y=\dfrac{37}{16}, \quad x=4-y=4-\dfrac{37}{16}=\dfrac{27}{16}$.

Получили точку $M\left(\dfrac{27}{16},\dfrac{37}{16}\right)$. Частные производные второго порядка:

$F''_{x^2}=2, \quad F''_{y^2}=2, \quad F''_{xy}=10$.

Дифференциал второго порядка исходной функции z в точке M будет равен

$d^2F(M)=2dx^2+20dxdy+2dy^2$.

По выражению полученного дифференциала нельзя сделать заключение о его знаке. Поэтому обращаемся к ограничению и выражаем, например, x:

$x=4-y \Rightarrow dx=-dy$.

Подставляем вместо dx его выражение в дифференциал второго порядка:

$d^2F(M)=2(-dy)^2+20(-dy)dy+2dy^2=-16dy^2<0$.

Следовательно, в т. $M\left(\dfrac{27}{16},\dfrac{37}{16}\right)$ будет максимум.

$$z_{\max}=\frac{27^2}{16^2}+10\cdot\frac{27}{16}\cdot\frac{37}{16}+\frac{37^2}{16^2}-2\cdot\frac{27}{16}+3\cdot\frac{37}{16}=\frac{1625}{32}=50{,}78125$$

1.5.3 Наибольшее и наименьшее значение функции в замкнутой области

Пусть функция $z=f(x,y)$ определена и непрерывна в ограниченной замкнутой области $\overline{D}\subset OXY$ и имеет в этой области конечные частные производные. Тогда в этой области найдется точка $M_0(x_0,y_0)$, в которой функция достигает самое большое (самое малое) из всех значений (теорема Вейерштрасса). Такие значения называются *глобальными экстремумами функции* $f(x,y)$ *в области* $\overline{D}$. Если указанная точка M_0 лежит *внутри* области $\overline{D}$, то в ней функция, очевидно, достигает и локального максимума (минимума), поэтому такая точка должна быть стационарной критической для $f(x,y)$. Однако своего наибольшего (наименьшего) значения функция $f(x,y)$ может достигать и на границе области (линия *Г*). Кривая *Г* может состоять из одного или нескольких участков, описываемых уравнениями, например, $y=\varphi(x)$ (или $x=\psi(y)$), устанавливающими связь между переменными x и y; при этом $z=f(x,y)$ обращается в функцию *от одной переменной* (x или y). Экстремум этой функции может достигаться только в ее критических точках внутри соответствующего участка линии границы – либо в «точках стыковки» участков линий границы.

В итоге *правило нахождения наибольшего и наименьшего значений* указанной функции $z = f(x, y)$ в области $\overline{D}$ будет заключаться в следующем:

I. Находятся критические точки $M_1, M_2, \ldots, M_k$ функции $f(x, y)$ во внутренней части $\overline{D}$.

II. Определяются критические точки $N_1, N_2, \ldots, N_l$ функции *одной переменной*, получаемые внутри участков линии границы области $\overline{D}$.

III. Находятся и сравниваются по величине значения $f(x, y)$ во всех точках $M_1, M_2, \ldots, M_k$, $N_1, N_2, \ldots, N_l$, а также в точках *A, B*, …, *C* «стыковки» участков линии границы области $\overline{D}$.

IV. Из всех полученных значений функции выбираются наибольшее и наименьшее значения.

Пример 1.32. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = x^2 + y^2 + 10xy - 4x - 8y + 3$ в области *D*, ограниченной линиями: $x = 0,\ y = 0,\ x + y = 10$.

Решение. Исходная область имеет вид, показанный на рис. 1.5.

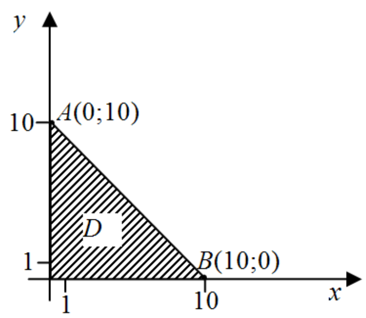


Рис. 1.5

Найдем стационарные точки рассматриваемой функции, принадлежащие области *D*. Имеем

$$\begin{cases} z'_x = 2x + 10y - 4 = 0 \\ z'_y = 2y + 10x - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 5y = 2 \\ 5x + y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x + 25y = 10 \\ 5x + y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 24y = 6 \\ x = \dfrac{8 - y}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1}{4} \\ x = \dfrac{3}{4} \end{cases}$$

Полученная точка $M\left(\dfrac{3}{4}, \dfrac{1}{4}\right)$ принадлежит области *D*. Значение функции в этой точке будет равно

$$z(M) = \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + 10 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} - 4 \cdot \frac{3}{4} - 8 \cdot \frac{1}{4} + 3 = \frac{1}{2}.$$

Далее исследуем границу области *D*. Исследование проводим по всем участкам области.

1. Участок OA. Уравнение этой стороны $x=0$. Подставляем это значение *x* в исходную функцию: $z_1 = y^2 - 8y + 3$.

Получили функцию одной переменной. Найдем ее стационарные точки

$z_1' = 2y - 4 = 0$. Откуда $y = 2$. Найденная точка $M_1(0,2)$ принадлежит стороне *AB*. Значение функции в этой точке $z(M_1) = z_1(M_1) = 2^2 - 8 \cdot 2 + 3 = -9$.

Значение функции в граничных точках *O* и *A*: $z(O) = 3, \quad z(A) = 100 - 80 + 3 = 23$.

2. Участок OB. Уравнение стороны *OB*: $y = 0$. Подставив вместо *y* его значение в исходную функцию, получим $z_2 = x^2 - 4x + 3$.

Стационарная точка этой функции определяется из условия $z_2' = 0$, т.е. $z_2' = 2x - 4 = 0, x = 2$. Полученная точка $M_2(2,0)$ принадлежит линии *OB*. Значение функции в этой точке $z(M_2) = z_2(M_2) = 4 - 8 + 3 = -1$.

Значение функции в точке границы $z(B) = z_2(B) = 100 - 40 + 3 = 63$.

3. Участок AB. Уравнение этой стороны: $y = 10 - x$. Подставив в исходную функцию это выражение для *y*, получим

$$z_3 = x^2 + (10-x)^2 + 10x(10-x) - 4x - 8(10-x) + 3 =$$
$$= x^2 + 100 - 20x + x^2 + 100x - 10x^2 - 4x - 80 + 8x + 3 = -8x^2 + 84x + 23.$$

Критические точки полученной функции z_3 определяем из условия $z_3' = 0$:

$z_3' = -16x + 84 = 0$. Откуда $x = \dfrac{844}{16} = \dfrac{21}{4}, \ y = 10 - x = 10 - \dfrac{21}{4} = \dfrac{19}{4}$.

Полученная точка $M_3\left(\dfrac{21}{4}, \dfrac{19}{4}\right)$ принадлежит области *D*. Значение функции в этой точке $z(M_3) = z_3(M_3) = -8\left(\dfrac{21}{4}\right)^2 + 84 \cdot \dfrac{21}{4} + 23 = 243{,}5$. Из всех найденных значений функции выбираем наибольшее и наименьшее:

$z_{наиб.} = z(M_3) = 243{,}5; \quad z_{наим.} = z(M_1) = -9$.

1.6 Метод наименьших квадратов

Пусть в процессе эксперимента получены пары значений

x_i	x_1	x_2	…	x_n
y_i	y_1	y_2	…	y_n

Требуется установить зависимость вида $y = f(x)$. Если зависимость не задана, то мы на плоскости *XOY* строим исходные точки и соединяем их отрезками прямых. По форме полученной ломаной линии устанавливаем (вообще говоря, приближенно) формулу связи между *x* и *y* (линейная, нелинейная).

1. Пусть рассматривается *линейная* зависимость

$y = a_0 + a_1 x$,

где a_0 и a_1 – неизвестные параметры, подлежащие определению. Значения этих параметров (a_0, a_1) определяем по методу наименьших квадратов. Суть метода состоит в том, что сумма квадратов отклонений расчетных значений от фактических должна быть величиной минимальной:

$$l = \sum_{i=1}^{n} (y_i - y)^2 \to \min . \tag{1.29}$$

Подставляем в (1.29) исследуемую линейную зависимость:

$$l = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a_0 - a_1 x_i)^2 \to \min .$$

Функция *l* является функцией двух переменных (a_0 и a_1). Необходимое условие существования экстремума будет иметь вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial l}{\partial a_0} = 2\sum_{i=1}^{n} (y_i - a_0 - a_1 x_i)(-1) = 0 \\ \dfrac{\partial l}{\partial a_1} = 2\sum_{i=1}^{n} (y_i - a_0 - a_1 x_i)(-x_i) = 0 \end{cases}$$

Сократим уравнения системы на (–2):

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} (y_i - a_0 - a_1 x_i) = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} \left(y_i x_i - a_0 x_i - a_1 x_i^2\right) = 0 \end{cases}$$

Известно, что сумма разности равна разности сумм:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} a_0 - \sum_{i=1}^{n} a_1 x_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} y_i x_i - \sum_{i=1}^{n} a_0 x_i - \sum_{i=1}^{n} a_1 x_i^2 = 0 \end{cases}$$

Коэффициенты a_0 и a_1 являются постоянными по отношению к суммам. Следовательно, их можно вынести за знак суммы:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} y_i - na_0 - a_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} y_i x_i - a_0 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i - a_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} na_0 + a_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \\ a_0 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i + a_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i x_i \end{cases} \tag{1.30}$$

Полученная система является системой для определения неизвестных параметров a_0 и a_1. Решая эту систему, определяем числовые значения a_0 и a_1. Подставив найденные числовые значения a_0 и a_1 в рассматриваемую зависимость, получаем конечный результат.

Пример 1.33. По данным эксперимента построить линейную зависимость $y = a_0 + a_1 x$.

x	1	2	3	4	5
y	0	1	2	3	5

Решение. Построим исходные точки на плоскости (рис. 6.1). Соответствующая ломаная линия близка к отрезку прямой.

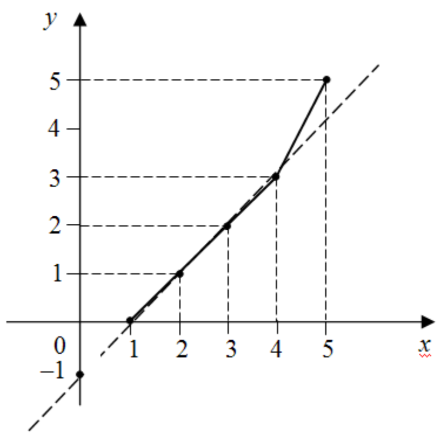


Рис. 1.6

По исходным данным имеем:

$n = 5; \quad \sum x_i = 15; \quad \sum x_i^2 = 55; \quad \sum y_i = 11; \quad \sum y_i x_i = 45$.

Подставляем эти данные в систему (6.2)

$$\begin{cases} 5a_0 + 15a_1 = 11 \\ 15a_0 + 55a_1 = 45 \end{cases}$$

Умножим первое уравнение на (–3):

$$\begin{cases} -15a_0 - 45a_1 = -33 \\ 15a_0 + 55a_1 = 45 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10a_1 = 12 \\ a_1 = 1{,}2 \end{cases} \quad a_0 = \frac{11 - 15a_1}{5} = \frac{11 - 15 \cdot 1{,}2}{5} = -1{,}4.$$

Подставляем найденные числовые значения a_0 и a_1 в функцию y:

$y = -1{,}4 + 1{,}2x$.

Расчетная линия показана на рисунке 6.1 пунктиром. Она близко подходит к средней линии.

2. Рассмотрим параболическую зависимость (*нелинейную*)

$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$.

Функция $l = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - a_0 - a_1 x_i^2\right)^2 \to \min$.

Это функция трех переменных (a_0, a_1, a_2). Необходимое условие существования экстремума будет иметь вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial l}{\partial a_0} = 2\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2\right)(-1) = 0 \\ \dfrac{\partial l}{\partial a_1} = 2\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2\right)(-x_i) = 0 \\ \dfrac{\partial l}{\partial a_2} = 2\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2\right)\left(-x_i^2\right) = 0. \end{cases}$$

Откуда

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - a_0 - a_1 x_i - a_1 x_i^2\right) = 0 \\ \sum_{i=1}^{n}\left(y_i x_i - a_0 x_i - a_1 x_i^2 - a_2 x_i^3\right) = 0 \\ \sum_{i=1}^{n}\left(y_i x_i^2 - a_0 x_i^2 - a_1 x_i^3 - a_2 x_i^4\right) = 0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} y_i - a_0 - a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i - a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i - a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^3 = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} y_i x_i^2 - a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^3 - a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^4 = 0. \end{cases}$$

Окончательно имеем

$$\begin{cases} n a_0 + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^3 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^3 + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^4 = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i^2. \end{cases}$$

Полученная система является системой для определения коэффициентов a_i.

Пример 1.34. Построить зависимость $y = y(x)$ по данным

x_i	0	1	2	3	4
y_i	0	2	4	1	– 1

Решение. На плоскости *XOY* строим данные точки и соответствующую ломаную линию (рис. 1.7).

Видно, что зависимость между *x* и *y* близка к параболической. По исходным данным имеем:

$n = 5;\quad \sum x_i = 10;\quad \sum x_i^2 = 30;\quad \sum x_i^3 = 100;\quad \sum x_i^4 = 354;\quad \sum y_i = 6;\quad \sum y_i x_i = 10;\quad \sum y_i x_i^2 = 11.$

Подставляем в расчетную систему:

$$\begin{cases} 5a_0 + 10a_1 + 30a_2 = 6 \\ 10a_0 + 30a_1 + 100a_2 = 10 \\ 30a_0 + 100a_1 + 354a_2 = 11 \end{cases}$$

Решая систему, находим: $a_0 = -\dfrac{41}{35}$, $a_1 = \dfrac{169}{35}$, $a_2 = \dfrac{17}{14}$.

Исходная зависимость $y = -\dfrac{41}{35} + \dfrac{169}{35}x - \dfrac{17}{14}x^2$.

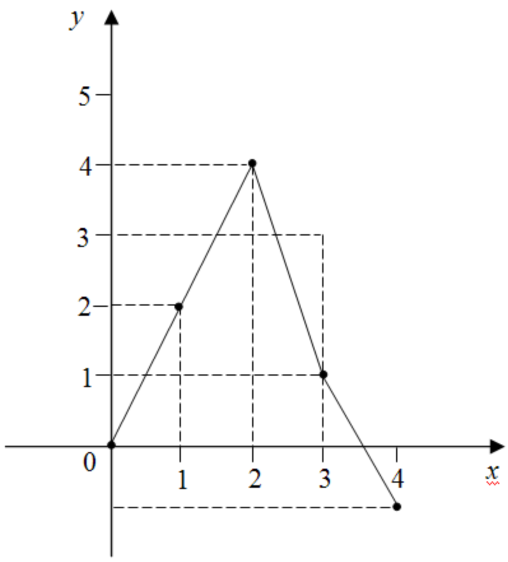


Рис. 1.7

Замечание. Для каждой зависимости получается своя расчетная система или уравнение, т.е. каждый раз в функцию *l* (1.29) подставляем свою рассматриваемую зависимость.

2 НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

2.1 Основные понятия

Определение. Функция $F(x)$ называется ***первообразной функцией*** для функции $f(x)$, если $F'(x)=f(x)$.

Теорема 2.1. *Если* $F_1(x)$ *и* $F_2(x)$ *– две* ***первообразные*** *для* $f(x)$, *то они* ***могут отличаться лишь на*** $\mathrm{const}\, C$:

$F_1(x)-F_2(x)=C$.

Доказательство.

$(F_1(x)-F_2(x))'=F_1'(x)-F_2'(x)=f(x)-f(x)=0$; но $C'=0$ (только!) $\Rightarrow F_1(x)-F_2(x)=C$,

что и требовалось доказать.

Следствие 2.1. Если известна какая-либо ***одна*** первообразная $F(x)$ для $f(x)$, то $\forall$ другая:

$$F_1(x)=F(x)+C. \tag{2.1}$$

Определение. ***Неопределенным интегралом*** $\int f(x)dx$ от функции $f(x)$ называется ***множество всех первообразных для*** $f(x)$.

Из следствия 2.1 получаем

$$\int f(x)dx=F(x)+C, \tag{2.2}$$

где $F(x)$ – $\forall$ какая-либо первообразная для функции $f(x)$, т.е.

$$F'(x)=f(x). \tag{2.3}$$

Замечание. Согласно (2.3), *вычисление интеграла* (2.2) *можно проверить* с помощью производной – это, например, делается при получении следующей таблицы

ТАБЛИЦА ОСНОВНЫХ НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

$\int 0\cdot dx=C \quad (C-\text{число})$

$\int 1\cdot dx=x+C$

$\int x^k\cdot dx=\dfrac{x^{k+1}}{k+1}+C \quad (k\neq -1)$ (например, $\int x\cdot dx=\dfrac{x^2}{2}+C$; $\int\dfrac{d}{\sqrt{x}}=2\cdot\sqrt{x}+C$),

$\int\dfrac{dx}{x}=\ln|x|+C$, $\int a^x\cdot dx=\dfrac{a^x}{\ln a}+C$, где $a>0,\ a\neq 1$ (в частности, $\int e^x\cdot dx=e^x+C$),

$\int\sin x\cdot dx=-\cos x+C$;

$\int\cos x\cdot dx=\sin x+C$;

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}x + C;$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \cdot \mathrm{arctg}\frac{x}{\mathrm{a}} + C; \quad \text{(в частности,} \quad \int \frac{dx}{1 + x^2} = \mathrm{arctg}x + C\text{)},$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \cdot \ln\left|\frac{a + x}{a - x}\right| + C; \quad \text{(в частности,} \quad \int \frac{dx}{1 - x^2} = \frac{1}{2} \cdot \ln\left|\frac{1 + x}{1 - x}\right| + C\text{)},$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C; \quad \text{(в частности,} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C\text{)},$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C,$$

$$\int \mathrm{sh}\, x \cdot dx = \mathrm{ch}\, x + C;$$

$$\int \mathrm{ch}\, x \cdot dx = \mathrm{sh}\, x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\mathrm{ch}^2 x} = \mathrm{th}\, x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\mathrm{sh}^2 x} = -\mathrm{cth}\, x + C.$$

Здесь: $\mathrm{sh}\, x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$; $\mathrm{ch}\, x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$; $\mathrm{th}x = \dfrac{\mathrm{sh}\, x}{\mathrm{ch}\, x}$; $\mathrm{cth}\, x = \dfrac{\mathrm{ch}\, x}{\mathrm{sh}\, x}$.

Замечание 1. Во всех формулах букву «x» *можно поменять в обеих частях* на любую функцию $\varphi(x), \varphi(t), \varphi(s)$ и т.д., *имеющую производную*, например:

а) в формуле $\int \cos x \cdot dx = \sin x + C$; $x \to e^x$: $\int \cos(e^x) \cdot d(e^x) = \sin(e^x) + C$;

б) $x \to \ln t$: $\int \cos(\ln t) d(\ln t) = \sin(\ln t) + C$;

в) $x \to s^5$: $\int \cos(s^5) d(s^5) = \sin(s^5) + C$.

Замечание 2. При дифференцировании *элементарной функции* получается *также элементарная функция*; при интегрировании – не всегда (говорят: «интеграл не берется»). Например:

$\int e^{-x^2} dx$ – «интеграл Пуассона» – «*не берется*»;

$\int \cos(x^2) dx$; $\int \sin(x^2) dx$ – «интеграл Френе»;

$\int \frac{1}{\ln x} dx$ – «интегральный логарифм»;

$\int \frac{\sin x}{x} dx; \int \frac{\cos x}{x} dx$ – «интегральные синус и косинус» – тоже *не берутся.*

2.2 Основные свойства неопределенного интеграла

1. а) $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$;

б) $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$.

2. $\int d\Phi(x) = \Phi(x) + C$.

3. а) $\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx$;

б) $\int (f_1(x) + f_2(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$.

4. Если

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \tag{2.4}$$

то $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$.

5. Если $\varphi(x)$ имеет производную, то

$$\int f(\varphi(x))d(\varphi(x)) = F(\varphi(x)) + C;\ F(x) \text{ – первообразная для } f(x). \tag{2.5}$$

Доказательства.

1. а) $\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x) + C)' = F'(x) + 0 = f(x)$;

б) $d\left(\int f(x)dx\right) = \left(\int f(x)dx\right)' dx = f(x)dx$.

2. $\int d\Phi(x) = \int \Phi'(x)dx = \Phi(x) + C$.

3. а) $\int \alpha f(x)dx = \alpha F(x) + C = \alpha(F(x) + C_1) = \alpha \int f(x)dx$;

б) $\int (f_1(x) + f_2(x))dx = (F_1(x) + F_2(x)) + C = (F_1(x) + C_1) + (F_2(x) + C_2) =$

$= \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$.

4. Если $F'(x) = f(x)$, то $F'(ax+b) = |\text{правило производной от сложной функции}| =$

$= f(ax+b)\cdot(ax+b)' = f(ax+b)\cdot a \Rightarrow \left(\frac{1}{a}\cdot F(ax+b)\right)' = f(ax+b)$, т.е. *для* $f(ax+b)$ *первообразной служит функция* $\frac{1}{a}\cdot F(ax+b)$.

5. $\left(F(\varphi(x))\right)' = \dfrac{dF}{d\varphi}\cdot\dfrac{d\varphi}{dx} = f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$. Значит, *первообразной функцией для функции* $f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$ *служит* функция $F(\varphi(x))$, т.е.

$$\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\cdot dx = \int f(\varphi(x))\,d\varphi(x) = F(\varphi(x)) + C. \qquad (2.6)$$

Формула (2.6) называется *формулой поднесения* $\varphi'(x)$ *под знак дифференциала*.

Пример 2.1.

$$\int \cos(\ln x)\cdot\frac{dx}{x} = \left|\frac{dx}{x} = \frac{1}{x}\cdot dx = (\ln x)'\,dx = d(\ln x)\right| = \int \cos(\ln x)\cdot d(\ln x) = \sin(\ln x) + C,$$ т.к. $\int \cos x\cdot dx = \sin x + C$.

Пример 2.2.

$$\int \cos\left(x^5\right)x^4 dx = \begin{vmatrix} dx^5 = 5x^4 dx \\ x^4 dx = \frac{1}{5}d\left(x^5\right) \end{vmatrix} = \int \cos\left(x^5\right)\frac{1}{5}d\left(x^5\right) = \frac{1}{5}\int \cos\left(x^5\right)d\left(x^5\right) = |\text{таблица}| = \frac{1}{5}\sin\left(x^5\right) + C.$$

Пример 2.3.

$$\int \cos\left(e^x\right)e^x dx = \left|e^x dx = de^x\right| = \int \cos\left(e^x\right)d\left(e^x\right) = |\text{таблица}| = \sin e^x + C.$$

2.3 Замена переменной в неопределенном интеграле

Теорема 2.2. *Пусть* $x = \varphi(t)$ *– непрерывная функция;* $\varphi'(t)$ *– тоже непрерывная;* $\varphi(t)$ *имеет* ***обратную функцию****. Тогда:*

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \; - \qquad (2.7)$$

формула замены переменной.

Доказательство. Проверим, что *равны производные* по x от обеих частей (2.7):

а) $\left(\int f(x)dx\right)'_x = \left(F(x) + C\right)' = F'(x) = f(x)$;

б) $\left(\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\right)'_x = \left(f(\varphi(t))\varphi'(t)\right)\cdot\dfrac{1}{\varphi'(t)} = f(\varphi(t)) = f(x)$;

$\Rightarrow$ производные **а)** и **б)** – *равны* $\Rightarrow$ формула (2.7) – верна, ч.т.д.

Пример 2.4. Вычислить $\int\sqrt{1-x^2}\,dx$.

Решение.

$$\int\sqrt{1-x^2}\,dx = \begin{vmatrix} \text{замена}: \quad x = \sin t; \\ dx = \cos t\cdot dt; \\ \sqrt{1-x^2} = |\cos t| = \\ = (\text{считаем, что I четверть}) = \cos t \end{vmatrix} = \int \cos t\cdot\cos t\cdot dt = \ldots =$$

$$= \int \frac{1}{2}(1+\cos 2t)dt = \frac{1}{2}\left(\int 1\cdot dt + \int \cos(2t)\cdot \frac{d(2t)}{2}\right) = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t + C =$$

$$= |t = \arcsin x| = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{4}\sin(2\arcsin x) + C.$$

2.4 Формула интегрирования по частям в неопределенном интеграле

Теорема 2.3. *Если* $u(x), v(x), u'(x), v'(x)$ *– непрерывные функции, то*

$$\int u\cdot dv = u\cdot v - \int v\cdot du\,. \tag{2.8}$$

Доказательство.

$$d(u\cdot v) = u\cdot dv + v\cdot du \Rightarrow \int d(u\cdot v) = \int u\cdot dv + \int v\cdot du$$

1) $\int d(u\cdot v) = u\cdot v + C$

$\Leftrightarrow u\cdot v + C = \int u\cdot dv + \int v\cdot du$

2) Выражая отсюда $\int u\cdot dv$, получим формулу (2.8), ч.т.д.

Пример 2.5.

$$\int x\ln x dx = \otimes \left| \begin{array}{c} \ln x = u(x) \\ xdx = dv(x) \\ \Rightarrow du = \dfrac{1}{x}dx \\ v = \dfrac{x^2}{2} \end{array} \right| \otimes = \ln x\cdot\frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\cdot dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C\,.$$

Пример 2.6.

$$\int (1-x^2)e^x dx = |\text{два раза по частям!!!}| = e^x(2x - x^2 - 1) + C$$

Практические рекомендации

1. Интегралы, содержащие в качестве множителя в подынтегральной функции $\ln x, \arcsin x, \arccos x, \mathrm{arctg}\, x, (\arcsin x)^2$ и т.д. (а оставшаяся часть подынтегральной функции – это производная от некоторой известной функции), удобно интегрировать по частям, положив $u(x) = \ln x$ (или соответственно $\arcsin x$ и т.д.), а за $dv(x)$ – все оставшееся под интегралом.

2. Интегралы $\int e^{ax}\cdot\cos bx\cdot dx, \int e^{ax}\cdot\sin bx\cdot dx, \int \sin(\ln x)\cdot dx, \int \cos(\ln x)\cdot dx$ находятся, если два раза применить формулу интегрирования по частям, обозначить интеграл через I и затем решить уравнение относительно I.

Пример 2.7. Вычислить $\int \sin(\ln x)\cdot dx$

Решение. Обозначим интеграл I;

$$I=\left|\begin{array}{l}\text{интегрируем по частям}\\ u=\sin(\ln x)\\ dv=dx\Rightarrow du=\cos(\ln x)\cdot\dfrac{1}{x}\cdot dx\\ v=x\end{array}\right|=\sin(\ln x)\cdot x-\int x\cdot\cos(\ln x)\cdot\frac{1}{x}\cdot dx=$$

$$=\sin(\ln x)\cdot x-\int\cos(\ln x)\cdot dx=\left|\begin{array}{l}u=\cos(\ln x)\\ dv=dx\Rightarrow du=-\sin(\ln x)\cdot\dfrac{1}{x}\cdot dx\\ v=x\end{array}\right|=$$

$$=\sin(\ln x)-\cos(\ln x)\cdot x+\int x\cdot(-\sin(\ln x))\cdot\frac{1}{x}\cdot dx=\sin(\ln x)-\cos(\ln x)\cdot x-I$$

Из полученного равенства находим искомый интеграл I:

$$I=\frac{1}{2}((\sin(\ln x))-x\cos(\ln x))+C.$$

2.5 Разложение рациональных функций в сумму простейших рациональных дробей. Интегрирование рациональных функций

2.5.1 Основные понятия. Разложение рациональных дробей в сумму простейших дробей

Определение. *Рациональной функцией* (*дробно-рациональной функцией*, *рациональной дробью*) называется отношение

$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$$

двух многочленов.

Определение. Рациональная дробь называется *правильной*, если степень числителя $P(x)$ меньше степени знаменателя $Q(x)$. В противном случае дробь называется *неправильной*.

Неправильная дробь путем деления (например, «уголком») приводится к сумме некоторого *многочлена* (частного от деления) и правильной дроби.

Пример 2.8. Представить дробь $\dfrac{3x^4-x^2+2x-5}{x^2-x+3}$ в виде суммы многочлена и правильной дроби (т.е. «выделить правильную часть дроби»).

Решение. Производим деление «уголком»:

$$
\begin{array}{r|l}
3x^4 - x^2 + 2x - 5 & \underline{x^2 - x + 3} \\
-\underline{\left(3x^4 - 3x^3 + 3x^2\right)} & 3x^2 + 3x - 1 \\
3x^3 - 4x^2 + 2x - 5 & \\
-\underline{\left(3x^3 - 3x^2 + 9x\right)} & \\
-x^2 - 7x - 5 & \\
-\underline{\left(-x^2 + x - 3\right)} & \\
-8x - 2 - & \\
-\ \textit{остаток} &
\end{array}
$$

В результате имеем: исходная дробь – $3x^2 + 3x - 1 + \dfrac{-8x - 2}{x^2 - x + 3}$.

Теорема 2.4. *Пусть функция* $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *– правильная рациональная дробь, знаменатель которой разложен в произведение*

$$Q(x) = (x-a)^k \cdot \ldots \cdot (x-b)^l \cdot \left(x^2 + px + q\right)^{\lambda} \cdot \ldots \cdot \left(x^2 + rx + s\right)^{\mu}$$

степеней линейных $(x-a), \ldots, (x-b)$ *и квадратичных функций* $x^2 + px + q, \ldots, x^2 + rx + s$.

Тогда существует ***единственное представление*** *этой дроби* $R(x)$ *в виде* ***суммы простейших дробей***:

$$
\begin{aligned}
R(x) = {} & \frac{A_1}{(x-a)^k} + \frac{A_2}{(x-a)^{k-1}} + \ldots + \frac{A_k}{x-a} + \ldots + \frac{B_1}{(x-b)^l} + \frac{B_2}{(x-b)^{l-1}} + \ldots + \frac{B_l}{x-b} + \\
& + \frac{M_1 x + N_1}{\left(x^2 + px + q\right)^{\lambda}} + \frac{M_2 x + N_2}{\left(x^2 + px + q\right)^{\lambda - 1}} + \ldots + \frac{M_{\lambda} x + N_{\lambda}}{\left(x^2 + px + q\right)^{1}} + \ldots + \\
& + \frac{R_1 x + T_1}{\left(x^2 + rx + s\right)^{\mu}} + \frac{R_2 x + T_2}{\left(x^2 + rx + s\right)^{\mu - 1}} + \ldots + \frac{R_{\mu} x + T_{\mu}}{x^2 + rx + s}.
\end{aligned} \tag{2.9}
$$

Без доказательства.

2.5.2 Правило отыскания коэффициентов $A_i, B_j, M_k, \ldots$

1. Привести сумму в правой части (2.9) *к общему знаменателю.*

2. Записать *равенство числителей дробей* слева и справа.

3. *Приравнять коэффициенты* многочленов-числителей при одинаковых степенях x.

4. Получится *система линейных алгебраических уравнений* относительно этих коэффициентов; *решая* эту систему, находим нужные *коэффициенты*.

Замечание. *Кроме* (или *вместо* **п. 3**) можно поступить так: в указанные многочлены-числители (**п. 2**) *подставить числа* $x = x_1$, $x = x_2$, *получить несколько уравнений* относительно искомых *коэффициентов*.

Пример 2.9. Разложить в сумму простейших дробей: $R(x)=\dfrac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2+x+1)}$.

Решение.

$$R(x)=\left|\text{по теореме}\right|=\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{x-1}+\frac{Mx+N}{x^2+x+1}=\left|\begin{matrix}\text{к общему}\\ \text{знаменателю}\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{A(x^2+x+1)+B(x-1)(x^2+x+1)+(Mx+N)(x-1)^2}{(x-1)^2\cdot(x^2+x+1)}.$$

Приравниваем числители:

$$A(x^2+x+1)+B(x^3-1)+(Mx+N)(x^2-2x+1)=2x^3+4x^2+x+2;$$

$$Ax^2+Ax+A+Bx^3-B+Mx^3-2Mx^2+Mx+Nx^2-2Nx+N=2x^3+4x^2+x+2.$$

Приравниваем коэффициены слева и справа при одинаковых степенях x:

$$\left.\begin{matrix} x^3: & B+M=2\\ x^2: & A-2M+N=4\\ x^1: & A+M-2N=1\\ x^0: & A-B+N=2\end{matrix}\right\}\ \text{система}.$$

$\Leftrightarrow$ Решаем систему методом Гаусса; ее *расширенная матрица* ~

$$\left(\begin{array}{cccc|c} A & B & M & N & \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2\\ 1 & 0 & -2 & 1 & 4\\ 1 & 0 & 1 & -2 & 1\\ 1 & -1 & 0 & 1 & 2\end{array}\right)\Leftrightarrow\left|S_1\leftrightarrow S_2\right|\Leftrightarrow\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 & 4\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2\\ 1 & 0 & 1 & -2 & 1\\ 1 & -1 & 0 & 1 & 2\end{array}\right)\Leftrightarrow\left|\begin{matrix}S_3-S_1\\ S_4-S_1\end{matrix}\right|\Leftrightarrow\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 & 4\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 3 & -3 & -3\\ 0 & -1 & 2 & 0 & -2\end{array}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left|S_4+S_2\right|\Leftrightarrow\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 & 4\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 3 & -3 & -3\\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0\end{array}\right)\Leftrightarrow\left|S_4-S_3\right|\Leftrightarrow\left(\begin{array}{cccc|c} A & B & M & N & \\ 1 & 0 & -2 & 1 & 4\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 3 & -3 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3\end{array}\right)\Leftrightarrow\left|\begin{matrix}\dfrac{S_3}{3};\\ \dfrac{S_4}{3}\end{matrix}\right|\Leftrightarrow\left(\begin{array}{cccc|c} A & B & M & N & \\ 1 & 0 & -2 & 1 & 4\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1\end{array}\right).$$

Восстановим систему уравнений по полученной матрице:

$$\begin{cases} A\ -2M\ +N = 4\\ B\ +M = 2\\ M\ -N = -1\\ N = 1\end{cases},\ \text{откуда}\ \begin{matrix} N=1\\ M=N-1=0\\ B=2-M=2\\ A=2M-N+4=0-1+4=3.\end{matrix}$$

Вернемся к началу решения: $R(x)=\dfrac{3}{(x-1)^2}+\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{1}{x^2+x+1}$.

2.5.3 Интегрирование простейших рациональных дробей

Определение. *Простейшими рациональными дробями* называются дроби:

1) $\dfrac{A}{x-a}$; **2)** $\dfrac{A}{(x-a)^k}$; **3)** $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$; **4)** $\dfrac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^k}$,

где *A*, *B*, *a*, *p*, *q*, *k* – заданные числа; $D=p^2-4q<0$ – дискриминант квадратного трехчлена, $k=2,3,4,\ldots$.

Вычислим интегралы от этих функций:

1) $\displaystyle\int\frac{A}{x-a}dx=A\int\frac{dx}{x-a}=A\int\frac{d(x-a)}{x-a}=A\ln|x-a|+C,\quad C\in R.$

2) $\displaystyle\int\frac{A}{(x-a)^k}dx=A\int(x-a)^{-k}dx=A\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1}+C.$

3) $\displaystyle\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx=$

$$=\left|\begin{array}{l} x^2+px+q=x^2+2x\dfrac{p}{2}+\left(\dfrac{p}{2}\right)^2-\left(\dfrac{p}{2}\right)^2+q=\left(x+\dfrac{p}{2}\right)^2+\dfrac{4q-p^2}{4}= \\ =\left(x+\dfrac{p}{2}\right)^2+a^2;\quad \text{где}\quad a^2=\dfrac{4q-p^2}{4}=-D>0; \\ \text{заменим}\; x+\dfrac{p}{2}=t,\quad x=t-\dfrac{p}{2},\quad dx=dt \end{array}\right|=\int\frac{A\left(t-\frac{p}{2}\right)+B}{t^2+a^2}dt=$$

$$=A\int\frac{tdt}{t^2+a^2}+\int\frac{B-\frac{Ap}{2}}{t^2+a^2}=\left|tdt=\frac{1}{2}d\left(t^2+a^2\right)\right|=\frac{A}{2}\int\frac{d\left(t^2+a^2\right)}{t^2+a^2}+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{dt}{t^2+a^2}=$$

$$=\frac{A}{2}\ln\left|t^2+a^2\right|+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a}+C=\left|t=x+\frac{p}{2}\right|=$$

$$=\frac{A}{2}\ln\left|\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+a^2\right|+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{a}+C.$$

4) $$\int\frac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^k}dx=\left|\begin{array}{l} x^2+px+q=\left(x+\dfrac{p}{2}\right)^2-\dfrac{p^2}{2}+q=\left(x+\dfrac{p}{2}\right)^2+a^2, \\ \text{где}\quad a^2=q-\dfrac{p^2}{4}=-\dfrac{p^2-4q}{4}=-\dfrac{D}{4}<0;\quad \text{т.к.}\quad \mathrm{D}\overset{\Delta}{=}p^2-4q<0; \\ \text{замена}:\quad x+\dfrac{p}{2}=t;\quad x=t-\dfrac{p}{2};\quad dx=dt \end{array}\right|=$$

$$=\int\frac{A\left(t-\frac{p}{2}\right)+B}{\left(t^2+a^2\right)^k}dt=\int\frac{Atdt}{\left(t^2+a^2\right)^k}+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{1\cdot dt}{\left(t^2+a^2\right)^k}=$$

$$=\frac{A}{2}\int\left(t^2+a^2\right)^{-k}d\left(t^2+a^2\right)+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\cdot I_k \qquad (2.10)$$

Здесь $I_k=\int\frac{1}{\left(t^2+a^2\right)^k}dt=\frac{1}{a^2}\int\frac{a^2+t^2-t^2}{\left(t^2+a^2\right)^k}dt=\frac{1}{a^2}\left(\int\frac{a^2+t^2}{t^2+a^2}dt+\int\frac{-t^2}{\left(t^2+a^2\right)^k}dt\right)=$

$$=\frac{1}{a^2}\left(I_{k-1}-\int\frac{\frac{1}{2}t\cdot 2t\cdot dt}{\left(t^2+a^2\right)^k}\right)=\left|\begin{array}{l}\text{В интеграле - по частям}\\ t=u(t);\quad du=dt;\quad dv(t)=\left(t^2+a^2\right)^{-k}\cdot 2tdt\\ 2tdt=d\left(t^2+a^2\right),\\ v(t)=\dfrac{\left(t^2+a^2\right)^{-k+1}}{-k+1}\end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{a^2}I_{k-1}-\frac{1}{2a^2}\cdot\frac{\left(t^2+a^2\right)^{-k+1}\cdot t}{-k+1}+\frac{1}{2a^2}\int\frac{\left(t^2+a^2\right)^{-k+1}}{-k+1}dt=$$

$$=\frac{1}{a^2}I_{k-1}+\frac{\left(t^2+a^2\right)^{-k+1}\cdot t}{2a^2(k-1)}-\frac{1}{2a^2(k-1)}\int\frac{1}{\left(t^2+a^2\right)^{k-1}}dt=$$

$$=\frac{1}{a^2}\left(1-\frac{1}{2(k-1)}\right)I_{k-1}+\frac{1\cdot t}{2a^2(k-1)\left(t^2+a^2\right)^{k-1}}$$

Окончательно

$$I_k=\frac{t}{2a^2(k-1)\left(t^2+a^2\right)^{k-1}}+\frac{1}{a^2}\cdot\frac{2k-3}{2(k-1)}\cdot I_{k-1},\quad k=2;3;4;\ldots. \qquad (2.11)$$

В силу *рекуррентной формулы* (2.11): вычисление I_k сводится к I_{k-1}; I_{k-1} – к I_{k-2}; и т.д.; I_2 – к I_1. Но:

$$I_1=\int\frac{dt}{t^2+a^2}=!!!=\frac{1}{a}\text{arctg}\frac{t}{a}+C, \qquad (2.12)$$

поэтому последовательно находим $I_1,\ldots,I_k$.

Пример 2.10. Найти интеграл $I=\int\frac{2x+5}{\left(x^2+2x+6\right)^2}$.

Решение.

$$I=\left|\begin{array}{l}x^2+2x+6=\left(x^2+2x+1\right)+5=(x+1)^2+\left(\sqrt{5}\right)^2=t^2+a^2,\\ \text{где}\quad x+1=t;\quad a=\sqrt{5};\quad x=t-1;\quad dx=dt\end{array}\right|=\int\frac{2(t-1)+5}{\left(t^2+a^2\right)^2}dt=$$

$$=\int\frac{2tdt}{\left(t^2+a^2\right)^2}+3\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^2}=\int\left(t^2+a^2\right)^{-2}\cdot d\left(t^2+a^2\right)+3I_2=$$

$$=\frac{\left(t^2+a^2\right)^{-2+1}}{-2+1}+3I_2, \tag{2.13}$$

где $I_2=\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^2}=\left|\text{по ф. (3.3), где } k=2\right|=\frac{t}{2a^2\cdot 1\cdot\left(t^2-a^2\right)^1}+\frac{1}{a^2}\cdot\frac{2\cdot 2-3}{2\cdot 1}\cdot I_1;$ (2.14)

$$I_1=\int\frac{dt}{t^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a}+C.$$

Зная I_1, из (2.13) и (2.14) имеем:

$$I=-\frac{1}{t^2+a^2}+3\left(\frac{t}{2a^2\left(t^2-a^2\right)}+\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a}\right)+C=\left|\begin{matrix}t=x+1;\ a=\sqrt{5};\\ t^2+a^2=x^2+2x+6\end{matrix}\right|=$$

$$=-\frac{1}{x^2+2x+6}+\frac{3(x+1)}{10\left(x^2+2x+6\right)}+\frac{3}{10\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{5}}+C.$$

2.6 Интегрирование выражений, содержащих тригонометрические и иррациональные функции, методом рационализации

2.6.1 Интегрирование тригонометрических функций

Определение. Рациональной функцией $R(a,b,\ldots,c)$ аргументов $a,b,\ldots,c$ называется отношение

$$R(a,b,\ldots,c)=\frac{P(a,b,\ldots,c)}{Q(a,b,\ldots,c)}$$

двух многочленов P и Q от указанных аргументов.

Пример 2.11. Функция $\dfrac{xy+10y^3+4}{x^3-5xy+5y^2-3}=R(x,y)$ – рациональная функция от x,y.

Пример 2.12. Функция $\dfrac{3\sqrt{x}+5\sqrt[3]{x}-8}{7\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x}-3}=R\left(\sqrt{x},\sqrt[3]{x}\right)$ – рациональная функция от аргументов $\sqrt{x}$ и $\sqrt[3]{x}$.

Пример 2.13. Функция $\dfrac{2\cos^2 x-3\sin x+4}{7\cos\cdot\sin^2 x-3}=R(\sin x,\cos x)$ – рациональная функция от аргументов $\sin x$ и $\cos x$.

Рассмотрим интеграл

$$\int R(\sin x,\cos x)dx=I. \tag{2.15}$$

1) Универсальная тригонометрическая подстановка

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \tag{2.16}$$

рационализирует интеграл (2.15), т.е. сводит его к интегралу от некоторой рациональной функции аргумента *t*.

При этом:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}; \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}; \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}. \tag{2.17}$$

2) Другие тригонометрические подстановки

1. Пусть в интеграле (2.15) функция *R* обладает свойством

$$R(-\sin x; \cos x) = -R(\sin x; \cos x) \tag{2.18}$$

– *«нечетность R относительно* $\sin x$*».* Тогда в интеграле (2.15) удобна подстановка $t = \cos x$; в итоге получается интеграл от некоторой *рациональной функции нового аргумента t*.

2. Если в интеграле (2.15) будет

$$R(\sin x; -\cos x) = -R(\sin x; \cos x) \tag{2.19}$$

– *«нечетность R по аргументу* $\cos x$*»,* то удобна подстановка $t = \sin x$.

3. Если же выполняется условие

$$R(-\sin x; -\cos x) = R(\sin x; \cos x) \tag{2.20}$$

– *«одновременная четность по* $\sin x$ *и* $\cos x$*»*, то удобна рационализирующая подстановка $t = \operatorname{tg} x$. При этом следует учесть, что

$$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}; \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}; \quad \sin x \cos x = \frac{t}{1+t^2}; \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

Пример 2.14.

$$\int \frac{dx}{3+\sin x} = \left| \begin{array}{l} \text{подынтегральная функция } R(\sin x, \cos x) \text{ не обладает особенностями;} \\ \text{делаем универсальную тригонометрическую подстановку (2.16);} \\ \text{применяем формулы (2.17); } t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3+\frac{2t}{1+t^2}} = 2\int \frac{dt}{3t^2+2t+3} \left(\begin{array}{l} \text{это – интеграл от} \\ \text{рациональной функции} \end{array} \right) = \ldots = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{3t+1}{2\sqrt{2}} \right) + C =$$

$$=\left|t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{2\sqrt{2}}\right)+C.$$

Пример 2.15. $\int\frac{dx}{\cos x}=$

$$=\left|\begin{array}{l}R(\sin x,\cos x)=\dfrac{1}{\cos x}\quad -\text{нечетная по }\cos x\\ \Rightarrow\text{подстановка } t=\text{sinx}\end{array}\right|=\int\frac{\cos x dx}{\cos^2 x}=\int\frac{d(\sin x)}{1-\sin^2 x}=$$

$$=\int\frac{dt}{1-t^2}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|+C.$$

Пример 2.16.

$$\int\frac{dx}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}=\left|\begin{array}{l}\text{подынтегральная функция } R(\sin x,\cos x)=\dfrac{1}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}\\ -\text{одновременно четная по }\sin x\text{ и cosx}\Rightarrow\text{подстановка } t=\operatorname{tg}x;\\ \text{делаем подготовительные преобразования}\end{array}\right|=$$

$$=\int\frac{dx}{\cos^2 x\left(a^2+b^2\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right)}=\int\frac{\dfrac{dx}{\cos^2 x}}{a^2+b^2\operatorname{tg}^2 x}=\int\frac{d(\operatorname{tg}x)}{a^2+b^2\operatorname{tg}^2 x}=\int\frac{dt}{a^2+b^2t^2}=\int\frac{\frac{1}{b}d(bt)}{(bt)^2+a^2}=$$

$$=\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{a}\cdot\operatorname{arctg}\frac{bt}{a}+C=\frac{1}{ab}\operatorname{arctg}\frac{b\operatorname{tg}x}{a}+C.$$

3) Некоторые частные случаи интегралов от тригонометрических функций

1. $\int\sin^m x\cdot\cos^n x\cdot dx$ (m, n – целые числа, причем хотя бы одно – *нечетное*).

- Если n – нечетное, то делают подстановку $t=\sin x$.
- Если m – нечетное, то берут $t=\cos x$.

Пример 2.17.

$$\int\sin^2 x\cdot\cos^3 x\cdot dx=\left|\begin{array}{l}\text{число 3} - \text{нечетное}\\ \text{подстановка } t=\sin x\end{array}\right|=\int\sin^2 x\cdot\cos^2 x\cdot\cos x\cdot dx=$$

$$=\int\sin^2 x\cdot\left(1-\sin^2 x\right)d(\sin x)=\int\left(t^2-t^4\right)dt=\frac{t^3}{3}-\frac{t^5}{3}+C=\frac{\sin^3 x}{3}-\frac{\sin^5 x}{3}+C.$$

2. В интеграле $\int\sin^m x\cdot\cos^n x\cdot dx$ числа m и n – оба *четные натуральные числа*. В этом случае производится понижение порядков степеней по формулам

$$\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x);\quad \cos^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x).$$

Пример 2.18.

$$\int \sin^4 x dx = \left| \sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x) \right| = \int \left(\frac{1}{2}(1-\cos 2x) \right)^2 dx = \int \frac{1}{4}\left(1 - 2\cos 2x + \cos^2(2x)\right) dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{снова "понижаем степень":} \\ \cos^2 2x = \frac{1}{2}(1+\cos 4x) \end{array} \right| = \ldots = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C.$$

3. Интегралы вида

$$I_1 = \int \sin \alpha x \cos \beta x dx; \quad I_2 = \int \sin \alpha x \sin \beta x dx; \quad I_3 = \int \cos \alpha x \cos \beta x dx$$

удобно проинтегрировать, применив соответственно формулы:

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b));$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b));$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$$

2.6.2 Интегрирование дробно-линейных иррациональностей

Интегрирование дробно-линейных иррациональностей – это поиск интгралов вида

$$\int R\left(x; \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}; \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_2}; \ldots; \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_n} \right) dx,$$

где R – рациональная функция своих аргументов; $a, b, c, d, \in$ множеству действительных чисел; $r_1, r_2, \ldots, r_n \in Q$ (т.е. являются рациональными числами – отношениями двух целых чисел).

Такие интегралы *преобразуются к интегралу от рациональной функции* с помощью подстановки

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^q,$$

где q – наименьший общий знаменатель дробей $r_1, r_2, \ldots, r_n$.

Частные случаи

- $\int R\left(x; (ax+b)^{r_1}; (ax+b)^{r_2}; \ldots; (ax+b)^{r_n}\right) dx$ рационализируется с помощью подстановки $ax + b = t^q$, где q – *наименьший общий знаменатель дробей* $r_1, r_2, \ldots, r_n$.

- при $a = 1; \quad b = 0$: $\int R\left(x; x^{r_1}; x^{r_2}; \ldots; x^{r_n}\right) dx$ рационализируется подстановкой $x = t^q$, где смысл числа q такой же, как и в предыдущем случае.

Пример 2.19. $\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \frac{dx}{x} =$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{Подынтегральная функция содержит} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{1/3}. \\ \text{Подстановка}: \frac{x+1}{x-1} = t^3;\ x+1 = t^3(x-1);\ x - xt^3 = -t^3 - 1; \\ -x\left(t^3-1\right) = -\left(t^3+1\right);\ x = \frac{t^3+1}{t^3-1} = \frac{t^3-1+2}{t^3-1} = 1 + 2\left(t^3-1\right)^{-1}; \\ dx = 2\cdot(-1)\cdot\left(t^3-1\right)^{-2}\cdot 3t^2\cdot dt = \frac{-6t^2}{\left(t^3-1\right)^2}dt. \end{array} \right| =$$

$$= \int t \cdot \frac{\frac{-6t^2}{\left(t^3-1\right)^2}dt}{\frac{t^3+1}{t^3-1}} = -6\int \frac{t^3 dt}{\left(t^3-1\right)\left(t^3+1\right)} -$$

– получен *интеграл от рациональной функции* аргумента *t*.

Пример 2.20.

$$\int \frac{x+\sqrt[3]{2x-3}}{1+\sqrt{2x-3}}\cdot dx = \left| \begin{array}{l} (2x-3) - \text{в степени } \frac{1}{3} \text{ и } \frac{1}{2}. \Rightarrow \text{Подстановка}: \\ 2x-3 = t^6;\ x = \frac{1}{2}\left(t^6+3\right);\ dx = 3t^5 dt. \end{array} \right| =$$

$= \int \frac{\frac{1}{2}\left(t^6+3\right)+t^2}{1+t^3}\cdot 3t^5\cdot dt$ – *интеграл от рациональной функции* аргумента *t*.

Пример 2.21.

$$\int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}}\cdot dx = \left| \begin{array}{l} \text{Под интегралом} - x^{1/4} \text{ и } x^{1/2}. \Rightarrow \\ \text{Подстановка}: x = t^4;\ t = x^{1/4};\ dx = 4t^3 dt. \end{array} \right| =$$

$= \int \frac{1+t}{t^4+t^2}\cdot 4t^3\cdot dt = 4\int \frac{t^2+t}{t^2+1}\cdot dt$ – *интеграл от рациональной функции* аргумента *t*.

2.6.3 Биномиальный дифференциал и его интегрирование

Определение. *Биномиальным дифференциалом* называется выражение

$$x^m \cdot \left(a + bx^n\right)^p \cdot dx,$$

где $a, b \in R;\quad m, n, p \in Q$.

Теорема 2.5 (Чебышева). *Интеграл*

$$\int x^m \cdot \left(a+bx^n\right)^p \cdot dx \tag{2.21}$$

от биномиального дифференциала можно выразить через элементарные функции только в следующих ***трех случаях****:*

I. $p \in Z$.

II. $\dfrac{m+1}{n} \in Z$.

III. $\dfrac{m+1}{n} + p \in Z$.

(Z – множество целых чисел).

Причем *рационализирующие подстановки Чебышева* таковы:

I. $x = t^q$, где q – наименьший общий знаменатель дробей m и n.

II. $a+bx^n = t^s$, где s – знаменатель дроби p.

III. $\dfrac{a+bx^n}{x^n} = t^s$, где s – знаменатель дроби p.

Пример 2.22.

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} = \int x^0 \cdot \left(1+x^4\right)^{-1/4} \cdot dx = \left| \begin{array}{l} m=0;\ n=4;\ p=-\dfrac{1}{4};\ s=4;\ \dfrac{m+1}{n}+p=0 \in Z; \\ \text{подстановка } \dfrac{1+x^4}{x^4} = t^4;\ \dfrac{1}{x^4}+1 = t^4;\ x^4 = \dfrac{1}{t^4-1}; \\ x = \left(t^4-1\right)^{-1/4};\ dx = -\dfrac{1}{4}\left(t^4-1\right)^{-5/4} \cdot 4t^3 \cdot dt;\ 1+x^4 = \\ = 1+\dfrac{1}{t^4-1} = \dfrac{t^4-1+1}{t^4-1} = \dfrac{t^4}{t^4-1} \Rightarrow \sqrt[4]{1+x^4} = \dfrac{t}{\sqrt[4]{t^4-1}} \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{-3t^3\left(t^4-1\right)^{-5/4} dt}{\dfrac{t}{\sqrt[4]{t^4-1}}} = \int \frac{-t^2 dt}{t^4-1} = \int \frac{t^2}{\left(1-t^2\right)\left(1+t^2\right)} dt = \frac{1}{2}\int \frac{2t^2-1+1}{\left(1-t^2\right)\left(1+t^2\right)} dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\left(t^2-1\right)+\left(t^2+1\right)}{\left(1-t^2\right)\left(1+t^2\right)} dt = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{1+t^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1-t^2} = -\frac{1}{2}\operatorname{atrctg} t + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int \frac{2-t+t}{(1-t)(1+t)} dt =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{atrctg} t + \frac{1}{4}\int \frac{(1-t)+(1+t)}{(1-t)(1+t)} dt = \ldots = \frac{1}{2}\operatorname{atrctg} t + \frac{1}{4}\int \frac{d(1+t)}{1+t} + \frac{1}{4}\int \frac{-d(1-t)}{1-t} =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{atrctg} t + \frac{1}{4}\ln|1+t| - \frac{1}{4}\ln|1-t| + C = \left| t = \sqrt[4]{\frac{1+x^4}{x^4}} = \frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x} \right| = \frac{1}{2}\operatorname{atrctg}\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x} +$$

$$+ \frac{1}{4}\ln\left|1+\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}\right| - \frac{1}{4}\ln\left|1-\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}\right| + C.$$

Пример 2.23. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} = \int x^{-\frac{1}{2}} \left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} dx =$

$$= \left| \begin{array}{l} m=-\frac{1}{2};\ n=\frac{1}{4};\ p=\frac{1}{3};\ \frac{m+1}{n}=\frac{1/2}{1/4}=2 - \text{целое число.} \\ \text{Подстановка Чебышева } 1+\sqrt[4]{x}=t^3;\ x=\left(t^3-1\right)^4; \\ dx=4\cdot\left(t^3-1\right)^3\cdot 3t^2\cdot dt;\ \sqrt{x}=\left(t^3-1\right)^2 \end{array} \right| = \int \frac{t}{\left(t^3-1\right)^2} \cdot 12t^2 \cdot \left(t^3-1\right)^3 \cdot dt =$$

$$= 12\int t^3\left(t^3-1\right)dt = 12\int\left(t^6-t^3dt\right) = \ldots = \frac{12}{7}\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^{7/3} - 3\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^{4/3} + C.$$

2.6.4 Интегралы от квадратичных иррациональностей $\int R\left(x;\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$

При вычислении таких интегралов удобно применять так называемые рационализирующие *подстановки Эйлера*:

I. подстановка Эйлера. Если $a>0$, то полагают

$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}\cdot x+t$;

II. подстановка Эйлера. Если $c>0$, то делают подстановку

$\sqrt{ax^2+bx+c} = x\cdot t\pm\sqrt{c}$;

III. подстановка Эйлера. Если существует корень x_0 квадратного трехчлена, то берут $\sqrt{ax^2+bx+c} = \left(x-x_0\right)\cdot t$.

2.6.5 Тригонометрические подстановки при интегрировании иррациональностей

I В интегралах вида $\int R\left(x;\sqrt{a^2-x^2}\right)dx$ делают подстановку $x=a\sin t$ или $x=a\cos t$.

II В интегралах $\int R\left(x;\sqrt{a^2+x^2}\right)dx$ берут $x=a\,\mathrm{tg}\,t$ или $x=a\,\mathrm{ctg}\,t$.

III В интегралах $\int R\left(x;\sqrt{x^2-a^2}\right)dx$ делают замену переменной $x=\frac{a}{\cos t}$ или $x=\frac{a}{\sin t}$, t – новая переменная.

В итоге исходный интеграл приводится к интегралу от тригонометрического выражения, а полученный интеграл вычисляется ранее описанными способами.

Замечание. Интегралы вида

$$\int \frac{kx+l}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \int \frac{\frac{k}{2a}(2ax+b-b)+l}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \int \frac{\frac{k}{2a}(2ax+b)+\left(l-\frac{kb}{2a}\right)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx =$$

$$= \frac{k}{2a}\int \frac{(2ax+b)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} + \left(l-\frac{kb}{2a}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

а далее в I *интеграле* производится *поднесение под знак дифференциала*, а во II – в квадратном трехчлене выделяется *полный квадрат*.

Пример 2.24.

$$\int \frac{3x-7}{\sqrt{4x^2+4x+5}}dx = \int \frac{3\cdot\frac{1}{8}(8x+4-4)-7}{\sqrt{4x^2+4x+5}}dx = \int \frac{\frac{3}{8}(8x+4)-7-\frac{3}{8}\cdot 4}{\sqrt{4x^2+4x+5}}dx =$$

$$= \frac{3}{8}\int \left(4x^2+4x+5\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot(8x+4)dx - \frac{17}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{(2x)^2+2\cdot(2x)\cdot 1+1+5}} =$$

$$= \frac{3}{8}\int \left(4x^2+4x+5\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot d\left(4x^2+4x+5\right) - \frac{17}{2}\int \frac{\frac{1}{2}d(2x+1)}{\sqrt{(2x+1)^2+2^2}} = \begin{vmatrix}\text{по таблице}\\ \text{интегралов}\end{vmatrix} =$$

$$= \frac{3}{8}\cdot\frac{\left(4x^2+4x+5\right)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} - \frac{17}{4}\ln\left(2x+1+\sqrt{(2x+1)^2+4}\right)+C =$$

$$= \frac{3}{4}\sqrt{4x^2+4x+5} - \frac{17}{4}\ln\left(2x+1+\sqrt{(2x+1)^2+4}\right)+C.$$

2.6.6 Примеры на подстановки Чебышева

1) $$\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}} = \int x^{-1}\left(1+x^5\right)^{-\frac{1}{3}}dx = \left| \begin{array}{l} m=-1;\ n=5;\ p=-\frac{1}{3};\ \frac{m+1}{n}=0\in Z \Rightarrow \\ \Rightarrow \text{II подстановка Чебышева}: \left(1+x^5\right)=t^3; \\ \sqrt[3]{1+x^5}=t;\ x=\left(t^3-1\right)^{\frac{1}{5}};\ dx=\frac{1}{5}\left(t^3-1\right)^{-\frac{4}{5}}\cdot 3t^2\cdot dt \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{\frac{1}{5}\left(t^3-1\right)^{-\frac{4}{5}}\cdot 3t^2\cdot dt}{\left(t^3-1\right)^{\frac{1}{5}}\cdot t} = \frac{3}{5}\int \frac{tdt}{t^3-1}.$$

2) $R(t)=\frac{t}{t^3-1}=\frac{t}{(t-1)\left(t^2+t+1\right)}=\frac{A}{t-1}+\frac{Bt+C}{t^2+t+1}=\frac{A\left(t^2+t+1\right)+(Bt+C)(t-1)}{(t-1)\left(t^2+t+1\right)};$

$A\left(t^2+t+1\right)+(Bt+C)(t-1)=t;$

$t=1; \quad A\cdot 3=1; \quad A=\frac{1}{3};$

$t=0; \quad A\cdot 1+C\cdot(-1)=0; \quad C=\frac{1}{3};$

$t=-1; \quad A+(C-B)(-2)=-1; \quad C-B=\frac{1}{2}(A+1)=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}=\frac{2}{3}; \quad B=C-\frac{2}{3}=-\frac{1}{3};$

3) $R(t)=\frac{1/3}{t-1}+\frac{-\frac{1}{3}t+\frac{1}{3}}{t^2+t+1}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{t-1}-\frac{1}{3}\cdot\frac{\frac{2}{2}t-1}{t^2+t+1}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{t-1}-\frac{1}{3}\cdot\frac{\frac{1}{2}(2t+1-1)-1}{t^2+t+1}=$

$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{t-1}-\frac{1}{6}\cdot\frac{2t+1}{t^2+t+1}-\frac{1}{3}\cdot\frac{-\frac{3}{2}}{t^2+t+1}=R(t);$

4) $\int\frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}}=\frac{3}{5}\int R(t)dt=\ldots=\frac{1}{5}\int\frac{dt}{t-1}-\frac{1}{10}\int\frac{(2t+1)dt}{t^2+t+1}+\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{2}\int\frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=$

$=\ldots=\frac{1}{5}\ln|t-1|-\frac{1}{10}\ln\left(t^2+t+1\right)+\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\operatorname{arctg}\frac{\left(t+\frac{1}{2}\right)\cdot 2}{\sqrt{3}}+C=\left|t=\left(1+x^5\right)^{\frac{1}{3}}\right|=\ldots$

3 ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

3.1 Понятие определенного интеграла

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a,b]$, $a<b$. Разобьем этот отрезок на n произвольных частей точками $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{i-1}<x_i<x_{i+1}<\ldots<x_n=b$. В каждом из полученных отрезков $[x_{i-1},x_i]$ выберем произвольную точку ξ_i $(x_{i-1}\le\xi_i\le x_i)$ и найдем значение функции в ней $f(\xi_i)$. Через Δx_i обозначим разность x_i-x_{i-1}, которую будем называть длиной частичного отрезка $[x_{i-1},x_i]$. Составим сумму

$$S=f(\xi_1)\Delta x_1+f(\xi_2)\Delta x_2+\ldots+f(\xi_n)\Delta x_n=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i\,. \tag{3.1}$$

Сумма вида (3.1) называется интегральной суммой для функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ для данного разбиения и данного выбора точек ξ_i.

Обозначим через λ длину наибольшего частичного отрезка разбиения: $\lambda=\max\limits_{i=1,n}\{\Delta x_i\}$.

Определение. Если существует конечный предел I интегральной суммы (3.1) при $\lambda\to 0$, то этот предел называется определенным интегралом от функции $f(x)$ по отрезку $[a,b]$ и обозначается следующим образом:

$$I=\int_a^b f(x)dx \quad \text{или} \quad \int_a^b f(x)dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i\,. \tag{3.2}$$

В этом случае функция $f(x)$ называется интегрируемой на $[a,b]$, числа a и b называются соответственно нижним и верхним пределами интегрирования, $f(x)$ – подынтегральной функцией, x – переменной интегрирования.

Рассмотрим более подробно предельный переход в формуле (3.2). Предположим, что отрезок $[a,b]$ последовательно разбивают на части сначала одним способом, потом другим и т.д. В результате получена последовательность $\{\tau_k\}$ таких разбиений и соответственно последовательность интегральных сумм $\{S_k\}$, где интегральные суммы зависят от λ. И определение определенного интеграла можно дать следующим образом: функция $f(x)$ называется интегрируемой на $[a,b]$, если для любой последовательности разбиений $\{\tau_k\}$, у которой $\lim\limits_{k\to\infty}\lambda_k=0$ соответствующая последовательность интегральных сумм $\{S_k\}$ стремится всегда к одному и тому же пределу $I=\lim\limits_{k\to\infty}S_k$.

Пример 3.1. Используя определение, вычислить интеграл $\int c dx$, где c – некоторое число.

Решение. Разобьем отрезок $[a,b]$ на n произвольных частей точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ и составим интегральную сумму S вида (3.1). Так как подынтегральная функция постоянна и равна c для любой промежуточной точки ξ_i, то $S = c\Delta x_1 + c\Delta x_2 + \ldots + c\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} c\Delta x_i = c\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = c(b-a)$, т.е. S равна постоянному числу и, следовательно, ее предел при $\lambda \to 0$ равен этому же числу, и, соответственно, $\int_a^b c dx = c(b-a)$.

3.2 Геометрический и физический смысл определенного интеграла

3.2.1 Площадь криволинейной трапеции

Пусть на отрезке $[a,b]$ задана непрерывная функция $y = f(x) \geq 0$. Фигура, ограниченная сверху графиком функции $y = f(x)$, снизу – осью OX, сбоку – прямыми $x = a$ и $x = b$ называется криволинейной трапецией. Найдем площадь этой трапеции.

Для этого разобьем отрезок $[a,b]$ на n произвольных частей точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n = b$. В каждом из полученных отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ выберем произвольную точку ξ_i $(x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i)$ и найдем значение функции в ней $f(\xi_i)$. Умножим полученное значение на длину $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ соответствующего участка разбиения. Полученное произведение $f(\xi_i)\Delta x_i$ равно площади прямоугольника с основанием Δx_i и высотой $f(\xi_i)$. Сумма таких произведений $f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = S_n$ равна площади ступенчатой фигуры и приближенно равна площади S криволинейной трапеции $S \approx S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$.

С уменьшением всех величин Δx_i точность полученной формулы увеличивается. Поэтому за точное значение S площади криволинейной трапеции принимаем следующий предел: $S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$, где $\lambda = \max_{i=\overline{1,n}}\{\Delta x_i\}$, и, окончательно, $S = \int_a^b f(x)dx$.

3.2.2 Работа переменной силы

Пусть материальная точка M перемещается под действием направленной вдоль оси OX переменной силы $F = F(x)$, где x – абсцисса движущейся точки M. Найдем работу A силы $F = F(x)$ по перемещению точки M вдоль оси OX из точки a в точку b ($a<b$). Для этого

отрезок $[a,b]$ разобьем на n произвольных частей точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. В каждом из полученных отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ выберем произвольную точку ξ_i и найдем значение силы в этой точке $F(\xi_i)$. Сила, действующая на этом отрезке, меняется от точки к точке и, чем меньше будет длина отрезка, тем изменение этой силы будет меньше и ее приближенно можно считать постоянной и равной значению $F(\xi_i)$. Тогда работа постоянной на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ силы может быть найдена по формуле:

$$A_i = F(\xi_i)\Delta x_i .$$

Приближенное значение работы на всем отрезке $[a,b]$ тогда будет равным:

$$A \approx F(\xi_1)\Delta x_1 + F(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + F(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i)\Delta x_i .$$

Это равенство тем точнее, чем меньше длина Δx_i. За точное значение работы A принимаем следующий предел:

$$A = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b F(x)dx \text{, где } \lambda = \max_{i=\overline{1,n}} \Delta x_i .$$

Аналогично можно показать, что путь S, пройденный точкой за промежуток времени от $t = a$ до $t = b$, при переменной скорости $V = V(t)$ равен:

$$S = \int_a^b V(t)dt ;$$

масса m неоднородного стержня на отрезке $[a,b]$ равна

$$m = \int_a^b \gamma(x)dx \text{, где } \gamma(x) \text{ – переменная плотность.}$$

3.3 Свойства определенного интеграла

В дальнейшем предполагаем, что все интегралы, входящие в формулы, существуют. Интеграл $\int_a^b f(x)dx$ был введен для случая $a<b$. Обобщим понятия определенного интеграла на случай $a=b$ и $a>b$.

1. Если $a=b$, то по определению

$$\int_a^b f(x)dx = 0 . \qquad (3.3)$$

Если $a>b$, то по определению

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx. \tag{3.4}$$

2. Каковы бы ни были числа a, b, c , всегда имеет место равенство:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \tag{3.5}$$

Доказательство. Допустим, что $a<c<b$. Так как предел интегральной суммы не зависит от способа разбиения отрезка $[a,b]$, то проведем разбиение так, чтобы точка c была точкой разбиения, например, $c = x_m$. Тогда интегральную сумму S можно разбить на две суммы:

$S = \sum_{i=1}^{m} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=m+1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$. Пользуясь свойствами пределов, получаем:

$$\lim_{\lambda\to 0} S = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{m} f(\xi_i)\Delta x_i + \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=m+1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Доказательство при другом расположении точек a, b, c сводится к рассмотренному случаю. Пусть, например, $a<b<c$. Тогда по доказанному $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$, откуда получаем: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_b^c f(x)dx$, и, учитывая (3.4), окончательно получаем:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

3. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, т.е.

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx. \tag{3.6}$$

Доказательство. Составим интегральную сумму для функции $cf(x)$: $\sum_{i=1}^{n} cf(\xi_i)\Delta x_i = c\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$, тогда, пользуясь свойствами пределов:

$$\int_a^b cf(x)dx = \lim_{\lambda\to 0} c\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = c\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = c\int_a^b f(x)dx.$$

4. Определенный интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме интегралов, т.е.

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx. \tag{3.7}$$

Доказательство. Составим интегральную сумму для функции $f(x) \pm g(x)$:

$$S = \sum_{i=1}^{n}(f(\xi_i) \pm g(\zeta_i))\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}(f(\xi_i)\Delta x_i + g(\xi_i)\Delta x_i) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i .$$

Тогда, пользуясь свойствами пределов, получаем:

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \lim_{\lambda \to 0} S = \lim_{\lambda \to 0}\left(\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \pm \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i \right) =$$
$$= \lim_{\lambda \to 0}\left(\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \right) \pm \lim_{\lambda \to 0}\left(\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i \right) = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

Замечание. Свойство 4 имеет место для любого конечного числа слагаемых.

3.4 Оценки интегралов. Формула среднего значения

1. Если всюду на отрезке $[a,b]$ функции $f(x) \geq 0$, то

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0 .$$

Доказательство. Так как $f(x) \geq 0$ на всем отрезке $[a,b]$, то $f(\xi_i) \geq 0$ и $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} > 0$, и, следовательно, интегральная сумма $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \geq 0$. Переходя к пределу в данном неравенстве, получаем: $\lim_{\lambda \to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \geq 0$, и, следовательно, $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

2. Если всюду на отрезке $[a,b]$ $f(x) \leq g(x)$, то $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

Доказательство. Применяя к функции $g(x) - f(x) \geq 0$ свойство 1, получаем: $\int_a^b (g(x) - f(x))dx \geq 0$ и, согласно свойству 4, $\int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx \geq 0$. Окончательно $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

3. Для функции $f(x)$, определенной на отрезке $[a,b]$, имеет место неравенство:

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx .$$

Доказательство. Применим вторую оценку для неравенства:

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|.$$

Получаем

$\int\limits_a^b -|f(x)|dx \le \int\limits_a^b f(x)dx \le \int\limits_a^b |f(x)|dx$, и $-\int\limits_a^b |f(x)|dx \le \int\limits_a^b f(x)dx \le \int\limits_a^b |f(x)|dx$. Но полученное неравенство эквивалентно неравенству

$$\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \le \int\limits_a^b |f(x)|dx .$$

4. Если m и M соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, то

$$m(b-a) \le \int\limits_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

Доказательство. По условию $m \le f(x) \le M$. Отсюда, учитывая вторую оценку, получаем $\int\limits_a^b mdx \le \int\limits_a^b f(x)dx \le \int\limits_a^b Mdx$ и по свойству 1 определенного интеграла и результатам примера 1,

$$m\int\limits_a^b dx \le \int\limits_a^b f(x)dx \le M\int\limits_a^b dx \text{ и } m(b-a) \le \int\limits_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

Теорема о среднем

Теорема 3.1. *Если функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a,b]$, *то на этом отрезке существует такая точка с, что*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = f(c)\cdot(b-a).$$

Доказательство. Так как $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то по теореме Вейерштрасса существуют числа m и M такие, что

$$\min_{[a,b]} f(x) = m \le f(x) \le M = \max_{[a,b]} f(x).$$

Тогда, согласно оценке 4 $m(b-a) \le \int\limits_a^b f(x)dx \le M(b-a)$ и, следовательно, $m \le \frac{\int\limits_a^b f(x)dx}{b-a} \le M$. Обозначим $\frac{\int\limits_a^b f(x)dx}{(b-a)} = M_0$.

Так как M_0 заключено между наибольшим и наименьшим значением непрерывной функции на $[a,b]$, то согласно теореме о прохождении непрерывной функции через любое промежуточное значение, существует точка $c \in [a,b]$ такая, что $f(c) = M_0$, т.е.

$$\frac{\int\limits_a^b f(x)dx}{(b-a)} = f(c) \text{ и, следовательно, } \int\limits_a^b f(x)dx = f(c)\cdot(b-a).$$

Величина $f(c)$ называется средним значением функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$.

Замечание. Теорема о среднем имеет ясный геометрический смысл: значение определенного интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ при $f(x) \geq 0$ равно площади прямоугольника, имеющего высоту $f(c)$ и основание $(b-a)$.

3.5 Условия существования определенного интеграла

Теорема 3.2 (необходимое условие интегрируемости функции). *Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, то она ограничена на этом отрезке.*

Замечание. Обратная теорема не верна, т.е. из ограниченности функции не следует ее интегрируемость.

Теорема 3.3 (достаточное условие интегрируемости функции). *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она интегрируема на нем.*

Замечание. Как следует из теоремы, условие непрерывности функции на отрезке $[a,b]$ является достаточным условием ее интегрируемости, однако это не означает, что определенный интеграл существует только для непрерывных функций. Класс интегрируемых функций гораздо шире. Например, можно доказать, что существует определенный интеграл от функций, имеющих конечное число точек разрыва.

3.6 Определенный интеграл с переменным верхним пределом

Пусть задан $\int\limits_a^b f(x)dx$. Будем изменять верхний предел интегрирования, не выходя за пределы промежутка $[a,b]$. Значение интеграла при этом будет меняться, т.е. интеграл с переменным верхним пределом представляет собой функцию верхнего предела.

Обозначим эту функцию через $\Phi(x)$

$$\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)dt \quad (a \leq x \leq b)$$

и назовем ее интегралом с переменным верхним пределом. Следующая теорема является основной теоремой дифференциального и интегрального исчисления, устанавливающая связь между производной и интегралом.

Теорема 3.4. *Производная интеграла от непрерывной функции по переменному верхнему пределу существует и равна значению подынтегральной функции в точке, равной верхнему пределу, т.е.*

$$\Phi'(x)=\left(\int_a^x f(t)dt\right)'=f(x).$$

Доказательство. Возьмем любое $x\in[a,b]$ и придадим приращение $\Delta x\neq 0$ такое, чтобы $x+\Delta x\in[a,b]$, и найдем значение $\Phi(x)$ в этой точке

$$\Phi(x+\Delta x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt .$$

Согласно свойству 2 определенного интеграла

$$\Phi(x+\Delta x)=\int_a^x f(t)dt+\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt=\Phi(x)+\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$$

приращение функции $\Phi(x)$ будет равно $\Delta\Phi(x)=\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$. Применим к интегралу $\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$ теорему о среднем

$$\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt=f(c)\Delta x, \text{ где } c\in[x,x+\Delta x].$$

Следовательно, $\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=f(c)\Delta x$.

Разделим это равенство на Δx и найдем предел при $\Delta x\to 0$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0} f(c).$$

Если $\Delta x\to 0$, то $c\to x$, т.к. $c\in[x,x+\Delta x]$ и в силу непрерывности функции $f(x)$, $f(c)\to f(x)$. Окончательно получаем $\Phi'(x)=f(x)$, что и следовало доказать.

Таким образом, установлено, что всякая непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция $f(x)$ имеет первообразную $\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$. А так как всякая другая первообразная может отличаться от $\Phi(x)$ только на постоянную, то теорема устанавливает также связь между неопределенным и определенным интегралом

$$\int f(x)dx=\int_a^x f(t)dt+C.$$

3.7 Формула Ньютона-Лейбница

Теорема 3.5 (основная теорема интегрального исчисления). *Пусть функция* $f(x)$ *непрерывна на* $[a,b]$. *Тогда если* $F(x)$ *является первообразной для* $f(x)$ *на этом отрезке, то справедлива следующая формула:*

$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$, *которая называется формулой Ньютона-Лейбница.*

Доказательство. Пусть $F(x)$ – некоторая первообразная для $f(x)$ на $[a,b]$. Согласно теореме 4 $\Phi(x)=\int\limits_a^x f(t)dt$ – также является первообразной для $f(x)$ на $[a,b]$. Так как любые первообразные могут отличаться только на постоянную, получаем:

$\int\limits_a^x f(t)dt = F(x)+C$, где C – некоторое число.

Подставим в это равенство $x=a$ и получаем $\int\limits_a^a f(t)dt = F(a)+C$, но так как согласно свойству 1 определенного интеграла $\int\limits_a^a f(t)dt = 0$, то $F(a)+C=0$ и $F(a)=-C$. Т.е. $\int\limits_a^x f(t)dt = F(x)-F(a)$. Подставляя в это равенство $x=b$, получаем $\int\limits_a^b f(t)dt = F(b)-F(a)$, что и следовало доказать.

Замечание 1. Разность $F(b)-F(a)$ принято условно записывать в виде: $F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^b$.

Замечание 2. Полученная формула, с одной стороны, устанавливает связь между определенным и неопределенным интегралом, а с другой стороны, дает простой метод вычисления определенного интеграла, кроме вычисления с помощью предела интегральной суммы.

Пример 3.2. $\int\limits_0^{\pi}\cos x dx$. Так как одной из первообразных $\cos x$ является $\sin x$, то применяя формулу Ньютона-Лейбница, получаем:

$$\int\limits_0^{\pi/2}\cos x dx = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)-\sin(0)=1.$$

Пример 3.3. $\int\limits_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3}$.

3.8 Замена переменной в определенном интеграле

Теорема 3.6. *Пусть функция* $f(x)$ *непрерывна на* $[a,b]$. *Тогда если:* ***1)*** *функция* $x=\varphi(t)$ *дифференцируема на* $[\alpha,\beta]$ *и* $\varphi'(t)$ *непрерывна на* $[\alpha,\beta]$; ***2)*** *множеством значений функции* $x=\varphi(t)$ *является отрезок* $[a,b]$; ***3)*** $\varphi(\alpha)=a$ *и* $\varphi(\beta)=b$, *то справедлива формула:*

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Доказательство. Пусть $F(x)$ есть первообразная для $f(x)$ на $[a,b]$. Тогда по формуле Ньютона-Лейбница $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$. Функция $F(\varphi(t))$ является первообразной для функции $f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t), t\in[\alpha,\beta]$, т.к. по правилу нахождения производной сложной функции $F'(x)=F'(\varphi(t))=f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$. Следовательно

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt=F(\varphi(t))\Big|_\alpha^\beta=F(\varphi(\beta))-F(\varphi(\alpha))=F(a)-F(b)=\int_a^b f(x)dx.$$

Пример 3.4. Вычислить $\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$.

Решение. Выполним подстановку $x=\sin t,\ 0\le t\le\frac{\pi}{2}$. Эта замена удовлетворяет всем условиям теоремы 6, т.к. **1)** $f(x)=x^2\sqrt{1-x^2}$ является непрерывной на $[0,1]$; **2)** $x=\sin t$ дифференцируема на $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ и $x'=(\sin t)'=\cos t$ непрерывна на $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$; **3)** множеством значений функции $x=\sin t$ является отрезок $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ и $\varphi(0)=0,\ \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$. Поэтому

$$\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx=\int_0^{\pi/2}\sin^2 t\sqrt{1-\sin^2 t}\cdot\cos t dt=\int_0^{\pi/2}\sin^2 t\cdot\cos^2 t dt=\frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}\sin^2 2t dt=$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos 4t}{2}dt=\frac{1}{8}\left(\int_0^{\pi/2}dt-\int_0^{\pi/2}\cos 4t dt\right)=\frac{1}{8}\left(t-\frac{1}{4}\sin 4t\right)\Bigg|_0^{\pi/2}=\frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{16}.$$

3.9 Формула интегрирования по частям в определенном интеграле

Теорема 3.7. *Если функции* $u(x)$ *и* $v(x)$ *непрерывны вместе со своими производными* $u'(x)$ *и* $v'(x)$ *на отрезке* $[a,b]$, *то справедлива формула:*

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu .$$

Доказательство. Функция $u'v+uv'$ является первообразной для функции $u\cdot v$, так как $(u\cdot v)' = u'v+uv''$ и является непрерывной. Следовательно, по формуле Ньютона-Лейбница получаем $\int_a^b (u'v+uv')dx = u\cdot v\Big|_a^b$. Отсюда согласно свойству 4 определенного интеграла $\int_a^b u'vdx + \int_a^b uv'dx = u\cdot v\Big|_a^b$ и окончательно $\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$.

Пример 3.5. Вычислить интеграл $\int_0^1 xe^x dx$.

Решение. Положим $u = x,\ dv = e^x dx$, отсюда $v = e^x, du = dx$.

$$\int_0^1 xe^x dx = xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - e^x\Big|_0^1 = e - e + 1 = 1.$$

3.10 Несобственные интегралы

При введении понятия определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx$ предполагалось, что промежуток интегрирования $[a,b]$ конечен, а функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$. Если эти условия нарушаются, вводится понятие несобственного интеграла.

3.10.1 Несобственный интеграл I рода (интеграл с бесконечным промежутком интегрирования)

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,+\infty]$. Если существует конечный предел $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$, то его называют несобственным интегралом первого рода и обозначают $\int_a^\infty f(x)dx$. В этом случае *интеграл называется сходящимся*. Если же указанный предел не существует или бесконечен, то говорят что *интеграл* $\int_a^\infty f(x)dx$ *расходится*.

Аналогично определяется несобственный интеграл на промежутке $[-\infty, b]$:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx.$$

Несобственный интеграл с двумя бесконечными пределами определяется формулой:

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx$, где c – произвольное число.

В это м случае интеграл слева сходится лишь тогда, когда сходятся оба интеграла справа.

Пример 3.6. Вычислить несобственные интегралы: $\int_{1}^{\infty}\frac{1}{x^3}dx$, $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$, $\int_{0}^{\infty}\cos x dx$.

1) $\int_{1}^{\infty}\frac{1}{x^3}dx = \lim_{b\to+\infty}\int_{1}^{b} x^{-3}dx = \lim_{b\to+\infty}\frac{x^{-2}}{-2} = -\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{x^2}\Big|_1^b = -\frac{1}{2}(0-1) = \frac{1}{2}$, интеграл сходится. Отметим, что на промежутке $[1, b]$ функция $\frac{1}{x^3}$ является непрерывной.

2) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2} + \int_{0}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to-\infty}\int_{b}^{0}\frac{dx}{1+x^2} + \lim_{a\to+\infty}\int_{0}^{a}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to-\infty}\operatorname{arctg} x\Big|_b^0 +$

$+\lim_{a\to+\infty}\operatorname{arctg} x\Big|_0^a = \lim_{b\to-\infty}(\operatorname{arctg} 0 - \operatorname{arctg} b) + \lim_{a\to+\infty}(\operatorname{arctg} a - \operatorname{arctg} 0) = \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2} = \pi$, интеграл сходится.

3) $\int_{0}^{\infty}\cos x dx = \lim_{a\to+\infty}\int_{0}^{a}\cos x dx = \lim_{a\to\infty}\left(\sin x\Big|_0^a\right) = \lim_{a\to\infty}(\sin a - 0) = \lim_{a\to\infty}\sin a$.

Так как полученный предел не существует, исходный интеграл расходится.

В некоторых задачах нет необходимости вычислять интеграл, достаточно установить сходится он или нет. В этом случае применяют признаки сходимости:

Теорема 3.8. *Если на промежутке* $[a, +\infty]$ *непрерывные функции* $f(x)$ *и* $\varphi(x)$ *удовлетворяют условию:* $0 \le f(x) \le \varphi(x)$, *то из сходимости интеграла* $\int_{0}^{+\infty}\varphi(x)dx$ *следует сходимость интеграла* $\int_{0}^{+\infty} f(x)dx$, *а из расходимости интеграла* $\int_{0}^{+\infty} f(x)dx$ *следует расходимость интеграла* $\int_{0}^{+\infty}\varphi(x)dx$.

Пример 3.7. Исследовать сходимость интеграла $\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^3(1+2^x)}$.

Решение. При $x \geq 1$ выполняется неравенство $\frac{1}{x^3\left(1+2^x\right)} \leq \frac{1}{x^3}$. Но интеграл $\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x^3}$ сходится (см. пример 3.6). Следовательно, и $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^3\left(1+2^x\right)}$ также сходится.

Теорема 3.9. *Если на промежутке* $[a,+\infty]$ *непрерывные функции* $f(x)>0$ *и* $\varphi(x)>0$ *и существует конечный предел* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = k \neq 0$ *, то интегралы* $\int\limits_0^{+\infty} f(x)dx$ *и* $\int\limits_0^{+\infty} \varphi(x)dx$ *сходятся или расходятся одновременно.*

Пример 3.8. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^3+x+1}$.

Решение. При $x \geq 1$ функции $f(x) = \frac{1}{x^3+x+1} > 0$ и $\varphi(x) = \frac{1}{x^3} > 0$. Так как $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^3+x+1} = 1$, то $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^3+x+1}$ и $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^3}$ ведут себя одинаково, а т.к. $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^3}$ сходится (см. пример 6), то и $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^3+x+1}$ – сходится.

3.10.2 Несобственный интеграл II рода (интеграл от разрывной функции)

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a,b]$ и $\lim\limits_{x\to b} f(x) = \infty$. Если существует конечный предел $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$, то его называют несобственным интегралом второго рода и обозначают $\int\limits_a^{b} f(x)dx$. В этом случае говорят, что интеграл сходится. Если предел не существует или равен бесконечности, то говорят, что интеграл расходится. Аналогично, если функция $f(x)$ терпит бесконечный разрыв в точке $x=0$, то полагают

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx.$$

Если функция $f(x)$ терпит бесконечный разрыв во внутренней точке C промежутка $[a,b]$, то несобственный интеграл второго рода определяется формулой

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx.$$

В этом случае интеграл слева называют сходящимся, если оба несобственных интеграла, стоящих справа, сходятся.

Пример 3.9. Исследовать сходимость интегралов $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2}$, $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $\int\limits_2^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{(3-x)^2}}$.

Решение.

1) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{0+\varepsilon}^1 \frac{dx}{x^2} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{0+\varepsilon}^1 x^{-2}dx = -\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{x}\Big|_{\varepsilon}^{1} = -\left(1-\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\right) = \infty$. Следовательно, интеграл расходится.

2) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int\limits_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \arcsin x\Big|_0^{1-\varepsilon} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}(\arcsin(1-\varepsilon)-\arcsin 0) = \frac{\pi}{2}$ –интеграл сходится.

3) $\int\limits_2^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{(3-x)^2}} = \int\limits_2^3 (3-x)^{-2/3}dx + \int\limits_3^4 (3-x)^{-2/3}dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_2^{3-\varepsilon}(3-x)^{-2/3}dx + \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{3+\varepsilon}^4 (3-x)^{-2/3}dx =$

$= -3\lim\limits_{\varepsilon\to 0}(3-x)^{1/3}\Big|_2^{3-\varepsilon} - 3\lim\limits_{\varepsilon\to 0}(3-x)^{1/3}\Big|_{3+\varepsilon}^4 = -3\left(\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left(\varepsilon^{1/3}-1\right) + \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left((-1)^{1/3}-(-\varepsilon)^{1/3}\right)\right) =$

$= -3(-1-1) = 6$ – интеграл сходится.

Сформулируем признаки сходимости для несобственных интегралов второго рода.

Теорема 3.10. *Пусть на промежутке* $[a,b]$ *функции* $f(x)$ *и* $\varphi(x)$ *непрерывны, при* $x=b$ *терпят бесконечный разрыв и удовлетворяют условию:* $0 \le f(x) \le \varphi(x)$. *Тогда из сходимости интеграла* $\int\limits_a^b \varphi(x)dx$ *следует сходимость интеграла* $\int\limits_a^b f(x)dx$, *а из расходимости интеграла* $\int\limits_a^b f(x)dx$ *следует расходимость интеграл а* $\int\limits_a^b \varphi(x)dx$.

Теорема 3.11. *Пусть на промежутке* $[a,b]$ *функции* $f(x)$ *и* $\varphi(x)$ *непрерывны и в точке* $x=b$ *терпят бесконечный разрыв. Если существует конечный предел* $\lim\limits_{x\to b}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = k,\ 0<k<\infty$, *то интегралы* $\int\limits_a^b f(x)dx$ *и* $\int\limits_a^b \varphi(x)dx$ *сходятся или расходятся одновременно.*

Пример 3.10. Исследовать на сходимость интегралы $\int\limits_0^1 \frac{e^{1/x}}{x^2}$, $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sin x}$.

Решение.

1) Функции $e^{1/x}$ и x^2 терпят разрыв в точке $x=0$. Справедливо неравенство $\frac{e^{1/x}}{x^2} \geq \frac{1}{x^2}$. Но так как $\int\limits_0^1 \frac{1}{x^2}dx$ расходится (см. пример 3.9), то следовательно, $\int\limits_0^1 \frac{e^{1/x}}{x^2}dx$ также расходится.

2) Рассмотрим две функции $\frac{1}{\sin x}$ и $\frac{1}{x}$, которые терпят разрыв в точке $x=0$. Так как $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sin x}}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = 1$, то интегралы $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sin x}dx$ и $\int\limits_0^1 \frac{1}{x}dx$ ведут себя одинаково. Исследуем сходимость интеграла $\int\limits_0^1 \frac{1}{x}dx$.

$\int\limits_0^1 \frac{1}{x}dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{0+\varepsilon}^1 \frac{1}{x}dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left(\ln(x)\Big|_{\varepsilon}^{1}\right) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}(0-\ln\varepsilon) = \infty$ – расходится. Следовательно, и $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sin x}dx$ также расходится.

3.11 Геометрические и механические приложения определенного интеграла

3.11.1 Вычисление площадей в прямоугольных координатах

Если на отрезке $[a,b]$ функция $f(x)\geq 0$, то, как известно, *площадь криволинейной трапеции*, ограниченной кривой $y=f(x)$, осью Ox и прямыми $x=a$ и $x=b$, равна

$$Q=\int\limits_a^b f(x)dx. \qquad (1)$$

Если $f(x)\leq 0$ на $[a,b]$, то определенный интеграл также $\int\limits_a^b f(x)dx \leq 0$. По абсолютной величине он равен площади Q соответствующей криволинейной трапеции: $-Q=\int\limits_a^b f(x)dx$.

Если $f(x)$ конечное число раз меняет знак на отрезке $[a,b]$, то интеграл по всему отрезку $[a,b]$ разбиваем на сумму интегралов по частичным отрезкам.

Интеграл будет положителен на тех отрезках, где $f(x)\geq 0$, и отрицателен там, где $f(x)\leq 0$. Интеграл по всему отрезку даст соответствующую алгебраическую сумму площадей, лежащих выше и ниже оси Ox (рис. 1). Для того чтобы получить сумму площадей в обычном смысле, нужно найти сумму абсолютных величин интегралов по указанным выше отрезкам или вычислить интеграл $Q = \int_a^b |f(x)| dx$.

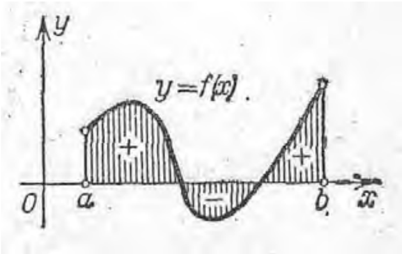


Рисунок 1

Пример 1. Вычислить площадь Q фигуры, ограниченной синусоидой $\sin x$ и осью Ox, при $0 \le x \le 2\pi$ (рис. 2).

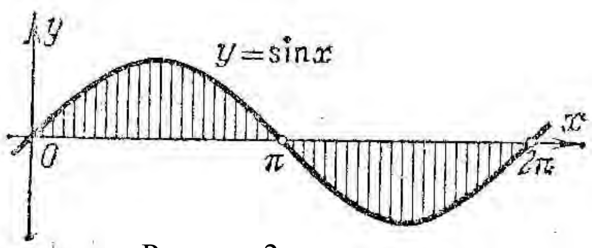


Рисунок 2

Решение. Так как $\sin x \ge 0$ при $0 \le x \le 2\pi$ и $\sin x \le 0$ при $\pi < x \le 2\pi$, то

$$Q = \int_0^{\pi} \sin x dx + \left| \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx \right| = \int_0^{2\pi} |\sin x| dx, \int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = -(\cos \pi - \cos 0) = -(-1-1) = 2,$$

$$\int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_{\pi}^{2\pi} = -(\cos 2\pi - \cos \pi) = -2.$$

Следовательно, $Q = 2 + |-2| = 4$.

Если нужно вычислить площадь области, ограниченной кривыми $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ и ординатами $x = a, x = b$, то при условии $f_1(x) \ge f_2(x)$ будем иметь (рис. 3)

$$Q = \int_a^b f_1(x) dx - \int_a^b f_2(x) dx = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x)) dx. \tag{2}$$

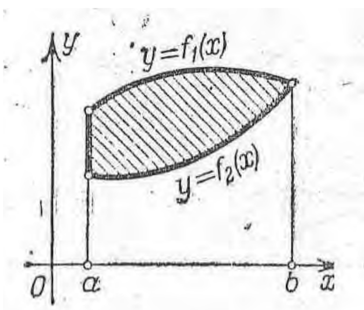


Рисунок 3

Пример 2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = \sqrt{x}$ и $y = x^2$ (рис. 4).

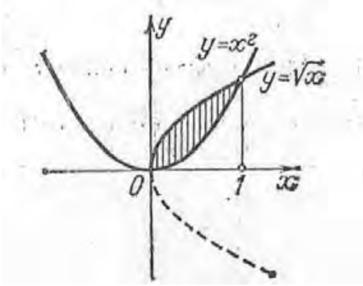


Рисунок 4

Решение. Находим точки пересечения кривых: $\sqrt{x} = x^2, x = x^4$, откуда $x_1 = 0, x_2 = 1$. Следовательно,

$$Q = \int_0^1 \sqrt{x}\,dx - \int_0^1 x^2 dx = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right) dx = \frac{2}{3} x^{3/2}\Big|_0^1 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = -\frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Вычислим теперь *площадь криволинейной трапеции* в случае, если *кривая задана уравнениями в параметрической форме* (рис. 5)

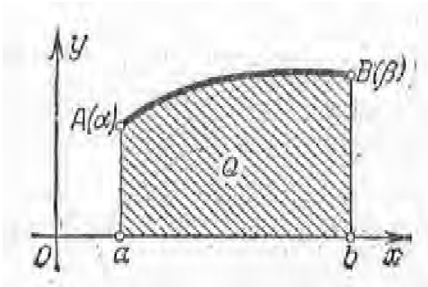


Рисунок 5

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \tag{3}$$

где $\alpha \le t \le \beta$ и $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$. Пусть уравнения (3) определяют некоторую функцию $y = f(x)$ на отрезке $[a,b]$, и, следовательно, площадь криволинейной трапеции может быть вычислена по формуле

$$Q = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b y dx.$$

Сделаем замену переменной в этом интеграле: $x = \varphi(t), dx = \varphi'(t)dt$. На основании уравнений (2.3) получим $y = f(\varphi(t)) = \psi(t)$. Следовательно,

$$Q = \int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)dt. \tag{4}$$

Это и есть формула для вычисления площади криволинейной трапеции в случае кривой, заданной параметрически.

Пример 3. Вычислить площадь области, ограниченной эллипсом

$x = a\cos t, \quad y = b\sin t.$

Решение. Вычислим площадь верхней половины эллипса и удвоим. Здесь x изменяется от $-a$ до $+a$, следовательно, t изменяется от π до 0,

$$Q = 2\int_{\pi}^{0} (b\sin t)(-a\sin t dt) = -2ab\int_{\pi}^{0} \sin^2 t dt = 2ab\int_{0}^{\pi} \sin^2 t dt =$$

$$= 2ab\int_{0}^{\pi} \frac{1-\cos 2t}{2} dt = 2ab\left(\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4}\right)\Bigg|_{0}^{\pi} = \pi ab.$$

Пример 4. Вычислить площадь области, ограниченной осью Ox и одной аркой циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

Решение. Изменению t от 0 до 2π соответствует изменение x от 0 до 2πa.

По формуле (4) имеем

$$Q = \int_{0}^{2\pi} a(1-\cos t)a(1-\cos t)dt = a^2 \int_{0}^{2\pi} (1-\cos t)^2 dt = a^2\left(\int_{0}^{2\pi} dt - 2\int_{0}^{2\pi} \cos t dt + \int_{0}^{2\pi} \cos^2 t dt \right),$$

$$\int_{0}^{2\pi} dt = 2\pi, \quad \int_{0}^{2\pi} \cos t dt = 0, \quad \int_{0}^{2\pi} \cos^2 t dt = \int_{0}^{2\pi} \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \pi.$$

Окончательно получаем $Q = a^2(2\pi + \pi) = 3\pi a^2$.

3.11.2 Площадь криволинейного сектора в полярных координатах

Пусть в полярной системе координат имеем кривую, заданную уравнением $\rho = f(\theta)$, где $f(\theta)$ – непрерывная функция при $\alpha \le \theta \le \beta$.

Определим площадь сектора *OAB*, ограниченного кривой $\rho = f(\theta)$ и радиус-векторами $\theta = \alpha$ и $\theta = \beta$.

Разобьем данную область радиус-векторами $\alpha = \theta_0, \theta = \theta_1, \ldots, \theta_n = \beta$ на n частей. Обозначим через $\Delta\theta_1, \Delta\theta_2, \ldots, \Delta\theta_n$ углы между проведенными радиус-векторами (рис. 6).

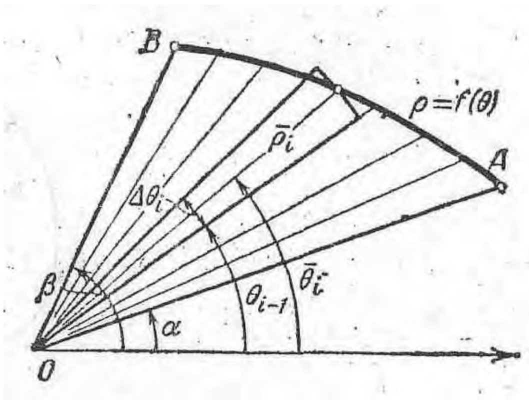


Рисунок 6

Обозначим через $\bar{\rho}_i$ длину радиус-вектора, соответствующего какому-нибудь углу $\bar{\theta}_i$, заключенному между θ_{i-1} и θ_i.

Рассмотрим круговой сектор с радиусом $\overline{\rho}_i$ и центральным углом $\Delta\theta_i$. Его площадь будет равна $\Delta Q_i = \frac{1}{2}\overline{\rho}_i^2\Delta\theta_i$. Сумма $Q_n = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\overline{\rho}_i^2\Delta\theta_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(f\left(\overline{\theta}_i\right)\right)^2\Delta\theta_i$ даст площадь «ступенчатого» сектора.

Так как эта сумма является интегральной суммой для функции $\rho^2 = \left(f(\theta)\right)^2$ на отрезке $\alpha \le \theta \le \beta$, то ее предел при $\max\Delta\theta_i \to 0$ есть определенный интеграл $\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2 d\theta$. Он не зависит от того, какой радиус-вектор $\overline{\rho}_i$ мы возьмем внутри угла $\Delta\theta_i$. Этот предел естественно считать искомой площадью фигуры. Можно было бы показать, что это определение площади не противоречит данному ранее; иначе говоря, если вычислять площадь криволинейного сектора с помощью криволинейных трапеций, то мы получим тот же результат. Таким образом, площадь сектора *OAB* равна

$$Q = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2 d\theta, \tag{5}$$

или

$$Q = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\left(f(\theta)\right)^2 d\theta. \tag{6}$$

Пример 5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной лемнискатой $\rho = a\sqrt{\cos 2\theta}$ (рис. 7).

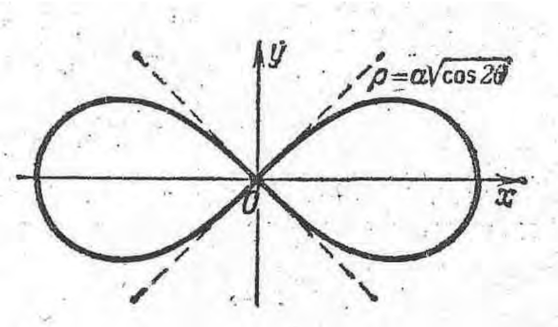


Рисунок 7

Решение. Радиус-вектор опишет область с площадью, равной четверти искомой площади, если θ меняется от 0 до π/4.

$$\frac{1}{4}Q = \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi/4}\rho^2 d\theta = \frac{1}{2}a^2\int_{0}^{\pi/4}\cos 2\theta d\theta = \frac{a^2}{2}\cdot\left.\frac{\sin 2\theta}{2}\right|_{0}^{\pi/4} = \frac{a^2}{4}.$$

Таким образом, площадь фигуры, ограниченной лемнискатой, будет равна $Q = a^2$.

3.11.3 Длина дуги кривой

1) ***Длина дуги кривой в прямоугольных координатах***

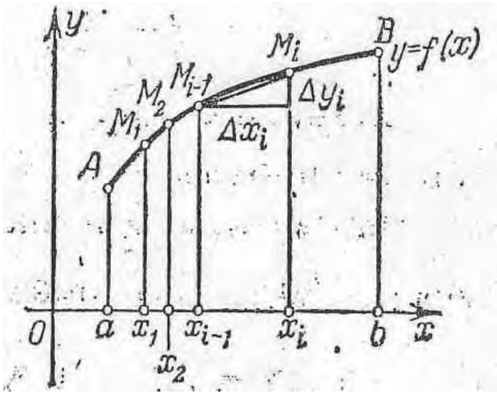


Рисунок 8

Пусть в прямоугольных координатах на плоскости дана кривая уравнением $y = f(x)$. Найдем длину дуги AB этой, кривой, заключенной между вертикальными прямыми $x = a$ и $x = b$ (рис. 8).

Определение. Возьмем на дуге AB точки $A, M_1, M_2, \ldots, M_i, \ldots, B$ с абсциссами $a = x_0, x_1, x_2, \ldots x_i, \ldots x_n = b$ и проведем хорды $AM_1, M_1M_2, \ldots, M_{n-1}B$, длины которых обозначим соответственно через $\Delta s_1, \Delta s_2, \ldots, \Delta s_n$. Тогда получим ломаную $AM_1M_2 \ldots M_{n-1}B$, вписанную в дугу $\breve{AB}$. Длина ломаной равна $s_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta s_i$.

Длиной s дуги AB называется тот предел, к которому стремится длина вписанной ломаной, когда длина ее наибольшего звена стремится к нулю:

$$s = \lim_{\max \Delta s_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta s_i . \qquad (7)$$

Мы докажем сейчас, что если на отрезке $a \le x \le b$ функция $f(x)$ и ее производная $f'(x)$ непрерывна, то этот предел существует. Вместе с тем будет дан и способ вычисления длины дуги.

Введем обозначение $\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$. Тогда

$$\Delta s_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \Delta x_i .$$

По теореме Лагранжа имеем $\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_i) - (x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(\xi_i)$, где $x_{i-1} < \xi_i < x_i$. Следовательно, $\Delta s_i = \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \Delta x_i$.

Таким образом, длина вписаной ломаной равна

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \Delta x_i .$$

По условию, $f'(x)$ непрерывна, следовательно, функция $\sqrt{1+\left(f'(\xi_i)\right)^2}_{\,i}$ тоже непрерывна. Поэтому существует предел написанной интегральной суммы, который равен определенному интегралу:

$s=\lim\limits_{\max\Delta x_i\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{1+\left(f'(\xi_i)\right)^2}\,\Delta x_i=\int\limits_a^b\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$. Итак, получили формулу для вычисления длины дуги:

$$s=\int\limits_a^b\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx=\int\limits_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx. \tag{8}$$

Замечание 1. Исходя из последней формулы, можно получить производную от длины дуги по абсциссе. Если верхний предел интегрирования будем считать переменным и обозначим через x (переменную интегрирования менять не будем), то длина дуги s будет функцией от x: $s(x)=\int\limits_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$. Дифференцируя этот интеграл по верхнему пределу, получим

$$\frac{ds}{dx}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,. \tag{9}$$

Пример 6. Определить длину окружности $x^2+y^2=r^2$.

Решение. Вычислим сначала длину четвертой части окружности, лежащей в первом квадранте. Тогда уравнение дуги *AB* будет $y=\sqrt{r^2-x^2}$, откуда $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}$.

Следовательно, $\frac{1}{4}s=\int\limits_0^r\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\,dx=\int\limits_0^r\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}\,dx=r\arcsin\frac{x}{r}\Big|_0^r=r\frac{\pi}{2}$. Длина всей окружности $s=2\pi r$. Найдем теперь *длину дуги кривой* в том случае, когда *уравнение кривой задано в параметрической форме*:

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),\quad \alpha\le t\le\beta, \tag{10}$$

где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ – непрерывные функции с непрерывными производными, причем $\varphi'(t)$ на заданном участке не обращается в нуль. В этом случае уравнения (10) определяют некоторую функцию $y=f(x)$, непрерывную и имеющую непрерывную производную $\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$.

Пусть $a=\varphi(\alpha),\ b=\varphi(\beta)$. Тогда, сделав в интеграле (8) подстановку $x=\varphi(t),\quad dx=\varphi'(t)dt$, получим

$$s=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)^2}\varphi'(t)dt\text{, или } s=\int_a^b\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\,dt. \tag{11}$$

Замечание 2. Можно доказать, что формула (11) остается в силе и для таких кривых, которые пересекаются вертикальными прямыми более чем в одной точке (в частности, для замкнутых кривых), лишь бы во всех точках кривой были непрерывны обе производные $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$.

Пример 7. Вычислить длину астроиды $x=a\cos^3 t,\ y=a\sin^3 t$.

Решение. Так как кривая симметрична относительно обеих координатных осей, то вычислим сначала длину ее четвертой части, расположенной в первом квадранте. Находим $\dfrac{dx}{dt}=-3a\cos^2 t\sin t,\ \dfrac{dy}{dt}=3a\sin^2 t\cos t$. Параметр t будет изменяться от 0 до $\pi/2$. Следовательно,

$$\frac{1}{4}s=\int_0^{\pi/2}\sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t+9a^2\sin^4 t\cos^2 t}\,dt=$$

$$=3a\int_0^{\pi/2}\sqrt{\cos^2 t\sin^2 t}\,dt=3a\int_0^{\pi/2}\sin t\cos t dt=3a\left.\frac{\sin^2 t}{2}\right|_0^{\pi/2}=\frac{3a}{2};\quad s=6a.$$

Замечание 3. Если задана *пространственная* кривая параметрическими уравнениями

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),\quad z=\chi(t), \tag{12}$$

где $\alpha\le t\le\beta$, то длина ее дуги определяется (так же как и для плоской дуги) как предел, к которому стремится длина вписанной ломаной, когда длина наибольшего звена стремится к нулю. Если функции $\varphi(t), \psi(t)$ и $\chi(t)$ непрерывны и имеют непрерывные производные на отрезке $[\alpha,\beta]$, то кривая имеет определенную длину (т. е. для нее существует вышеуказанный предел), которая вычисляется по формуле

$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2+(\chi'(t))^2}\,dt. \tag{13}$$

Пример 8. Вычислить длину дуги винтовой линии $x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ z=amt$ при изменении t от 0 до 2π.

Решение. Из данных уравнений находим $dx=-a\sin tdt,\ dy=a\cos tdt,\ dz=amdt$. Подставляя в формулу (13), получим

$$s=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t+a^2m^2}\,dt=a\int_0^{2\pi}\sqrt{1+m^2}\,dt=2\pi a\sqrt{1+m^2}.$$

2) ***Длина дуги кривой в полярных координатах***

Пусть в полярных координатах задано уравнение кривой

$$\rho = f(\theta). \qquad (14)$$

где ρ – полярный радиус, θ – полярный угол.

Напишем формулы перехода от полярных координат к декартовым: $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$. Если сюда вместо ρ подставим его выражение (14) через θ, то получим уравнения $x = f(\theta)\cos\theta,\ y = f(\theta)\sin\theta$. Эти уравнения можно рассматривать как параметрические уравнения кривой и для вычисления длины дуги применить формулу (11). Для этого найдем производные от x и y по параметру θ:

$$\frac{dx}{d\theta} = f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta.$$

Тогда

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = (f'(\theta))^2 + (f(\theta))^2 = \rho'^2 + \rho^2.$$

Следовательно,

$$s = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{\rho'^2 + \rho^2}\, d\theta.$$

Пример 9. Найти длину кардиоиды $\rho = a(1 + \cos\theta)$ (рис. 9).

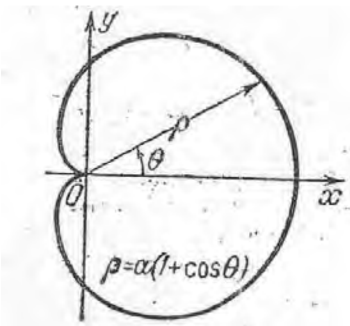


Рисунок 9

Изменяя полярный угол θ от 0 до π, получим половину искомой длины. Здесь $\rho' = -a\sin\theta$. Следовательно,

$$s = 2\int_0^{\pi} \sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2 + a^2\sin^2\theta}\, d\theta = 2a\int_0^{\pi} \sqrt{2 + 2\cos\theta}\, d\theta = 4a\int_0^{\pi} \cos\frac{\theta}{2}\, d\theta = 8a\sin\frac{\theta}{2}\Big|_0^{\pi} = 8a.$$

Пример 10. Вычислить длину эллипса $x = a\cos t,\ y = b\sin t,\ 0 \le t \le 2\pi$, предполагая, что $a > b$.

Решение. Для вычисления воспользуемся формулой (11). Вычислим сначала 1/4 длины дуги, т. е. длину дуги, соответствующей изменению параметра от $t = 0$ до $t = \pi/2$:

$$\frac{s}{4}=\int_0^{\pi/2}\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,dt=\int_0^{\pi/2}\sqrt{a^2\left(1-\cos^2 t\right)+b^2\cos^2 t}\,dt=$$

$$=\int_0^{\pi/2}\sqrt{a^2-\left(a^2-b^2\right)\cos^2 t}\,dt=a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\frac{a^2-b^2}{a^2}\cos^2 t}\,dt=a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\cos^2 t}\,dt,$$

где $k=\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}<1$. Следовательно, $s=4a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\cos^2 t}\,dt$. Остается только вычислить последний интеграл. Но он не выражается в элементарных функциях. Этот интеграл можно вычислить только приближенными методами (например, по формуле Симпсона).

В частности, если большая полуось эллипса равна 5, а малая равна 4, то $k=3/5$, и длина эллипса равна $s=4\cdot 5\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2\cos^2 t}\,dt$. Вычисляя последний интеграл по формуле Симпсона (деля отрезок $[0,\pi/2]$ на четыре части), получим приближенное значение интеграла: $\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\frac{3}{5}\cos^2 t}\,dt\approx 1{,}298$, и, следовательно, длина дуги всего эллипса приближенно равна $s\approx 25{,}96$ единицы длины.

3.11.4 Вычисление о ых сечений

Пусть имеем некото а площадь любого сечения этого тела плоскостью, пер площадь будет зависеть от положения секущей плоско

$Q=Q(x)$.

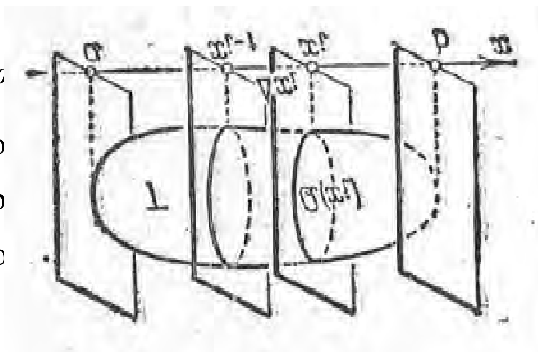


Рисунок 10

Предположим, что $Q(x)$ есть непрерывная функция от x, и определим объем данного тела. Проведем плоскости $x=x_0=a,\ x=x_1,\ x=x_2,\ \ldots,\ x=x_n=b$.

Эти плоскости разобьют тело на слои.

В каждом частичном промежутке $x_{i-1}\le x\le x_i$ выберем произвольную точку ξ_i и для каждого значения $i=1,2,\ldots,n$ построим цилиндрическое тело, образующая которого параллельна оси Ox, а направляющая представляет собой контур сечения тела T плоскостью $x=\xi_i$. Объем такого элементарного цилиндра с площадью основания $Q(\xi_i)$, $x_{i-1}\le\xi_i\le x_i$ и высотой Δx_i равен $Q(\xi_i)\Delta x_i$. Объем всех цилиндров будет $v_n=\sum\limits_{i=1}^{n}Q(\xi_i)\Delta x_i$.

Предел этой суммы при $\max x_i\to 0$ (если он существует) называется объемом данного тела:

$$v=\lim_{\max x_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}Q(\xi_i)\Delta x_i .$$

Так как v_n представляет собой, очевидно, интегральную сумму для непрерывной функции $Q(x)$ на отрез[illegible]т и выражается определенным интегралом:

$$v=\int_a^b Q(x)dx . \tag{15}$$

Пример 11. Выч[illegible] $+\frac{z^2}{c^2}=1$ (рис. 11).

Рисунок 11

Решение. В сечении эллипсоида плоскостью, параллельной плоскости Oyz и отстоящей на расстоянии x от нее, получится эллипс $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{x^2}{a^2}$,

$$\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)^2}+\frac{z^2}{\left(c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)^2}=1$$ с полуосями $b_1=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$, $c_1=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$. Но площадь такого эллипса равняется $\pi b_1 c_1$ (см. пример 3). Поэтому $Q(x)=\pi b_i c_i\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$.

Объем эллипсоида будет равен

$$v = \pi bc \int_{-a}^{a} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \pi bc \left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right)\Bigg|_{-a}^{a} = \frac{4}{3}\pi abc.$$

В частности, если $a = b = c$, эллипсоид превращается в шар, и в этом случае получаем

$$v = \frac{4}{3}\pi a^3.$$

3.11.5 Объем тела вращения

Рассмотрим тело, образованное вращением вокруг оси *Ox* криволинейной трапеции *aABb*, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью *Ox* и прямыми $x = a, x = b$.

В этом случае произвольное сечение тела плоскостью, перпендикулярной к оси абсцисс, есть круг, площадь которого $Q = \pi y^2 = \pi(f(x))^2$.

Применяя общую формулу для вычисления объема, по ния объема *тела вращения*:

$$v = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx.$$

Пример 12. Найти объем тела, образуемого $y = \frac{a}{2}\left(e^{x/a} + e^{-x/a}\right)$ вокруг оси *Ox* на участке от $x = 0$ до $x = b$ (

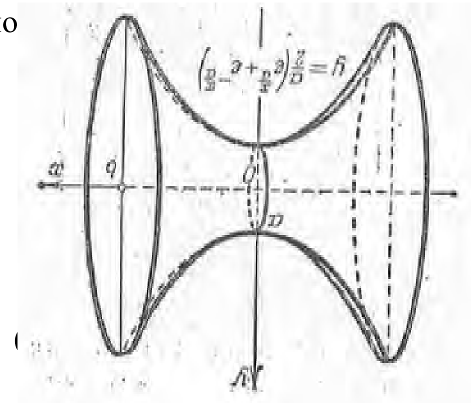


Рисунок 12

Решение. $v = \pi \frac{a^2}{4} \int_0^b \left(e^{x/a} + e^{-x/a}\right)^2 dx = \frac{\pi a^2}{4} \int_0^b \left(e^{2x/a} + 2 + e^{-2x/a}\right) dx =$

$$= \frac{\pi a^2}{4} \left(\frac{a}{2} e^{2x/a} + 2x - \frac{a}{2} e^{-2x/a}\right)\Bigg|_0^b = \frac{\pi a^3}{8}\left(e^{2b/a} - e^{-2b/a}\right) + \frac{\pi a^2 b}{2}.$$

3.11.6 Площадь повер

Пусть нам дана повер кривой $y=f(x)$ вокруг оси Ox. Определим площадь это b. Функцию $f(x)$ предположим непрерывной и имеющеі ех точках отрезка $[a,b]$.

Проведем хорды которых обозначим через $\Delta s_1, \Delta s_2, \ldots, \Delta s_n$ (рис. 13).

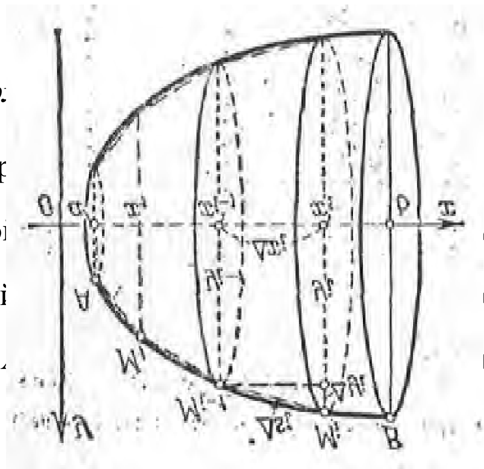


Рисунок 13

Каждая хорда длины $\Delta s_i,\ i=1,2,\ldots,n$ при вращении опишет усеченный конус, площадь поверхности которого $\Delta P_i = 2\pi \frac{y_{i-1}-y_i}{2}\Delta s_i$. Но $\Delta s_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = \sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\Delta x_i$.

Применяя теорему Лагранжа, получим $\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(\xi_i)$, где $x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$; следовательно, $\Delta s_i = \sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\Delta x_i$, $\Delta P_i = 2\pi \frac{y_{i-1}+y_i}{2}\sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\Delta x_i$. Площадь поверхности, описанной ломаной, будет равна $P_n = 2\pi\sum_{i=1}^{n}\frac{y_{i-1}+y_i}{2}\sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\Delta x_i$, или сумме

$$P_n = \pi\sum_{i=1}^{n}\left(f(x_{i-1})+f(x_i)\right)\sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\Delta x_i\,, \tag{16}$$

распространенной на все звенья ломаной. Предел этой суммы, когда наибольшее звено ломаной Δs_i стремится к нулю, называется *площадью* рассматриваемой *поверхности вращения*. Сумма (2.16) не является интегральной суммой для функции

$$2\pi f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,, \tag{17}$$

так как в слагаемом, соответствующем отрезку (x_{i-1}, x_i), фигурирует несколько точек этого отрезка x_{i-1}, x_i, ξ_i. Но можно доказать, что предел суммы (16) равняется пределу интегральной суммы для функции (17), т.е.

$$P = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \pi \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_{i-1}) + f(x_i) \right) \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \Delta x_i = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \pi \sum_{i=1}^{n} 2 f(\xi_i) \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \Delta x_i ,$$

или

$$P = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx . \tag{18}$$

Пример 13. Определить площадь поверхности параболоида, образованного вращением вокруг оси *Ox* дуги параболы $y^2 = 2px$, соответствующей изменению *x* от $x = 0$ до $x = a$.

Решение.

$$y = \sqrt{2px}, \; y' = \frac{\sqrt{2p}}{2\sqrt{x}}, \; \sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + \frac{2p}{4x}} = \sqrt{\frac{2x + p}{2x}}$$

По формуле (18) получим

$$P = 2\pi \int_0^a \sqrt{2px} \sqrt{\frac{2x + p}{2x}} dx = 2\pi \sqrt{p} \int_0^a \sqrt{2x + p} dx =$$

$$= 2\pi \sqrt{p} \frac{2}{3} (2x + p)^{3/2} \frac{1}{2} \Big|_0^a = \frac{2\pi \sqrt{p}}{3} \left((2a + p)^{3/2} - p^{3/2} \right).$$

3.11.7 Вычисление работы с помощью определенного интеграла

Пусть под действием некоторой силы *F* материальная точка *M* движется по прямой *Os*, причем направление силы совпадает с направлением движения. Требуется найти работу, произведенную силой *F* при перемещении точки *M* из положения $s = a$ в положение $s = b$.

1) Если сила *F* постоянна, то работа *A* выражается произведением силы *F* на длину пути, т. е.

$$A = F(b - a).$$

2) Предположим, что сила *F* непрерывно меняется в зависимости от положения материальной точки, т. е. представляет собой функцию $F(s)$, непрерывную на отрезке $a \le s \le b$.

Разобьем отрезок $[a, b]$ на *n* произвольных частей с длинами $\Delta s_1, \Delta s_2, \ldots, \Delta s_n$, затем в каждом частичном отрезке (s_{i-1}, s_i) выберем произвольную точку ξ_i и заменим работу силы $F(s)$ на пути Δs_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ произведением $F(\xi_i) \Delta s_i$.

Это значит, что в пределах каждого частичного отрезка мы принимаем силу *F* за постоянную, а именно полагаем $F = F(\xi_i)$. В таком случае выражение $F(\xi_i) \Delta s_i$ при достаточно малом Δs_i дает нам приближенное значение работы силы F на пути Δs_i, а сумма $A_n = \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i)\Delta s_i$ будет приближенным выражением работы силы F на всем отрезке $[a,b]$.

Очевидно, A_n представляет собой интегральную сумму, составленную для функции $F = F(s)$ на отрезке $[a,b]$. Предел этой суммы при $\max \Delta s_i \to 0$ существует и выражает работу силы $F(s)$ на пути от точки $s = a$ до точки $s = b$:

$$A = \int_a^b F(s)ds. \quad (19)$$

Пример 14. Сжатие S винтовой пружины пропорционально приложенной силе F. Вычислить работу силы F при сжатии пружины на 5 см, если для сжатия ее на 1 см нужна сила 10 Н (рис. 14).

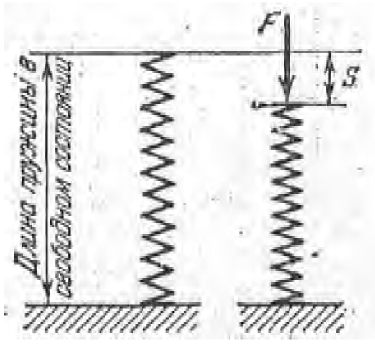


Рисунок 14

Решение. Сила F и перемещение S связаны по условию зависимостью $F = kS$, где k – постоянная.

Будем выражать S в метрах, F – в ньютонах. При $S = 0{,}01$, $F = 10$, т. е. $10 = k \cdot 0{,}01$, откуда $k = 1000$, $F = 1000S$. На основании формулы (2.19) имеем

$$A = \int_a^b 1000S ds = 1000 \frac{S^2}{2}\Bigg|_0^{0{,}05} = 1{,}25 \text{ Дж}.$$

Пример 15. Сила F, с которой электрический заряд e_1 отталкивает заряд e_2 (того же знака), находящийся от него на расстоянии r, выражается формулой $F = k\frac{e_1 \cdot e_2}{r^2}$, где k – постоянная.

Определить работу силы F при перемещении заряда e_2 из точки A_1, отстоящей от e_1 на расстоянии r_1, в точку A_2, отстоящую от e_1 на расстоянии r_2, полагая, что заряд e_1 помещен в точке A_0, принятой за начало отсчета.

Решение. По формуле (19) имеем $A=\int\limits_{r_1}^{r_2} k\frac{e_1\cdot e_2}{r^2}dr=-ke_1\cdot e_2\frac{1}{r}\Big|_{r_1}^{r_2}=ke_1\cdot e_2\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$.

При $r_2=+\infty$ получим $A=\int\limits_{r_1}^{+\infty} k\frac{e_1\cdot e_2}{r^2}dr=\frac{ke_1e_2}{r_1}$. При $e_2=1,\ A=k\frac{e_1}{r}$. Последняя величина называется *потенциалом поля*, создаваемого зарядом e_1.

3.11.8 Координаты центра масс

1) Центр масс плоской линии

Пусть дана кривая *AB* уравнением $y=f(x),\ a\le x\le b$, и пусть эта кривая представляет собой *материальную линию*. Тогда координаты центра масс дуги выражаются определенными интегралами:

$$x_c=\frac{\int\limits_a^b xds}{\int\limits_a^b ds}=\frac{\int\limits_a^b x\sqrt{1+f'^2(x)}dx}{\int\limits_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}dx}, \qquad (20)$$

$$y_c=\frac{\int\limits_a^b f(x)ds}{\int\limits_a^b ds}=\frac{\int\limits_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx}{\int\limits_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}dx}. \qquad (2.21)$$

Пример 16. Найти координаты центра масс полуокружности $x^2+y^2=a^2$, расположенной над осью *Ox*.

Решение. Определим ординату центра масс:

$$y=\sqrt{a^2-x^2},\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}},\quad ds=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx,\quad ds=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}dx,$$

$$y_c=\frac{\int\limits_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}dx}{\pi a}=\frac{a\int\limits_{-a}^{a}dx}{\pi a}=\frac{2a^2}{\pi a}=\frac{2a}{\pi},$$

$x_c=0$ (так как полуокружность симметрична относительно оси *Oy*).

2) Центр масс плоской фигуры

Пусть дана фигура, ограниченная линиями $y=f_1(x),\ y=f_2(x),\ x=a,\ x=b$, представляет собой *материальную* плоскую фигуру. Поверхностную плотность, т.е. массу единицы площади поверхности, мы будем считать постоянной и равной δ для всех частей фигуры.

Разобьем данную фигуру прямыми $x=a, x=x_1,\ldots, x=x_n=b$ на полоски ширины $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$. Масса каждой полоски будет равна произведению ее площади на плотность δ. Если каждую полоску заменить прямоугольником (рис. 15) с основанием Δx_i и высотой $f_2(\xi_i)-f_1(\xi_i)$, где $\xi_i=\dfrac{x_{i-1}+x_i}{2}$, то масса полоски будет приближенно равна $\Delta m_i=\delta(f_2(\xi_i)-f_1(\xi_i))\Delta x_i,\ i=1,2,\ldots,n$.

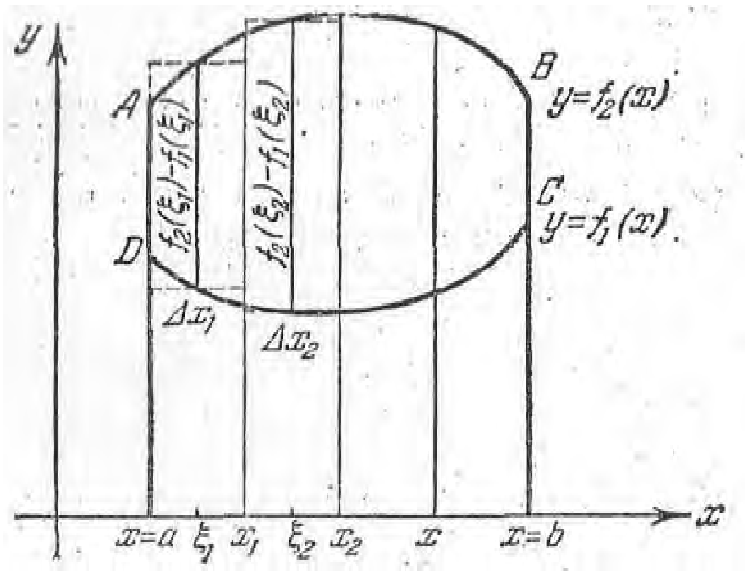


Рисунок 15

Приближенно центр масс этой полоски будет находиться в центре соответствующего прямоугольника: $(x_i)_c=\xi_i$, $(y_i)_c=\dfrac{f_2(\xi_i)+f_1(\xi_i)}{2}$.

Заменяя теперь каждую полоску материальной точкой, масса которой равна массе соответствующей полоски и сосредоточена в центре масс этой полоски, найдем приближенное значение координат центра масс всей фигуры (по формулам (20) и (21)):

$$x_c \approx \frac{\sum \xi_i \delta(f_2(\xi_i)-f_1(\xi_i))\Delta x_i}{\sum \delta(f_2(\xi_i))-(f_1(\xi_i))\Delta x_i}, \quad y_c=\frac{\frac{1}{2}\sum(f_2(\xi_i)+f_1(\xi_i))\delta(f_2(\xi_i)-f_1(\xi_i))\Delta x_i}{\sum \delta(f_2(\xi_i))-(f_1(\xi_i))\Delta x_i}.$$

Переходя к пределу при $\Delta x_i \to 0$, получим

$$x_c \approx \frac{\int_a^b x(f_2(x)-f_1(x))dx}{\int_a^b (f_2(x)-f_1(x))dx}, \quad y_c=\frac{\frac{1}{2}\int_a^b \left(f_2^2(x)-f_1^2(x)\right)dx}{\int_a^b (f_2(x)-f_1(x))dx}..$$

Эти формулы справедливы для любой однородной (т. е. имеющей постоянную плотность во всех точках) плоской фигуры. Как мы видим, координаты центра масс не зависят от плотности δ фигуры (в процессе вычисления δ сократилось).

Пример 17. Определить координаты центра масс сегмента параболы $y^2 = ax$, отсекаемого прямой $x = a$ (рис. 16).

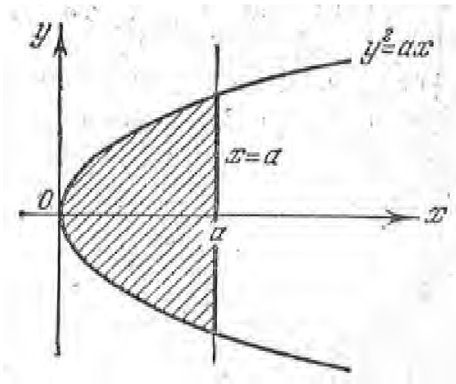


Рисунок 16

Решение. В данном случае $f_2(x) = \sqrt{ax}$, $f_1(x) = -\sqrt{ax}$, поэтому

$$x_c \approx \frac{2\int_0^a x\sqrt{ax}\,dx}{2\int_0^a \sqrt{ax}\,dx} = \frac{2\sqrt{a}\,\frac{2}{5}x^{5/2}\Big|_0^a}{2\sqrt{a}\,\frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_0^a} = \frac{\frac{4}{5}a^3}{\frac{4}{3}a^3} = \frac{3}{5}a, \quad y_c = 0$$ (так как сегмент симметричен относительно оси Ox).

3.11.9 Вычисление момента инерции линии, круга и цилиндра с помощью определенного интеграла

$$I_0 = \gamma\int_a^b \left(x^2 + f^2(x)\right)\sqrt{1 + f^2(x)}\,dx \; - \tag{22}$$

– момент инерции дуги материальной линии $y = f(x)$ относительно начала координат, $\gamma = \text{const}$ – линейная плотность.

1) Момент инерции тонкого однородного стержня длины l относительно его конца

Совместим стержень с отрезком оси Ox: $0 \le x \le l$.

В этом случае $\Delta s_i = \Delta x_i$, $\Delta m_i = \gamma\Delta x_i$, $r_i^2 = x_i^2$ и формула (22) принимает вид

$$I_{0_c} = \gamma\int_a^b x^2 dx = \gamma\frac{l^3}{3}. \tag{23}$$

Если дана масса стержня M, то $\gamma = M / l$ и формула (23) принимает вид

$$I_{0_c} = \frac{1}{3}Ml^2. \tag{24}$$

2) Момент инерции окружности радиуса r относительно центра

Так как все точки окружности находятся на расстоянии r от центра, а его масса $m = 2\pi r \cdot \gamma$, то момент инерции окружности будет

$$I_0 = mr^2 = \gamma \cdot 2\pi r \cdot r^2 = \gamma \cdot 2\pi r^3. \quad (25)$$

3) Момент инерции однородного круга радиуса R относительно центра

Момент инерции *площади круга относительно центра* (рис. 17*)*:

$$I_0 = \delta \cdot 2\pi \int_0^R r^3 dr = \pi\delta \frac{R^4}{2}. \quad (27)$$

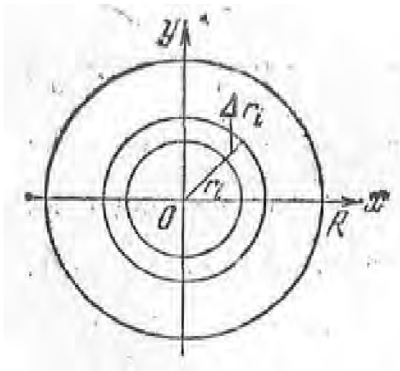


Рисунок 17

Если дана масса круга M, то поверхностная плотность δ определяется так: $\delta = \dfrac{M}{\pi R^2}$.

Подставляя это значение, окончательно получаем

$$I_0 = MR^2/2. \quad (28)$$

Очевидно, что если имеем *круглый цилиндр*, радиус основания которого R и масса M, то его момент инерции относительно оси выражается формулой (28).

4 ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

4.1 Определение интеграла по фигуре. Геометрический и физический смысл

Под ***фигурой*** будем понимать:

– *линию* на плоскости или в пространстве,

– *плоскую область*,

– *поверхность* в пространстве,

– *пространственное тело*.

Под ***мерой фигуры*** будем понимать:

– в случае линии – ее *длину*;

– в случае плоской области или поверхности – ее *площадь*;

– в случае пространственного тела – его *объем*.

По *диаметром фигуры* будем понимать наибольшее из расстояний между двумя любыми точками фигуры.

Пусть в каждой точке фигуры F задана функция от координат $f(P)$. Разобьем фигуру на n элементарных фигур произвольным образом. В каждой из элементарных фигур возьмем точку P_i и вычислим значение функции в этой точке $f(P_i)$. Умножим найденное значение функции на меру элементарной фигуры Δk_i. Так поступаем для каждой из элементарных фигур и полученные произведения просуммируем. Полученная в результате перечисленных операций сумма называется n-ой интегральной суммой для функции $f(P)$ по фигуре F

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} f(P_i)\Delta k_i .$$

Для различных фигур интегральные суммы имеют различный вид:

– для линии $\sum\limits_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta l_i$;

– для плоской области $\sum\limits_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta s_i$;

– для поверхности $\sum\limits_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta \sigma_i$;

– для пространственного тела $\sum\limits_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta v_i$.

Определение. Интегралом по фигуре от заданной на ней функции $f(P)$ называется предел n-ой интегральной суммой при неограниченном увеличении числа разбиении при условии, что максимальный диаметр разбиения стремится к нулю и этот предел не зависит от способа разбиения фигуры на элементарные фигуры и от выбора точек P_i

$\int\limits_F f(p)dk = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=0}^{n} f(P_i)\Delta k_i$, где λ – максимальный диаметр разбиения.

В зависимости от фигуры определенный интеграл по фигуре обозначается следующим образом:

– $\int\limits_L f(x,y,z)dl = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\Delta l_i$ – криволинейный интеграл первого рода по дуге кривой L;

– $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\Delta s_i$ – двойной интеграл от функции $f(x,y)$ по области D;

– $\iint\limits_\Sigma f(x,y,z)d\sigma = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\Delta\sigma_i$ – поверхностный интеграл первого рода от функции $f(x,y,z)$ по поверхности Σ;

– $\iiint\limits_v f(x,y,z)dv = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=0}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\Delta v_i$ – тройной интеграл от функции $f(x,y,z)$ по телу v.

Теорема 4.1 (достаточное условие существования интеграла по фигуре). *Если функция $f(P)$ непрерывна в замкнутой фигуре F, то она интегрируема в этой фигуре.*

Выясним физический смысл интеграла по фигуре. Пусть в каждой точке фигуры задана плотность, как функция от координат $\rho = \rho(P)$. Будем считать, что плотность в каждой точке из элементарных фигур постоянна $\rho_i = \rho(P_i)$, тогда масса элементарной фигуры Δm_i мерой Δk_i определяется равенством

$$\Delta m_i = \rho(P_i)\Delta k_i .$$

Масса всей фигуры будет приближенно равна сумме масс всех элементарных фигур, на которые разбили фигуру F

$$M \approx \sum_{i=1}^{m}\Delta m_i = \sum_{i=1}^{n}\rho(P_i)\Delta k_i .$$

Если число разбиений n неограниченно увеличивать так, что максимальный диаметр разбиения λ стремится к нулю, то сумма, стоящая в правой части равенства, будет стремится к массе фигуры

$$M = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\rho(P_i)\Delta k_i = \int\limits_F \rho(p)dk .$$

Физический смысл интеграла по фигуре состоит в следующем: *определенный интеграл по фигуре от плотности численно равен массе фигуры*.

Если в каждой точке фигуры плотность постоянна и равна единице, то масса фигуры численно равна мере фигуры:

– $\int\limits_L dl = l$ – длине линии L;

– $\iint\limits_D ds = s$ – площади области D;

– $\iint\limits_\Sigma d\sigma = s$ – площади поверхности Σ;

– $\iiint\limits_v dv = v$ – объему тела V.

В этом и состоит *геометрический смысл интеграла по фигуре*.

4.2 Основные свойства определенного интеграла по фигуре

Определенный интеграл по фигуре обладает следующими свойствами.

1. Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла по фигуре

$$\int\limits_F cf(p)dk = c\int\limits_F f(p)dk, \quad c = \text{const}.$$

2. Интеграл по фигуре от алгебраической суммы функций равен сумме интегралов по этой же фигуре от каждого из слагаемых

$$\int\limits_F (f(p)+g(p))dk = \int\limits_F f(p)dk + \int\limits_F g(p)dk.$$

3 (Свойство аддитивности). Если фигуру F разбить на n непересекающихся фигур F_i, то интеграл по всей фигуре равен сумме интегралов от той же функции по фигурам, на которые разбили фигуру F

$$\int\limits_F f(p)dk = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{F_i} f(p)dk.$$

4. Теорема о среднем

Теорема 4.2. *Если функция $f(p)$ непрерывна на замкнутой фигуре F, то внутри фигуры найдется такая точка M, что интеграл по фигуре будет равен произведению значения подынтегральной функции в этой точке на меру фигуры*

$$\int\limits_F f(p)dk = f(M)K.$$

4.3 Двойной интеграл. Вычисление двойного интеграла в декартовой системе координат

4.3.1 Определение двойного интеграла. Геометрический и физический смысл

Пусть в замкнутой области D плоскости Oxy задана непрерывная функция двух переменных $z = f(x, y)$. Разобьем область D произвольным образом на n элементарных площадок площадью Δs_i и диаметром λ_i (рис. 4.1). В каждой элементарной площадке возьмем точку $P_i(x_i, y_i)$ и вычислим значение функции в этой точке $f(P_i) \approx f(x_i, y_i)$. Найденное значение функции умножим на площадь элементарной площадки Δs_i, так поступим с каждой элементарной площадкой и полученные произведения просуммируем. Составленная таким образом сумма называется n-ой интегральной суммой для функции $f(x, y)$ по области D

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta s_i .$$

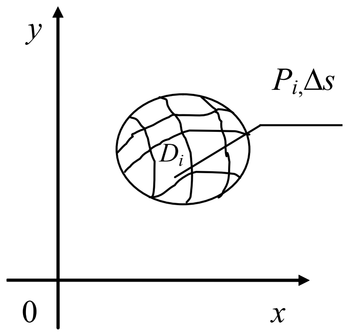


Рисунок 4.1

Если существует конечный предел n-ой интегральной суммы S_n при неограниченном увеличении числа разбиений при условии, что максимальный диаметр разбиения стремится к нулю и этот предел не зависит от способа разбиения области D на элементарные площадки и от выбора точек P_i, то он называется двойным интегралом от функции $f(x, y)$ по области D

$$\iint\limits_D f(x, y)ds = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta s_i .$$

В этом случае функцию $f(x, y)$ называют интегрируемой в области D, D называется областью интегрирования.

Теорема 4.3 (достаточное условие существования двойного интеграла). *Если функция $f(x, y)$ непрерывна в замкнутой области D, то она интегрируема в этой области.*

Выясним *геометрический смысл двойного интеграла*. Рассмотрим цилиндрическое тело, ограниченное сверху поверхностью $z = f(x, y)$, снизу – замкнутой областью D, с боков – цилиндрической поверхностью с образующей, параллельной оси Oz, а направляющей является граница области *D*. Найдем объем этого тела. Для этого разобьем область *D* на *n* элементарных площадок D_i площадью $\Delta s_i,\ i=\overline{1,n}$. Выберем *i*-ю элементарную площадку и возьмем на ней точку $P_i(x_i, y_i)$ и вычислим значение функции $f(x,y)$ в этой точке $f(P_i)=f(x_i,y_i)$ (рис. 4.2). Найденное значение функции умножим на площадь элементарной площадки Δs_i, в результате получим объем столбика с основанием Δs_i и высотой $f(x_i, y_i)$

$$\Delta v_i = f(x_i, y_i)\Delta s_i .$$

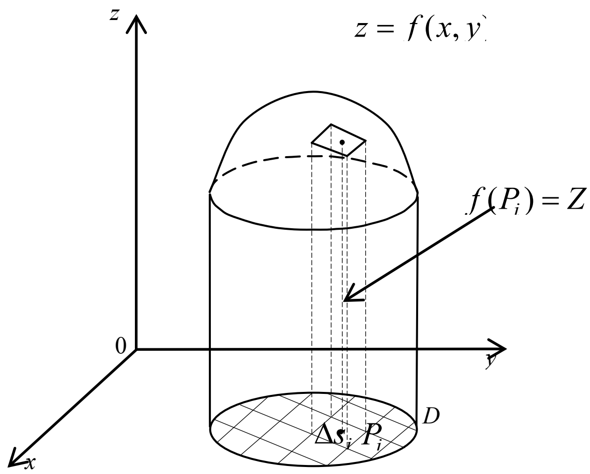


Рисунок 4.2

Объем цилиндрического тела приближенно будет равен сумме объемов столбиков

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta v_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta s_i .$$

Если число столбиков неограниченно увеличивать, то их суммарный объем будет стремиться к объему цилиндрического тела

$$V = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta s_i = \iint_D f(x,y)ds .$$

Их выше сказанного следует, что двойной интеграл численно равен объему цилиндрического тела, ограниченного сверху поверхностью $z = f(x,y)$, снизу – областью *D*, по бокам – цилиндрической поверхностью с направляющей, параллельной оси *Oz*, направляющая – граница области *D*.

Если $f(x,y) \equiv 1$, то двойной интеграл по области *D* будет численно равен площади области *D* $S_D = \iint_D ds$.

Если в каждой точке пластины *D* задана поверхностная плотность как функция координат $\rho = \rho(x,y)$, то масса пластины *D* будет равна двойному интегралу от плотности по области *D* $M = \iint_D \rho(x,y)ds$. В этом и состоит *физический смысл двойного интеграла*.

4.3.2 Основные свойства двойного интеграла

1. Постоянный множитель можно выносить за знак двойного интеграла

$$\iint\limits_D cf(x,y)ds = c\iint\limits_D f(x,y)ds.$$

Доказательство. Для доказательства воспользуемся определением двойного интеграла

$$\iint\limits_D cf(x,y)ds = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} cf(x_i,y_i)\Delta s_i = \lim_{\lambda\to 0} c\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\Delta s_i = c\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\Delta s_i = c\iint\limits_D f(x,y)ds.$$

2. Двойной интеграл от алгебраической суммы функций равен сумме двойных интегралов от каждого из слагаемых

$$\iint\limits_D (f(x,y)+g(x,y))ds = \iint\limits_D f(x,y)ds + \iint\limits_D g(x,y)ds.$$

Доказательство. Для доказательства воспользуемся определением двойного интеграла

$$\iint\limits_D (f(x,y)+g(x,y))ds = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}(f(x_i,y_i)+g(x_i,y_i))\Delta s_i = \lim_{\lambda\to 0}\left(\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\Delta s_i + \sum_{i=1}^{n} g(x_i,y_i)\Delta s_i\right) =$$

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\Delta s_i + \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} g(x_i,y_i)\Delta s_i = \iint\limits_D f(x,y)ds + \iint\limits_D g(x,y)ds.$$

3. Если в каждой точке области *D* выполняется неравенство $f(x,y) \ge g(x,y)$, то $\iint\limits_D f(x,y)ds \ge \iint\limits_D g(x,y)ds$.

4. Пусть *m* и *M* – наименьшее и наибольшее значения функции $z = f(x,y)$ в области *D* и *S* – площадь области *D*, тогда справедливо неравенство

$$mS \le \iint\limits_D f(x,y)ds \le MS.$$

5. Теорема о среднем

Теорема 4.4. *Если функция* $z = f(x,y)$ *непрерывна в замкнутой области D, то в этой области существует точка* $M_0(x_0,y_0)$, *в которой выполняется равенство*

$\iint\limits_D f(x,y)ds = f(x_0,y_0)S$, *где S – площадь D. Значение функции* $f(x_0,y_0) = \frac{1}{S}\iint\limits_D f(x,y)ds$ *называют средним значением функции* $z = f(x,y)$ *в области D.*

4.3.3 Вычисление двойного интеграла в прямоугольной декартовой системе координат

Определение. Область *D*, ограниченная сверху кривой $y = \varphi(x)$, снизу – кривой $y = \psi(y)$, а по бокам – прямыми $x = a$ и $x = b$, называется правильной в направлении оси *Oy*, если любая прямая, параллельная оси *Oy* и проходящая через область *D*, пересекает границу области *D* не более, чем в двух точках (рис. 4.3).

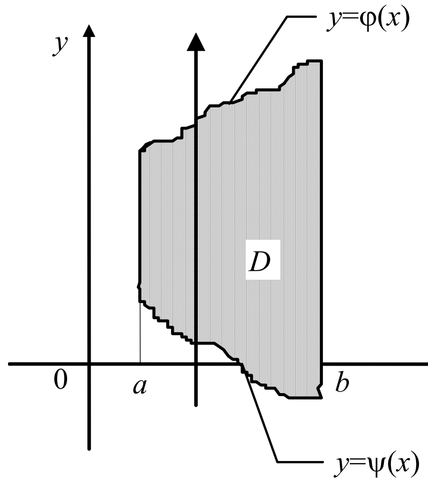


Рисунок 4.3

Определение. Область *D*, ограниченная слева кривой $x = \varphi(y)$, справа – кривой $x = \psi(y)$, сверху и снизу – прямыми $y = b$ и $y = a$, называется правильной в направлении оси *Ox*, если любая прямая, параллельная оси *Ox* и проходящая через область *D*, пересекает границу области *D* не более, чем в двух точках (рис. 4.4).

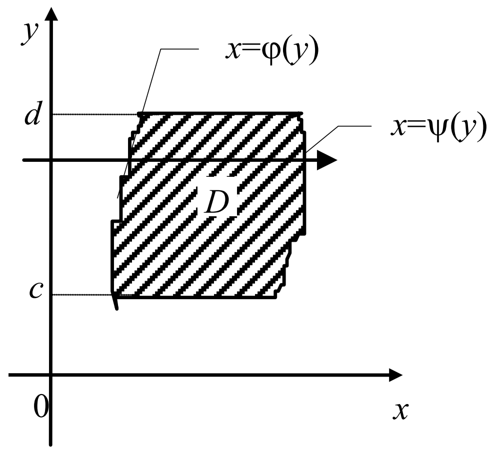


Рисунок 4.4

Пусть область *D* является правильной в направлении оси *Oy* (рис. 4.3) и требуется вычислить $\iint\limits_D f(x, y)ds$. Для вывода формулы для вычисления двойного интеграла воспользуемся геометрическим смыслом двойного интеграла. Пусть функция $z = f(x, y)$ непрерывна в замкнутой области D и является неотрицательной в этой области, тогда двойной интеграл численно равен объему цилиндрического тела, ограниченного сверху поверхностью $z = f(x, y)$, снизу – областью D, по бокам – цилиндрической поверхностью с образующей, параллельной оси Oz (рис. 4.5).

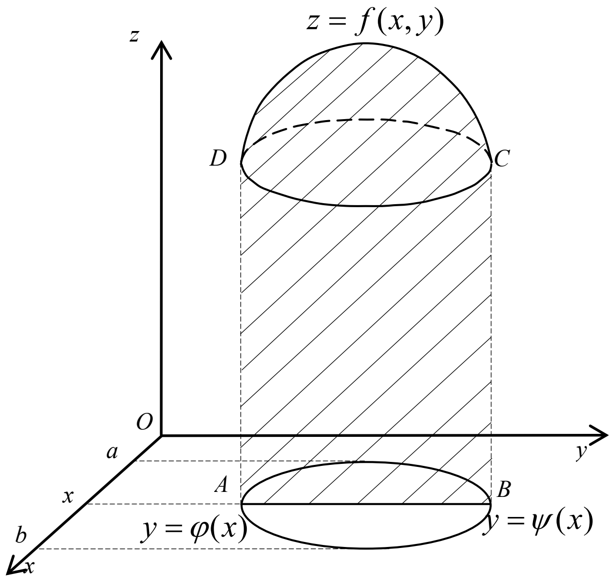


Рисунок 4.5

Построим сечение тела плоскостью, перпендикулярной оси Ox. В результате получаем криволинейную трапецию $ABCD$. Площадь данного сечения найдем с помощью определенного интеграла

$$S(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)dy .$$

Объем цилиндрического тела определим с помощью параллельных сечений

$$V = \int_a^b S(x)dx = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)dy \right) dx .$$

Окончательно получаем $\int_a^b f(x, y)ds = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)dy$.

Полученная формула служит для вычисления двойного интеграла в декартовой системе координат. Интеграл, стоящий в правой части формулы, называется повторным интегралом. Он вычисляется следующим образом: вначале вычисляется внутренний интеграл по переменной y, а затем – внешний интеграл по переменной x.

Если область D является правильной в направлении оси Ox, то двойной интеграл вычисляется по формуле: $\iint_D f(x, y)ds = \int_a^b dy \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y)dx$.

Рассмотрим примеры вычисления двойного интеграла.

Пример 1. Вычислить $\iint\limits_D xdxdy$, где область D ограничена линиями: $y = x^2$, $y = 2 - x$.

Решение. Построим область интегрирования (рис.4.6).

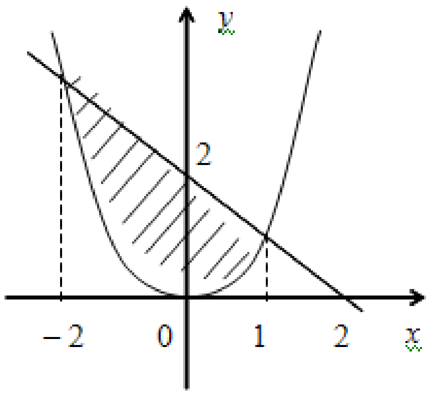


Рисунок 4.6

Область является правильной в направлении оси Oy. Найдем точки пересечения параболы $y = x^2$ и прямой $y = 2 - x$, для этого решим систему $\begin{cases} y = x^2, \\ y = 2 - x, \end{cases}$ $x^2 + x - 2 = 0;$ $x_1 = -2$; $x_2 = 1$. Из рисунка видно, что переменная x изменяется от – 2 до 1, а переменная y – от линии $y = x^2$ до линии $y = 2 - x$. перейдем от двойного интеграла к повторному и вычислим его

$$\iint\limits_D xdxdy = \int\limits_{-2}^{1} dx \int\limits_{x^2}^{2-x} xdy = \int\limits_{-2}^{1}\left(xy\Big|_{x^2}^{2-x}\right)dx = \int\limits_{-2}^{1}\left(x\left(2 - x^2\right) - x^3\right)dx =$$

$$= \int\limits_{-2}^{1}\left(2x - 2x^3\right)dx = \left(x^2 - \frac{x^4}{2}\right)\Bigg|_{-2}^{1} = -\frac{1}{2} - 4 + 8 = 4{,}5.$$

Пример 2. Вычислить $\iint\limits_D xydxdy$, если область D ограничена линиями: $y = x^2$, $y^2 = x$.

Решение. Сделаем чертеж области D (рис.4.7).

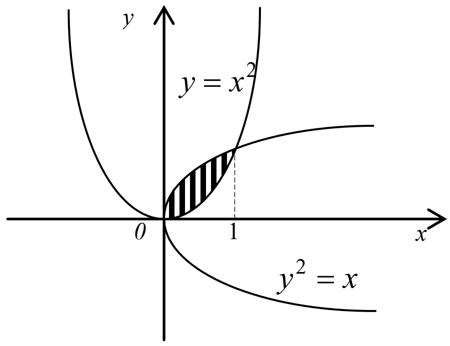


Рисунок 4.7

Найдем точки пересечения парабол $\begin{cases} y = x^2, \\ y^2 = x, \end{cases}$ $x^4 = x,\ x\left(x^3 - 1\right) = 0,\ x_1 = 0, x_2 = 1$. Область является правильной в направлении оси Ox. Переменная y изменяется от 0 до 1; переменная x – от линии $x = y^2$ до линии $x = \sqrt{y}$.

$$\iint\limits_D xydxdy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{y^2}^{\sqrt{y}} xydx = \int\limits_0^1 \left(\left. \frac{x^2 y}{2} \right|_{y^2}^{\sqrt{y}} \right) dy = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 y\left(y - y^4\right) dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left(y^2 - y^5\right) dy = \frac{1}{2}\left. \left(\frac{y^3}{3} - \frac{y^6}{6} \right) \right|_0^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{12}.$$

4.4 Тройной интеграл, его свойства. Геометрический и физический смысл тройного интеграла. Вычисление тройного интеграла в декартовой системе координат

4.4.1 Определение тройного интеграла, его свойства, геометрический и физический смысл

Пусть в пространстве задана некоторая область V, ограниченная замкнутой поверхностью Σ. Пусть в области V и на ее границе определена некоторая функция $u = f(x, y, z)$. Разобьем область V произвольным образом на n элементарных тел объемом $\Delta v_i,\ i = \overline{1, n}$. Выберем произвольный i-й элементарный объем. Возьмем в нем точку $P_i = (x_i, y_i, z_i)$ и вычислим значение функции $u = f(x, y, z)$ в этой точке $u_i = f(P_i) = f(x_i, y_i, z_i)$. Найденное значение функции умножим на величину объема Δv_i. Так поступим с каждым элементарным объемиком, и полученные произведения просуммируем. Составленная сумма называется n-й интегральной суммой для функции $u = f(x, y, z)$ по телу V

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta v_i.$$

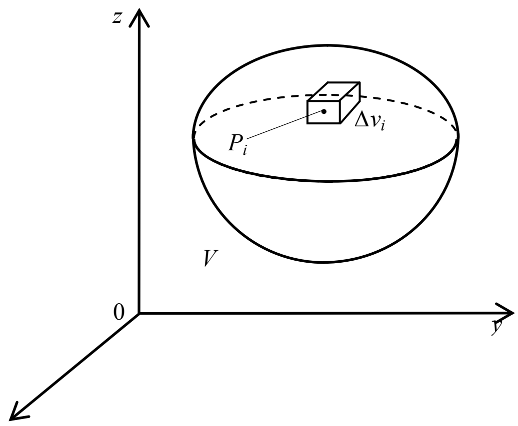


Рисунок 4.8

Если существует конечный предел n-й интегральной суммы при неограниченном увеличении числа разбиений, при условии, что максимальный диаметр разбиения λ стремится к нулю и этот предел не зависит от способа разбиения тела V на элементарные объемы и от выбора точек P_i, то он называется *тройным интегралом от функции* $f(x,y,z)$ по телу V.

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dv = \lim_{\lambda\to 0} S_n .$$

Если в каждой точке тела V задана плотность, как функция координат $\mu=\mu(x,y,z)$, то тройной интеграл от плотности по телу V равен массе тела V

$$M = \iiint\limits_V \mu(x,y,z)dv .$$

В этом и состоит *физический смысл тройного интеграла*.

Если в каждой точке тела V плотность постоянна и равна единице, то масса тела численно равна объему тела V

$$V = \iiint\limits_V dv .$$

Геометрический смысл тройного интеграла состоит в следующем: объем тела V численно равен тройному интегралу по телу V.

Тройной интеграл обладает следующими свойствами:

1. Постоянный множитель можно выносить за знак тройного интеграла

$$\iiint\limits_V kf(x,y,z)dv = k\iiint\limits_V f(x,y,z)dv .$$

2. Тройной интеграл от алгебраической суммы функций равен сумме тройных интегралов от каждого из слагаемых

$$\iiint\limits_V (f(x,y,z)+g(x,y,z))dv = \iiint\limits_V f(x,y,z)dv + \iiint\limits_V g(x,y,z)dv .$$

3. Если тело V разбито на несколько непересекающихся тел V_i, то тройной интеграл по телу V равен сумме тройных интегралов по телам, на которые разбили тело V

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dv = \sum_{i=1}^{n}\iiint\limits_{V_i} f(x,y,z)dv .$$

4. Если в каждой точке области V выполняется неравенство $f(x,y,z)\ge g(x,y,z)$, то

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dv \ge \iiint\limits_V g(x,y,z)dv .$$

5. Если функция $f(x,y,z)$ в замкнутой области V, то внутри области существует точка $\overline{P}(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$, в которой выполняется равенство $\iiint\limits_V f(x,y,z)dv = f(\overline{x},\overline{y},\overline{z})\cdot V$.

6. Если функция $f(x,y,z)$ непрерывна в области *V* и *m*, *M* соответственно наименьшее и наибольшее значения функции в области *V*, то

$$mV \le \iiint\limits_V f(x,y,z)dv \le MV .$$

4.4.2 Вычисление тройного интеграла в декартовой системе координат

Предположим, что область *V* удовлетворяет следующим условиям:

1) Всякая прямая, параллельная оси *Oz* пересекает область не более, чем в двух точках.

2) Область *V* проектируется на плоскость *xOy* в правильную область *D*.

3) Всякая часть области *V*, отсеченная плоскостью, параллельной любой из координатных плоскостей, удовлетворяет условиям 1 – 2.

Область *V*, удовлетворяющая условиям 1 – 3, называется *правильной*.

Пусть тело *V* ограничено сверху поверхностью $z = z_2(x,y)$, снизу – $z = z_1(x,y)$. Пусть проекцией тела *V* на плоскость *xOy* является область *D*, ограниченная линиями: снизу – линией $y = \varphi_1(x,y)$, сверху – линией $y = \varphi_2(x,y)$, по бокам – прямыми $x = a$ и $x = b$. Трехкратным интегралом от функции $f(x,y,z)$ по телу *V* называется следующий интеграл

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz .$$

Трехкратный интеграл вычисляется следующим образом: вначале вычисляется внутренний интеграл, затем – средний и в конце – внешний. Вычисление тройного интеграла приводится к вычислению трехкратного интеграла. Для вывода этого воспользуемся *физическим смыслом тройного интеграла*.

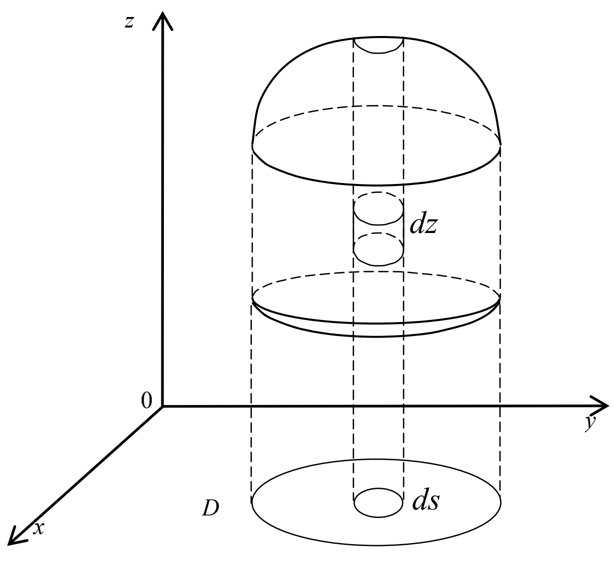


Рисунок 4.9

Пусть плотность в каждой точке тела V задана функцией $f(x,y,z)$, тогда масса тела V определяется по формуле

$$M=\iiint\limits_V f(x,y,z)dv.$$

Разобьем область D на n элементарных площадок. Выберем i-ю площадку и обозначим ее площадь ds. На этой площадке, как на основании, строим цилиндр с образующей, параллельной оси Oz. Выберем на высоте z из цилиндра элемент высотой dz. Объем выбранного элемента будет равен $dzds$, а масса элемента – $f(x,y,z)dzds$. Масса всего столбика будет равна сумме масс всех элементов

$$\Delta M=\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dsdz.$$

Масса всего тела V будет равна сумме масс всех столбиков

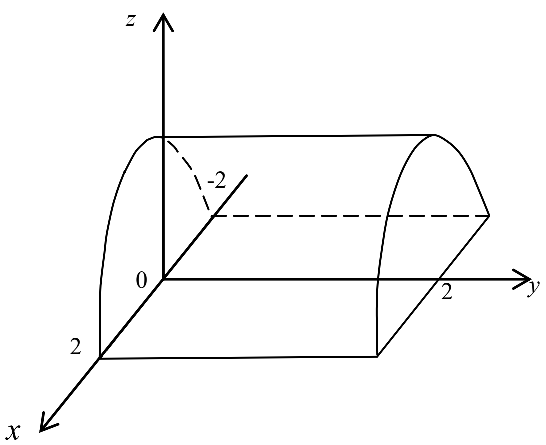
$$M=\iint\limits_D ds\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz.$$

Вычисленные массы равны

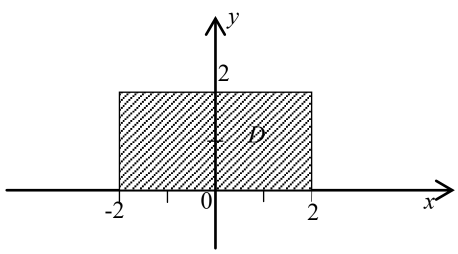
$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dv=\iint\limits_D ds\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz=\int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz.$$

Рассмотрим пример вычисления тройного интеграла.

Пример. Вычислить $\iiint\limits_V zdv$, если область V ограничена поверхностями: $z=4-x^2$; $z=0$; $y=0$; $y=2$. Тело V изображено на рис. 4.10 а), проекция тела на плоскость xOy – на рис. 4.10 б).



а)



б)

Рисунок 4.10

Решение. Из рисунков видно, что переменная z изменяется от плоскости $z=0$ до поверхности $z = 4 - x^2$; переменная y изменяется от линии $y = 0$ до линии $y = 2$; переменная x изменяется от $x = -2$ до $x = 2$. Перейдем от тройного интеграла к трехкратному и вычислим его

$$\iiint_V z dv = \int_{-2}^{2} dx \int_0^2 dy \int_0^{4-x^2} z dz = \int_{-2}^{2} dx \int_0^2 \left(\frac{z^2}{2} \Bigg|_0^{4-x^2} \right) dy = \frac{1}{2} \int_{-2}^{2} dx \int_0^2 \left(4 - x^2\right)^2 dy = \frac{1}{2} \int_{-2}^{2} \left(\left(4 - x^2\right)^2 y \Bigg|_0^2 \right) dx =$$

$$= \int_{-2}^{2} \left(4 - x^2\right) dx = \int_{-2}^{2} \left(16 - 8x^2 + x^4\right) dx = \left(16x - \frac{8x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_{-2}^{2} = 32 - \frac{64}{3} + 32 - \frac{64}{3} + \frac{64}{5} = \frac{512}{15}.$$

4.5 Замена переменных в кратных интегралах

4.5.1 Замена переменных в двойном интеграле

Пусть на плоскости *xOy* задана область *D*, ограниченная линией *L*. Предположим, что координаты *x* и *y* являются функциями от *u* и *v*

$$\begin{cases} x = \varphi(u; v) \\ y = \psi(u; v) \end{cases} \tag{4.1}$$

Функции φ и ψ однозначны, непрерывны и имеют непрерывные частные производные в некоторой области D'. По формулам (4.1) каждой паре чисел $(u; v) \in D'$ соответствует вполне определенное значение $(x; y) \in D$. Функции φ и ψ имеют обратные функции. Рассмотрим прямоугольную систему координат *uOv*. Каждой точке $P(x, y)$ на плоскости *xOy* однозначно соответствует точка $P'(u, v)$ на плоскости *uOv*. Рассмотрим в области D' прямую $u = \text{const}$, ей в области *D* соответствует некоторая линия, аналогично прямой $v = \text{const}$ соответствует некоторая линия в *D*. Разобьем область D' прямыми $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$ на прямоугольники. Соответствующими кривыми разобьется область *D* на криволинейные прямоугольники (рис. 4.11).

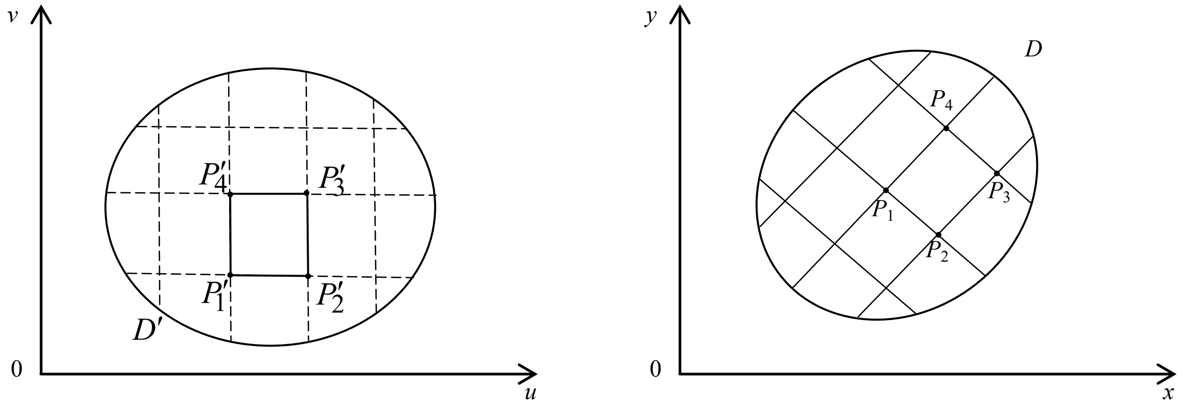


Рисунок 4.11

Рассмотрим на плоскости uOv прямоугольную площадку $P_1'P_2'P_3'P_4'$, ей соответствует на плоскости xOy площадка $P_1P_2P_3P_4$ (рис. 4.12).

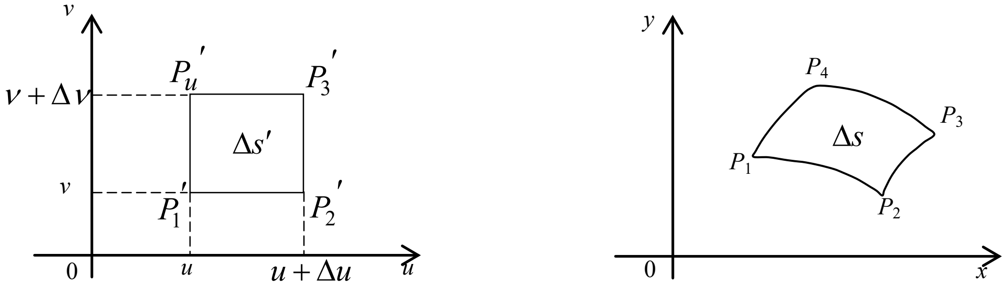


Рисунок 4.12

Пусть в области D задана функция $z = f(x, y)$. Каждому значению $z = f(x, y)$ в D соответствует $z = F(u,v) = f(\varphi(u,v), \psi(u,v))$ в D'.

Рассмотрим интегральную сумму

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta s_i = \sum_{i=1}^{n} F(u_i, v_i)\Delta s_i' .$$

Вычислим площадь Δs криволинейного прямоугольника $P_1P_2P_3P_4$ через координаты точек P_1, P_2, P_3, P_4.

$$\begin{array}{lll}
P_1(x_1, y_1), & x_1 = \varphi(u,v), & y_1 = \psi(u,v) \\
P_2(x_2, y_2), & x_2 = \varphi(u+\Delta u, v), & y_2 = \psi(u+\Delta u, v) \\
P_3(x_3, y_3) & x_3 = \varphi(u+\Delta u, v+\Delta v), & y_3 = \psi(u+\Delta u, v+\Delta v), \\
P_4(x_4, y_4) & x_4 = \varphi(u, v+\Delta v), & y_4 = \psi(u, v+\Delta v).
\end{array}$$

При нахождении Δs мы будем считать, что $P_1P_2 \parallel P_4P_3$, $P_4P_1 \parallel P_3P_4$. Заменим приращение функции дифференциалом, тогда координаты примут значения

$$\begin{array}{ll}
x_1 = \varphi(u,v); & y_1 = \psi(u,v); \\
x_2 = \varphi(u,v) + \dfrac{\partial \varphi}{\partial u}\Delta u; & y_2 = \psi(u,v) + \dfrac{\partial \psi}{\partial u}\Delta u; \\
x_3 = \varphi(u,v) + \dfrac{\partial \varphi}{\partial u}\Delta u + \dfrac{\partial \varphi}{\partial v}\Delta v; & y_3 = \psi(u,v) + \dfrac{\partial \psi}{\partial u}\Delta u + \dfrac{\partial \psi}{\partial v}\Delta v; \\
x_4 = \varphi(u,v) + \dfrac{\partial \varphi}{\partial v}\Delta v; & y_4 = \psi(u,v) + \dfrac{\partial \psi}{\partial v}\Delta v.
\end{array}$$

При сделанных предположениях можно считать, что четырехугольник $P_1P_2P_3P_4$ является параллелограммом и его площадь определяется по формуле

$$\Delta s \approx \left|(x_3 - x_1)(y_3 - y_2) - (x_3 - x_2)(y_3 - y_1)\right| = \left|\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial u}\right|\Delta u \Delta v = \left\|\begin{matrix} \dfrac{\partial \varphi}{\partial u} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial u} & \dfrac{\partial \psi}{\partial v} \end{matrix}\right\|\Delta u \Delta v .$$

Определитель $I = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial u} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial v} \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial u} & \dfrac{\partial\psi}{\partial v} \end{vmatrix}$ называется определителем Якоби или якобианом.

Тогда площадь $\Delta s \approx |I|\Delta s'$.

Подставим найденную площадь в интегральную сумму

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta s_i = \sum_{i=1}^{n} F(u_i, v_i)|I|\Delta s_i'.$$

Перейдем в равенстве к пределу при неограниченном увеличении числа разбиений, при условии, что максимальный диаметр разбиения стремится к нулю, получим

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} f(\varphi(u,v);\psi(u,v))|I|dudv.$$

Данная формула служит для преобразования координат в двойном интеграле.

Рассмотрим вычисление двойного интеграла в полярной системе координат.

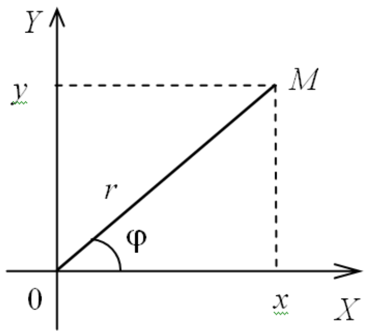


Рисунок 4.13

Точка M в полярной системе координат имеет координаты r и φ. Они связаны с декартовыми координатами соотношениями

$$x = r\cos\varphi; \quad y = r\sin\varphi.$$

Вычислим якобиан.

$$I = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial\varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial\varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r\left(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right) = r.$$

Тогда формула для вычисления двойного интеграла в полярной системе координат примет вид

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} f(r\cos\varphi; r\sin\varphi)rd\varphi dr.$$

Рассмотрим вычисление двойного интеграла в полярной системе координат.

Пример. Вычислить $\iint_D f\left(x^2+y^2\right)dxdy$, где область D ограничена линиями $x^2+y^2=1$; $x^2+y^2=4$.

Решение. Сделаем чертеж области D (рис. 4.14).

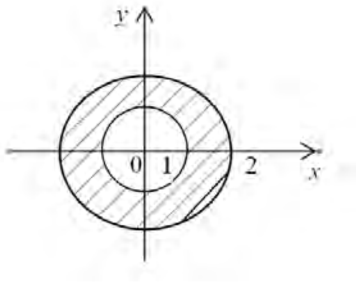


Рисунок 4.14

Найдем уравнения в полярной системе координат

$x^2+y^2=r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi=r^2=1;\ r=1;\ r=2$.

Найдем пределы интегрирования $0\le\varphi\le 2\pi;\quad 1\le r\le 2$. Вычислим интеграл в полярной системе координат

$$\iint_D f\left(x^2+y^2\right)dxdy=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_1^2\left(r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi\right)rdr=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_1^2 r^3dr=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\left.\frac{r^4}{4}\right|_1^2\right)d\varphi=\int_0^{2\pi}\frac{15}{4}d\varphi=\frac{15}{4}\varphi\Big|_0^{2\pi}=\frac{15\pi}{2}.$$

4.5.2 Замена переменных в тройном интеграле. Вычисление тройного интеграла в цилиндрической и сферической системах координат

Пусть требуется вычислить тройной интеграл $\iiint_V f(x,y,z)dxdydz$ в декартовой системе координат. Перейдем к новым координатам u, v, w с помощью подстановки $x=\varphi(u,v,w);\ y=\psi(u,v,w);\ z=\chi(u,v,w)$.

Переход к новой системе координат осуществляется по формуле

$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz=\iiint_V f(\varphi(u,v,w);\psi(u,v,w);\chi(u,v,w))|I|dudvdw$, где I – якобиан, который для тройного интеграла имеет вид

$$I=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w}\\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w}\end{vmatrix}.$$

Рассмотрим вычисление тройного интеграла в цилиндрической системе координат. Цилиндрические координаты связаны с декартовыми координатами соотношениями

$x = r\cos\varphi;\quad y = r\sin\varphi;\quad z = z;\quad 0 \le \varphi \le 2\pi;\quad z \in R,\quad r \ge 0$.

Якобиан для цилиндрической системы координат имеет вид

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r \ge 0.$$

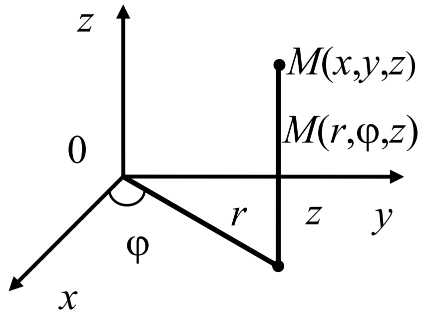


Рисунок 4.15

Переход к цилиндрическим координатам в тройном интеграле осуществляется по формуле

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{V'} f(r\cos\varphi; r\sin\varphi; z) r dr d\varphi dz = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} r dr \int\limits_{z_1(\varphi,r)}^{z_2(\varphi,r)} f(r\cos\varphi; r\sin\varphi, z) dz.$$

Рассмотрим переход к цилиндрическим координатам в тройном интеграле на примере решения задачи.

Пример. Вычислить массу тела, ограниченного параболоидом $z = x^2 + y^2$ и плоскостью $z = 1$, если плотность в каждой точке тела определяется по формуле $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Решение. Сделаем чертеж тела и проекции тела на плоскость *xOy* (рис. 4.16).

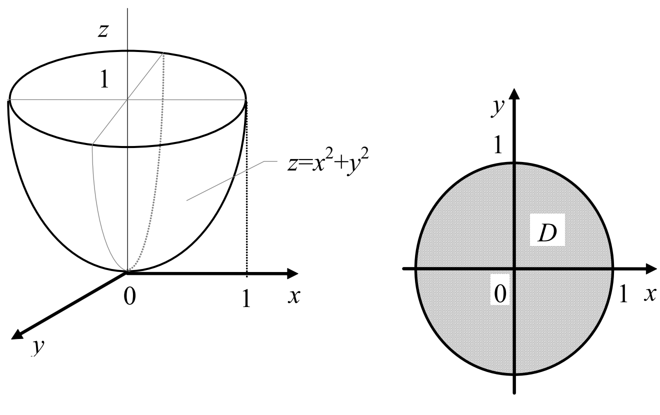


Рисунок 4.16

Масса тела V определяется по формуле $M = \iiint\limits_V \rho(x,y,z)dv$.

Перейдем от декартовой системы координат к цилиндрической. Определим пределы интегрирования

$r^2 \le z \le 1; \quad 0 \le \varphi \le 2\pi; \quad 0 \le r \le 1$.

$$M = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 rdr \int\limits_{r^2}^1 \sqrt{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi}dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 r^2dr \int\limits_{r^2}^1 dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \left(r^2z\Big|_{r^2}^1 \right)dr =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \left(r^2 - r^4\right)dr = \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5} \right)\Bigg|_0^1 d\varphi = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) \int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \frac{4\pi}{15}.$$

Рассмотрим вычисление тройного интеграла в сферических координатах (рис. 4.17).

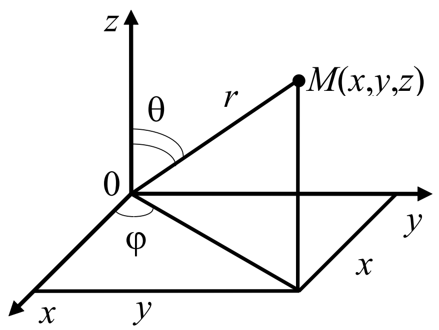


Рисунок 4.17

Связь между декартовыми и сферическими координатами выражается соотношениями

$x = r\cos\varphi\sin\theta; \quad y = r\sin\varphi\sin\theta; \quad z = r\cos\theta; \quad 0 \le r < \infty; \quad 0 \le \varphi \le 2\pi; \quad 0 \le \theta \le \pi$.

Якобиан для перехода от декартовой системы координат к сферической имеет вид

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial\varphi} & \frac{\partial x}{\partial\theta} & \frac{\partial x}{\partial r} \\ \frac{\partial y}{\partial\varphi} & \frac{\partial y}{\partial\theta} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial z}{\partial\varphi} & \frac{\partial z}{\partial\theta} & \frac{\partial z}{\partial r} \end{vmatrix} = r^2\sin\theta.$$

Переход от декартовой системы координат к сферической осуществляется по формуле

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{V'} f(r\cos\varphi\sin\theta; r\sin\varphi\sin\theta; r\cos\theta)r^2\sin\theta d\varphi d\theta dr.$$

Рассмотрим вычисление тройного интеграла в сферической системе координат.

Пример. Вычислить $\iiint\limits_V zdxdydz$, где тело V ограничено сферой $x^2 + y^2 + z = 4^2$ и конусом $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Решение. Изобразим тело (рис. 4.18).

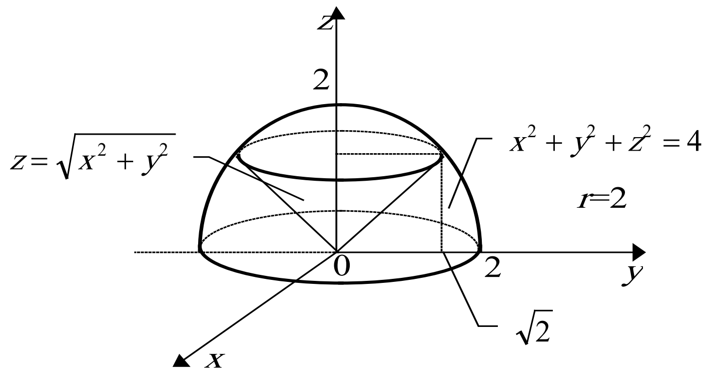


Рисунок 4.18

Уравнение сферы в сферических координатах имеет вид $r=2$, уравнение конуса – $\theta=\dfrac{\pi}{4}$. Координаты *r*, φ, θ изменяются в следующих диапазонах: $0\le r\le 2; 0\le\varphi\le 2\pi$; $0\le\theta\le\dfrac{\pi}{4}$. Перейдем к вычислению тройного интеграла.

$$\iiint\limits_V zdxdydz=\iiint\limits_{V'} r\cos\theta r^2\sin\theta drd\varphi d\theta=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\pi/4}\cos\theta\sin\theta d\theta\int\limits_0^2 r^3dr=2\pi.$$

4.6 Приложение кратных интегралов

4.6.1 Приложение двойного интеграла

На основании геометрического смысла *двойного интеграла* имеем: $\iint\limits_D f(x,y)ds$ численно равен *объему цилиндрического тела*, ограниченного сверху поверхностью $z=f(x,y)$, снизу – областью *D* и цилиндрической поверхностью с образующей, параллельной оси *Oz*.

$$V=\iint\limits_D f(x,y)dxdy. \tag{4.2}$$

Если в каждой точке пластины задана поверхностная плотность $\gamma=\gamma(x,y)$, то *масса пластины D* находится по формуле

$$M=\iint\limits_D\gamma(x,y)dxdy.$$

Площадь области D с помощью двойного интеграла находится по формуле

$$S=\iint\limits_D dxdy.$$

Пусть поверхность задана уравнением $z=f(x,y)$ и проекция поверхности на плоскость *xOy* равна области *D*, тогда *площадь поверхности* находится по формуле

$$S=\iint\limits_D\sqrt{1+(f'_x)^2+(f'_y)^2}\,dxdy.$$

Определим моменты инерции пластины.

Определение. *Моментом инерции материальной точки M относительно точки O* называется произведение массы m на квадрат расстояния от точки M до точки O

$$I = mr^2 .$$

Определение. *Момент инерции системы материальных точек* равен сумме моментов инерции отдельных точек

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 .$$

Пусть дана пластина D в плоскости xOy и пусть в каждой точке пластины задана плотность $\gamma = \gamma(x, y)$.

Разобьем фигуру D на n частей произвольным образом. Считаем массу элементарной площадки сосредоточенной в точке $P_i(x_i, y_i)$. Тогда *момент инерции материальной точки* P_i *относительно начала координат* – $\Delta I_i = \gamma(x_i, y_i)(x_i^2 + y_i^2)\Delta s_i$. Момент инерции относительно начала координат равен приближенно сумме моментов элементарных площадок

$$I_0 \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta I_i = \sum_{i=1}^{n} \gamma(x_i, y_i)(x_i^2 + y_i^2)\Delta s_i .$$

Если число разбиений неограниченно увеличивать при условии, что максимальный диаметр разбиения стремится к 0, то

$$I_0 = \iint_D \gamma(x, y)(x^2 + y^2)dxdy .$$

Интегралы

$$I_{Ox} = \iint_D y^2 \gamma(x, y)dxdy; \quad I_{Oy} = \iint_D x^2 \gamma(x, y)dxdy$$

определяют *моменты инерции пластины D относительно оси Ox и оси Oy* соответственно.

Определение. *Статическим моментом инерции материальной точки относительно оси* называется произведение массы точки на расстояние до оси.

Статические моменты пластины D относительно осей Ox и Oy определяют по формулам

$$M_x = \iint_D y\gamma(x, y)dxdy; \quad M_y = \iint_D x\gamma(x, y)dxdy .$$

Координаты центра масс пластины D опредедяются по формулам

$$x_c = \frac{M_y}{M} = \frac{\iint_D x\gamma(x, y)dxdy}{\iint_D \gamma(x, y)dxdy}; \quad y_c = \frac{M_x}{M} = \frac{\iint_D y\gamma(x, y)dxdy}{\iint_D \gamma(x, y)dxdy} .$$

Пример 1. Найти координаты центра масс однородной пластины, ограниченной линиями $y = x^2 - 1, \quad y = 4$, если плотность в каждой точке $\gamma(x, y) = 1$.

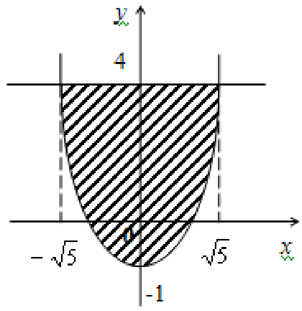


Рисунок 4.19

Решение. Определим массу пластины

$$M = \iint_D \gamma(x, y)dxdy = \iint_D \gamma dxdy = \int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} dx \int_{x^2-1}^{4} dy = \int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} \left(y\Big|_{x^2-1}^{4} \right) dx = \int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} \left(4 - x^2 + 1\right) dx =$$

$$= \int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} \left(5 - x^2\right) dx = \left(5x - \frac{x^3}{3} \right)\Bigg|_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} = 5\sqrt{5} + 5\sqrt{5} - \frac{5\sqrt{5}}{3} - \frac{5\sqrt{5}}{3} = 10\sqrt{5} - \frac{10\sqrt{5}}{3} = \frac{20\sqrt{5}}{3}.$$

Вычислим статический момент относительно оси Ox

$$M_x = \iint_D y\gamma(x, y)dxdy = \iint_D ydxdy = \int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} dx \int_{x^2-1}^{4} ydy = \int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} \left(\frac{y^2}{2} \Bigg|_{x^2-1}^{4} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} \left(16 - x^4 + 2x^2 - 1\right) dx = \frac{1}{2} \int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} \left(15 + 2x^2 - x^4\right) dx = \frac{1}{2} \left(15x + \frac{2x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right)\Bigg|_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} = \frac{40\sqrt{5}}{3}.$$

Так как пластина симметрична относительно оси Oy и плотность постоянная, то $M_y = 0$. Тогда координаты центра масс будут равны

$$x_c = \frac{M_y}{M} = 0; \quad y_c = \frac{M_x}{M} = \frac{40\sqrt{5}/3}{20\sqrt{5}/3} = 2.$$

4.6.2 Приложение тройного интеграла

Объем тела V с помощью тройного интеграла находится по формуле

$$V = \iiint_V dxdydz.$$

Если в каждой точке тела V задана плотность, как функция координат $\gamma = \gamma(x, y, z)$, то масса тела V определяется по формуле

$$M = \iiint_V \gamma(x, y, z)dxdydz.$$

Моменты материальной точки массы m относительно осей координат выражаются формулами

$$I_{Ox} = \left(y^2 + z^2\right)m; \quad I_{Oy} = \left(x^2 + z^2\right)m; \quad I_{Oz} = \left(x^2 + y^2\right)m .$$

Моменты инерции тела V с объемной плотностью $\gamma(x, y, z)$ определяются следующими формулами

$$I_{Oz} = \iiint_V \left(x^2 + y^2\right)\gamma(x, y, z)dxdydz;$$

$$I_{Oy} = \iiint_V \left(x^2 + z^2\right)\gamma(x, y, z)dxdydz$$

$$I_{Ox} = \iiint_V \left(y^2 + z^2\right)\gamma(x, y, z)dxdydz$$

Моменты инерции относительно координатных плоскостей выражаются соотношениями

$$I_{xy} = \iiint_V z^2\gamma(x, y, z)dxdydz$$

$$I_{yz} = \iiint_V x^2\gamma(x, y, z)dxdydz$$

$$I_{xz} = \iiint_V y^2\gamma(x, y, z)dxdydz$$

Момент инерции тела V относительно начала координат определяется формулой

$$I_O = \iiint_V \left(x^2 + y^2 + z^2\right)dxdydz .$$

Координаты центра масс тела определяются по формулам

$$x_c = \frac{\iiint_V x\gamma(x, y, z)dxdydz}{\iiint_V \gamma(x, y, z)dxdydz}; \quad y_c = \frac{\iiint_V y\gamma(x, y, z)dxdydz}{\iiint_V \gamma(x, y, z)dxdydz}; \quad z_c = \frac{\iiint_V z\gamma(x, y, z)dxdydz}{\iiint_V \gamma(x, y, z)dxdydz} .$$

Пример 2. Определить координаты центра масс верхней половины шара радиуса R с центром в начале координат, считая плотность $\gamma(x, y, z) = \gamma_0 = \text{const}$.

Решение. Так как полушар симметричен относительно оси Oz и плотность постоянная, то центр масс будет находиться на оси Oz, т.е. $x_c = y_c = 0$.

Аппликату центра масс определим по формуле

$$z_c = \frac{\iiint_V \gamma_0 zdxdydz}{\iiint_V \gamma_0 dxdydz} .$$

Перейдя к сферическим координатам, имеем

$$z_c = \frac{\gamma_0 \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} d\theta \int\limits_0^{R} \rho\cos\theta\rho^2 \sin^2\theta d\rho}{\gamma_0 \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} d\theta \int\limits_0^{R} \rho^2 \sin\theta d\rho} = \frac{2\pi \frac{R^4}{4} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{2}{3}\pi R^3} = \frac{3R}{8}.$$

Цент масс имеет координаты $C\left(0;0;\dfrac{3R}{8}\right)$.

4.7 Криволинейные интегралы I рода

4.7.1 Определение криволинейного интеграла I рода

Рассмотрим в пространстве R^3 кусочно-гладкую пространственную кривую *l* (или *AB*), в точках дуги которой определена непрерывная функция $f(x,y,z)$. Кривую *l* произвольным образом разобьем на части l_i длиной $\Delta l_i, i = 1,2,\ldots,n$. В части l_i выберем произвольную точку $(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)$ и составим интегральную сумму $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)\Delta l_i$. Пусть $\Delta = \max\limits_{1\le i\le n} \Delta l_i$ – диаметр разбиения кривой *l*. Если существует конечный предел интегральной суммы при Δ, стремящемся к нулю, и этот предел не зависит ни от способа деления дуги *l* на части l_i, ни от выбора точек $(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i) \in l_i$, то этот предел называется криволинейным интегралом первого рода (КРИ-I) по дуге *l* от функции $f(x,y,z)$. Таким образом, по определению

$$\int\limits_l f(x,y,z)dl = \lim_{\Delta\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)\Delta l_i . \tag{4.3}$$

Условие существования КРИ-I (существования предела интегральной суммы (4.3) при $\Delta \to 0 \ (n \to \infty)$) представляет следующая теорема.

Теорема 4.5. *Если функция $f(x,y,z)$ непрерывна в каждой точке кусочно-гладкой кривой, то криволинейный интеграл I рода существует, и его величина не зависит ни от способа разбиения кривой на части, ни от выбора точек в них.*

Кривая кусочно-гладкая, если в каждой ее точке (кроме конечного числа точек разрыва и только первого рода) $(x,y,z) \in l$ существует касательная к данной кривой и положение ее непрерывно меняется при перемещении точки по кривой.

Аналогичным образом вводится понятие криволинейного интеграла от функции $f(x,y)$ по плоской кривой *l*.

4.7.2 Основные свойства КРИ-I

1. Криволинейный интеграл первого рода *не зависит от направления пути интегрирования*. Это означает, что если кривая l соединяет точки A и B, то КРИ-I по дуге l от A до B равен интегралу по этой дуге от B до A. Это символически записывается в виде

$$\int_{AB} f(x,y,z)dl = \int_{BA} f(x,y,z)dl .$$

2. Линейность. Пусть $f(x,y,z)$ и $g(x,y,z)$ – функции, непрерывные вдоль кривой l. Тогда для любых c_1 и c_2 из R

$$\int_l (c_1 f(x,y,z) \pm c_2 f(x,y,z))dl = c_1 \int_l f(x,y,z)dl \pm c_2 \int_l g(x,y,z)dl .$$

Свойство справедливо для любого конечного числа функций.

3. Аддитивность. Если путь интегрирования l – кусочно-гладкая кривая l – состоит из конечного числа гладких дуг $l_k, k = 1,2,\ldots,n, \quad l = l_1 \cup l_2 \cup \ldots \cup l_n$, то

$$\int_l f(x,y,z)dl = \sum_{k=1}^{n} \int_{l_k} f(x,y,z)dl .$$

4. Если для точек $(x,y,z) \in l, \quad f(x,y,z) \geq 0$, то

$$\int_l f(x,y,z)dl \geq 0 .$$

5. Монотонность КРИ-I. Если для точек кривой l выполнено неравенство $f_1(x,y,z) \leq f_2(x,y,z)$, то

$$\int_l f_1(x,y,z)dl \leq \int_l f_2(x,y,z)dl .$$

6. Оценка модуля интеграла. Справедливо неравенство

$$\left| \int_l f(x,y,z)dl \right| \leq \int_l |f(x,y,z)|dl .$$

7. Длина дуги l плоской или пространственной линии вычисляется по формуле

$$l = \int_l dl .$$

8. Теорема о среднем

Теорема 4.6. *Если функция $f(x,y,z)$ непрерывна на кривой l, то на этой кривой найдется точка (x_c, y_c, z_c) такая, что* $\int_l f(x,y,z)dl = f(x_c, y_c, z_c) \cdot l$.

4.7.3 Вычисление КРИ-I

1. Явное представление кривой интегрирования

Пусть кривая l задана на плоскости уравнением $y=g(x), x\in[a,b]$, а $f(x,y)$ – непрерывная в точках этой кривой функция. Точки $(x,y)\in l$ имеют вид $(x,g(x)), x\in[a,b]$. Тогда функция $f(x,y)$ в точках кривой l имеет вид $f(x,y)=f(x,g(x))$, а длина i-й части l_i приближенно $\Delta l_i\approx\sqrt{1+(g'(x_i))^2}\,\Delta x_i,\ i=1,2\ldots,n$; дифференциал дуги кривой $dl=\sqrt{1+(g'(x_i))^2}\,dx$. Тем самым интегральная сумма (4.3) преобразуется к виду $\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i,g(x_i))\sqrt{1+(g'(x_i))^2}\,\Delta x_i$. Отсюда в пределе при $\Delta\to 0$ получим

$$\int\limits_l f(x,y)dl=\int\limits_a^b f(x,g(x))\sqrt{1+(g'(x))^2}\,dx. \qquad (4.4)$$

2. Параметрическое представление кривой интегрирования

Если кривая l (AB) задана параметрическими уравнениями $x=x(t),\ y=y(t),\ t\in[\alpha,\beta]$, где $x(t)$ и $y(t)$ – непрерывно дифференцируемые функции параметра t, причем точке A соответствует $t=\alpha$, точке B – значение $t=\beta$, то аналогично предыдущему, получим

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dl=\int\limits_\alpha^\beta f(x(t),y(t))\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}\,dt. \qquad (4.5)$$

Аналогичная формула имеет место для криволинейного интеграла от функции $f(x,y,z)$ по пространственной кривой l (AB), задаваемой уравнениями $x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t),\ \alpha\le t\le\beta$:

$$\int\limits_{AB} f(x,y,z)dl=\int\limits_\alpha^\beta f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2+(z_t')^2}\,dt. \qquad (4.6)$$

3. Полярное представление кривой интегрирования

Если плоская кривая l задана уравнением $\rho=\rho(\varphi),\ \alpha\le\varphi\le\beta$ в полярных координатах, то $dl=\sqrt{\rho^2+(\rho_\varphi')^2}\,d\varphi$ и

$$\int\limits_l f(x,y)dl=\int\limits_\alpha^\beta f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\sqrt{\rho^2+(\rho_\varphi')^2}\,d\varphi. \qquad (4.7)$$

Подчеркнем, что нижний предел определенного интеграла в формулах (4.4) – (4.7) должен быть меньше верхнего.

Пример 1. Вычислить $\int\limits_L \left(x^5+8xy\right)dl$, где L – дуга кривой $4y=x^4$, заключенная между точками $x=0,\ x=1$.

Решение. Находим $dl=\sqrt{1+x^6}\,dx$, тогда $\int\limits_L \left(x^5+8xy\right)dl=\int\limits_0^1 \left(x^5+2x^5\right)\sqrt{1+x^6}\,dx=$

$$=\int\limits_0^1 3x^5\sqrt{1+x^6}\,dx=3\cdot\frac{1}{6}\int\limits_0^1 \left(1+x^6\right)^{1/2}d\left(1+x^6\right)=\frac{1}{2}\cdot\left.\frac{\left(1+x^6\right)^{3/2}}{3/2}\right|_0^1=\frac{1}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right).$$

Пример 2. Вычислить $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\,dl$, где L – дуга лемнискаты $\rho=a\sqrt{\cos 2\varphi}\quad (0\le\varphi\le\pi/4)$.

Решение. Находим $dl=\sqrt{a^2\cos 2\varphi+\dfrac{a^2\sin^2 2\varphi}{\cos 2\varphi}}\,d\varphi=\dfrac{a\,d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}=\dfrac{a^2d\varphi}{\rho}$, так как $\rho'(\varphi)=\dfrac{-a\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$, тогда

$$\int\limits_L \sqrt{\left(x^2+y^2\right)}\,dl=\int\limits_0^{\pi/4}\sqrt{\left(\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi\right)}\frac{a^2d\varphi}{\rho}=a^2\int\limits_0^{\pi/4}d\varphi=a^2\varphi\Big|_0^{\pi/4}=\frac{\pi a^2}{4}.$$

4.8 Криволинейные интегралы II рода

4.8.1 Определение криволинейного интеграла II рода

Пусть в пространстве R^3 задана кусочно-гладкая пространственная кривая *l* (или *AB*), в каждой точке которой определены непрерывные функции $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$, являющиеся проекциями вектора $\vec{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$ на координатные оси. Предположим, что движение по кривой *l* происходит от начальной точки *A* к конечной точке *B*. Кривая, для которой выбраны начальная и конечная точки и указано направление движения, называется ориентированной: l^+ означает, что кривая *l* ориентирована и движение по ней происходит от начальной точки *A* к конечной *B*, а l^- – что движение происходит от *B* к *A*. Разобьем кривую *l* на части l_i точками $M_0=A, M_1, M_2,\ldots,M_n=B$ в направлении от точки *A* к точке *B* на *n* дуг $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ с длинами $\Delta l_i\ \left(i=1,2,\ldots,n\right)$. Обозначим через $\Delta\vec{S}_i$ вектор $\overrightarrow{M_{i-1}M_i}$, через $\Delta x_i,\Delta y_i,\Delta z_i$ приращения координат x_i,y_i,z_i при переходе от точки M_i к точке M_{i+1}. Тогда $\Delta\vec{S}_i=\Delta x_i\vec{i}+\Delta y_i\vec{j}+\Delta z_i\vec{k}$. В каждой части l_i выберем точку

$N_i = (\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)$, $i = 1,2,\ldots,n$. Скалярное произведение векторов $\vec{F}(x,y,z)$ в точке N_i и $\overrightarrow{\Delta S_i}$ равно $\left(\vec{F}(N_i), \overrightarrow{\Delta S_i}\right)$. Составим интегральную сумму $\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\vec{F}(N_i), \overrightarrow{\Delta S_i}\right)$, обозначим $\Delta = \max\limits_{1\le i\le n}\left|\Delta\vec{S}_i\right|$ диаметр разбиения дуги кривой l. Если при $\Delta \to 0$ существует предел интегральной суммы, не зависящей ни от способа разбиения кривой l на части l_i, ни от выбора точек $N_i \in l_i$, его называют криволинейным интегралом второго рода (КРИ-II) от вектор-функции $\vec{F} = (P, Q, R)$ по кривой l. Итак, по определению

$$\begin{aligned}
&\lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{F}(N_i), \overrightarrow{\Delta S_i}\right) = \lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=1}^{n}\left(P(N_i)\Delta x_i + Q(N_i)\Delta y_i + R(N_i)\Delta z_i\right) = \\
&= \int_l P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dx + R(x,y,z)dx.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Криволинейный интеграл $\int\limits_l P(x,y)dx + Q(x,y)dx$ по плоской кривой l определяется аналогично.

Теорема 4.7. *Если кривая l (AB) кусочно-гладкая, а функции $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ – непрерывные на кривой l, то криволинейный интеграл II рода существует.*

4.8.2 Свойства КРИ-II

Свойства КРИ-II повторяют свойства КРИ-I (кроме первого свойства), поэтому приведем лишь некоторые свойства, характерные для КРИ-II.

1. КРИ-II по кривой l зависит от ее ориентации, т.е. при изменении направления пути интегрирования КРИ-II изменяет свой знак на противоположный, т.е.

$$\int\limits_{AB} = -\int\limits_{BA} \quad \text{или} \quad \int\limits_{l^+} = -\int\limits_{l^-}.$$

С изменением направления проекции дуги $\overset{\frown}{M_i M_{i+1}}$ на оси O_x, O_y, O_z меняют знаки. При этом знак интегральной суммы и предела (4.8) изменится на противоположный.

2. Если кривая l лежит в плоскости, перпендикулярной

а) оси O_x, то $\int\limits_l P(x,y,z)dx = 0$ (все $\Delta x_i = 0$);

б) оси O_y, то $\int\limits_l Q(x,y,z)dy = 0$ (все $\Delta y_i = 0$);

в) оси O_z, то $\int\limits_l R(x,y,z)dz = 0$ (все $\Delta z_i = 0$).

3. Криволинейный интеграл по замкнутой кривой (обозначается $\oint$) не зависит от выбора начальной точки (зависит только от направления обхода кривой).

Действительно, в силу аддитивности $\oint\limits_{AmCnA} = \int\limits_{AmC} + \int\limits_{CnA}$ (рис. 4.20).

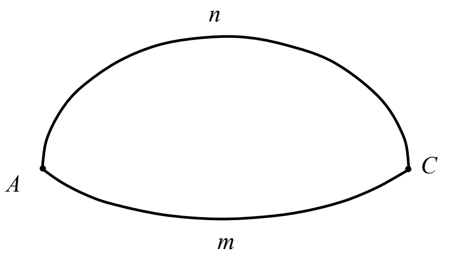


Рисунок 4.20

С другой стороны, $\oint\limits_{CnAmC} = \int\limits_{CnA} + \int\limits_{AmC}$. В последних равенствах равны правые части, следовательно, равны их левые части: $\oint\limits_{AmCnA} = \int\limits_{CnAmC}$.

4.8.3 Вычисление КРИ-II

Вычисление КРИ-II, как и КРИ-I, может быть сведено к вычислению определенного интеграла.

1. Параметрическое представление кривой интегрирования

Пусть кривая *AB* задана параметрическими уравнениями $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$, где функции $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$ непрерывны вместе со своими производными $x'(t),\ y'(t),\ z'(t)$ на отрезке $[\alpha,\beta]$, причем начальной точке *A* кривой *l* соответствует значение параметра $t = \alpha$, а конечной точке *B* – значение $t = \beta$. И пусть функции $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ непрерывны на кривой *AB*. Тогда справедлива формула (4.8) – определение КРИ-II. Преобразуем интегральную сумму к переменной *t*. Так как $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = x(t_i) - x(t_{i-1})$, то по формуле Лагранжа имеем: $\Delta x_i = x'(c_i)\Delta t_i$, где $c_i \in (t_{i-1}, t_i)$, $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$; аналогично $\Delta y_i = y'(c_i)\Delta t_i,\ \Delta z_i = z'(c_i)\Delta t_i$. Выберем точку $N_i(x_i, y_i, z_i)$ так, чтобы $x_i = x(c_i),\ y_i = y(c_i),\ z_i = z(c_i)$. Тогда преобразованная интегральная сумма

$$\sum_{i=1}^{n}\bigl(P(x(c_i),y(c_i),z(c_i))x'(c_i) + Q(x(c_i),y(c_i),z(c_i))y'(c_i) + R(x(c_i),y(c_i),z(c_i))z'(c_i)\bigr)\Delta t_i$$

будет интегральной суммой для функции одной переменной

$$P(x(t),y(t),z(t))x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t) + R(x(t),y(t),z(t))z'(t)$$

на промежутке $[\alpha,\beta]$.

Поэтому

$$\int\limits_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$
$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} P(x(t),y(t),z(t))x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t) + R(x(t),y(t),z(t))z'(t)dt. \tag{4.9}$$

Если кривая l задана в плоскости XY параметрически уравнениями $x = x(t),\ y = y(t),\ t \in [\alpha,\beta]$, и $\vec{F} = (P(x,y),Q(x,y))$ – вектор-функция, определенная в точках этой кривой, то, как и в предыдущем случае, получаем формулу

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t)dt\,. \tag{4.10}$$

2. Явное представление кривой интегрирования

Если кривая AB задана на плоскости уравнением $y = \varphi(x),\ x \in [a,b]$, где функция $\varphi(x)$ и ее производная непрерывны на отрезке $[a,b]$, то из формулы (4.10), приняв x за параметр, имеем параметрические уравнения кривой AB: $x = x, y = \varphi(x),\ x \in [a,b]$, откуда получим:

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} (P(x,\varphi(x)) + Q(x,\varphi(x))\varphi'(x))dx\,. \tag{4.11}$$

В частности,

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} P(x,\varphi(x))dx\,. \tag{4.12}$$

3. Полярное представление кривой интегрирования

Пусть l – плоская кривая, заданная в полярной системе координат уравнением $\rho = \rho(\varphi)\ (\alpha \le \varphi \le \beta)$, тогда

$$\int\limits_{l} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} (-P(\rho\sin\varphi,\rho\cos\varphi)\rho\sin\varphi + Q(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho\cos\varphi)d\varphi\,. \tag{4.13}$$

где $\rho = \rho(\varphi)$.

Замечание. КРИ-I и КРИ-II связаны соотношением

$$\int\limits_{l} Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_{l} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dl\,. \tag{4.14}$$

где α, β, γ – углы, образованные касательной к кривой l в точке $N(x,y,z)$ с осями Ox, Oy, Oz соответственно.

4.8.4 Формула Грина

Формула Грина устанавливает связь между двойным интегралом по области D и криволинейным интегралом по границе L этой области.

Пусть на плоскости Oxy задана область D, ограниченная кусочно-гладкой кривой, пересекающейся с прямыми, параллельными координатным осям не более чем в двух точках, т.е. область D – правильная.

Теорема 4.8. *Если функции* $P(x,y)$ *и* $Q(x,y)$ *непрерывны вместе со своими частными производными* $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ *и* $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ *в области D, то имеет место формула*

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint\limits_L Pdx + Qdy, \tag{4.15}$$

где L – граница области D и интегрирование вдоль кривой L производится в положительном направлении (т.е. при движении вдоль кривой, область D остается слева).

Формула (4.15) называется формулой Грина.

Доказательство. Пусть $y = \varphi_1(x)$ – уравнение дуги AnB, а $y = \varphi_2(x)$ – уравнение дуги AmB (см. рис. 4.20). Найдем сначала $\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy$. По правилу вычисления двойного интеграла, имеем: $\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = \int\limits_a^b dx \cdot P(x,y)\Big|_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} = \int\limits_a^b P(x,\varphi_2(x))dx - \int\limits_a^b P(x,\varphi_1(x))dx$.

Или, согласно формуле (4.12),

$$\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int\limits_{AmM} P(x,y)dx - \int\limits_{AnB} P(x,y)dx = -\int\limits_{BmA} P(x,y)dx - \int\limits_{AnB} P(x,y)dx = -\oint\limits_L P(x,y)dx. \tag{4.16}$$

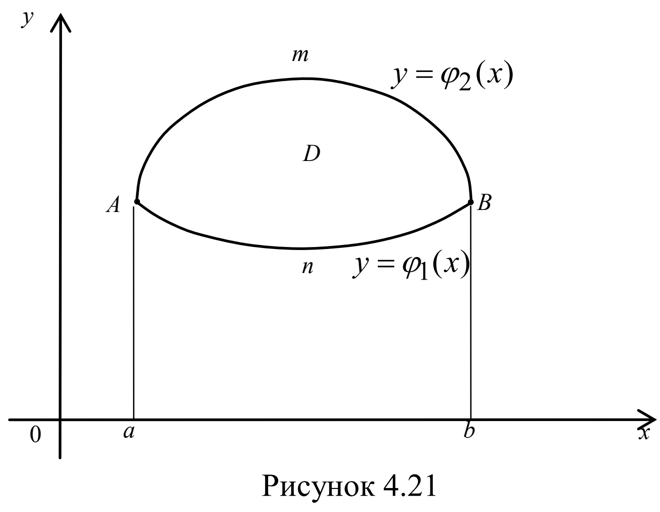


Рисунок 4.21

Аналогично доказывается, что

$$\iint\limits_{D} \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \oint\limits_{L} Q(x, y) dy \,. \tag{4.17}$$

Если из равенства (4.17) вычесть равенство (4.16), то получим формулу (4.15). Теорема доказана.

Замечание. Формула (4.15) справедлива и для произвольной области, которую можно разбить на конечное число правильных областей.

4.8.5 Условия независимости КРИ-II от пути интегрирования

Пусть $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ – две произвольные точки односвязной области D плоскости Oxy (область D называется односвязной, если для любого замкнутого контура, лежащего в этой области, ограниченная им часть плоскости целиком принадлежит D (область без «дыр»)). Точки A и B можно соединить различными линиями (на рис. 4.22 – это L_1, L_2, L_3). По каждой из этих кривых интеграл $I = \int\limits_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ имеет, вообще говоря, свое значение.

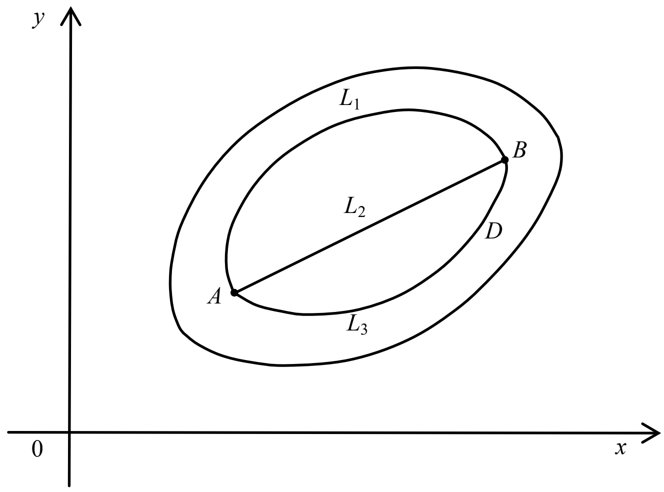


Рисунок 4.22

Если же его значения по всевозможным кривым AB одинаковы, то говорят, что интеграл I не зависит от вида пути интегрирования. В этом случае для интеграла I достаточно отметить лишь его начальную точку $A(x_1, y_1)$ и его конечную точку $B(x_2, y_2)$ пути. Записывают:

$$I = \int\limits_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy \,. \tag{4.18}$$

Каковы же условия, при которых КРИ-II не зависит от вида пути интегрирования?

Теорема 4.9. *Для того, чтобы криволинейный интеграл* $\int\limits_L Pdx + Qdy$ *не зависел от пути интегрирования в односвязной области D, в которой функции* $P(x, y), Q(x, y)$ *непрерывны вместе со своими частными производными, необходимо и достаточно, чтобы в каждой точке этой области выполнялось условие*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \qquad (4.19)$$

Докажем достаточность условия (4.19). Рассмотрим произвольный замкнутый контур *AmBnA* (или *L*) в области *D* (рис. 4.23). Для него имеет место формула Грина (4.15). В силу условия (4.19) имеем $\oint\limits_L Pdx + Qdy = 0$, или $\oint\limits_{AmBnA} Pdx + Qdy = 0$. Учитывая свойства криволинейного интеграла, имеем:

$$\oint\limits_{AmBnA} Pdx + Qdy = \int\limits_{AmB} Pdx + Qdy + \int\limits_{BnA} Pdx + Qdy = \int\limits_{AmB} Pdx + Qdy - \int\limits_{AnB} Pdx + Qdy, \text{ т.е.}$$

$$\int\limits_{AmB} Pdx + Qdy = \int\limits_{AnB} Pdx + Qdy.$$

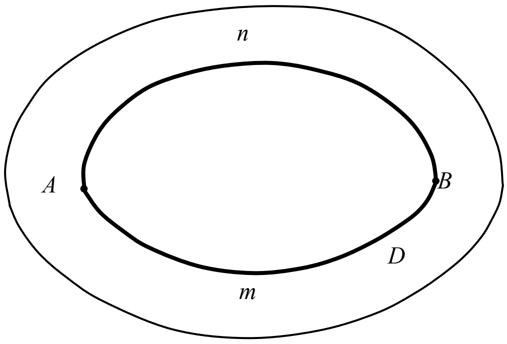


Рисунок 4.23

Полученное равенство означает, что криволинейный интеграл не зависит от пути интегрирования. Достаточность условия (4.19) доказана. В ходе доказательства теоремы получено, что если выполняется условие $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, то интеграл по замкнутому контуру равен нулю: $\oint\limits_L Pdx + Qdy = 0$. Верно и обратное утверждение.

Следствие 1. Если выполнено условие (4.19), то подынтегральное выражение $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ является полным дифференциалом некоторой функции $u = u(x, y)$, т.е.

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = dU(x, y). \qquad (4.20)$$

Тогда (4.18): $I = \int\limits_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int\limits_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} dU(x, y) = U(x, y)\Big|_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} = U(x_2, y_2) - U(x_1, y_1),$

т.е.

$$\int\limits_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = U(x_2,y_2) - U(x_1,y_1). \qquad (4.21)$$

Формула (4.21) называется обобщенной формулой Ньютона-Лейбница для криволинейного интеграла от полного дифференциала.

Следствие 2. Если подынтегральное выражение $Pdx + Qdy$ есть полный дифференциал и путь интегрирования L замкнутый, то $\oint\limits_L Pdx + Qdy = 0$.

4.8.6 Восстановление функции по ее полному дифференциалу

1. Чтобы не спутать переменную интегрирования x с верхним пределом x, переменную интегрирования обозначают другой буквой (например, t, ε и т.д.).

2. Функцию $U = U(x,y)$, удовлетворяющую условию (8.12), можно найти, используя формулу

$$U(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(t,y_0)dt + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,\varepsilon)d\varepsilon + C. \qquad (4.22)$$

В качестве начальной точки (x_0, y_0) обычно берут точку $(0,0)$ – начало координат.

3. Аналогичные результаты справедливы для криволинейного интеграла

$$\int\limits_L Pdx + Qdy + Rdz$$

по пространственной кривой. Условие (4.19), равенство (4.20), формулы (4.21) и (4.22) имеют соответственно вид:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}; \quad Pdx + Qdy + Rdz = dU(x,y,z);$$

$$\int\limits_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} Pdx + Qdy + Rdz = U(x_2,y_2,z_2) - U(x_1,y_1,z_1);$$

$$U(x,y,z) = \int\limits_{x_0}^{x} P(t,y_0,z_0)dt + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,\varepsilon,z_0)d\varepsilon + \int\limits_{z_0}^{z} R(x,y,\eta)d\eta + C.$$

В частности, если область выпукла и содержит начало координат, то за точку (x_0, y_0, z_0) можно принять начало координат $(0,0,0)$.

Пример 1. Вычислить $\int\limits_L \cos^3 x\,dx + \dfrac{dy}{y^3}$, где L – дуга кривой $y = \operatorname{tg} x \quad (\pi/4 \le x \le \pi/2)$.

Решение.

$$\int\limits_L \cos^3 x\,dx + \frac{dy}{y^3} = \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \cos^3 x\,dx + \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos^3 x\,dx}{\sin^3 \cos^2 x} = \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} (1-\sin^2 x)\,d(\sin x) + \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{d(\sin x)}{\sin^3 x} =$$

$$= \left(\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{1}{2\sin^2 x} \right)\Bigg|_{\pi/4}^{\pi/2} = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 + \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}\right)^2 = \frac{7}{6} - \frac{5}{12}\sqrt{2}.$$

Пример 2. Вычислить $\int\limits_L ydx + xdy$, где L – дуга астроиды $x = a\cos^3 t,\ \ y = a\sin^3 t$ $(0 \le t \le \pi/4)$.

Решение. Найдем $dx = -3a\cos^2 t \cdot \sin t\,dt,\ \ dy = 3a\sin^2 t \cdot \cos t\,dt$. Следовательно:

$$\int\limits_L ydx + xdy = \int\limits_0^{\pi/4} \left(a\sin^3 t(-3a\cos^2 t \cdot \sin t) + a\cos^3 t \cdot 3a\sin^2 t \cdot \cos t \right) dt =$$

$$= 3a^2 \int\limits_0^{\pi/4} \sin^2 t \cdot \cos^2 t(\cos^2 t - \sin^2 t\cdot)\,dt = 3a^2 \int\limits_0^{\pi/4} \frac{\sin^2 2t}{4} \cdot \cos 2t\,dt =$$

$$= \frac{3a^2}{8} \int\limits_0^{\pi/4} \sin^2 2t\,d(\sin 2t) = \frac{3a^2}{8} \cdot \frac{\sin^3 2t}{4}\Bigg|_0^{\pi/4} = \frac{a^2}{8}.$$

Пример 3. Применяя формулу Грина, вычислить интеграл $\oint\limits_L -x^2 ydx + xy^2 dy$, где L – окружность $x^2 + y^2 = R^2$, пробегаемая против хода часовой стрелки.

Решение. Используя формулу Грина, сведем криволинейный интеграл к двойному интегралу

$$\oint\limits_L -x^2 ydx + xy^2 dy = \iint\limits_D \left(y^2 + x^2\right) dxdy \text{, т.к. } \begin{cases} P(x,y) = -x^2 y, \\ Q(x,y) = xy^2, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y} = -x^2, \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} = y^2. \end{cases}.$$

Для вычисления двойного интеграла введем полярные координаты:

$$\iint\limits_D \left(y^2 + x^2\right) dxdy = \begin{vmatrix} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ |I| = \rho \end{vmatrix} = \iint\limits_S \rho^2 \cdot \rho\, d\varphi\, d\rho = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R \rho^3\, d\rho = 2\pi \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{\pi R^4}{4},$$

где I – якобиан преобразования.

Пример 4. Вычислить криволинейный интеграл, предварительно проверив, зависит ли он от пути интегрирования

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} (3x^2 y - 4xy^2)\,dx + (x^3 - 4x^2 y + 3y^2)\,dy \text{, где } A(-1,-1),\ B(1,1).$$

Решение. В нашем случае $\begin{array}{l} P(x,y)=3x^2y-4xy^2, \\ Q(x,y)=x^3-4x^2y+3y^2, \end{array}$

тогда $\dfrac{\partial P}{\partial y}=3x^2-8xy,\quad \dfrac{\partial Q}{\partial x}=3x^2-8xy$, т.е. условие независимости выполнено. Определим функцию $U(x,y)$, полный дифференциал которой, равен подынтегральному выражению

$dU(x,y)=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$, т.е.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x}=P(x,y) \\ \dfrac{\partial U}{\partial y}=Q(x,y) \end{cases} \Rightarrow \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x}=3x^2y-4xy^2, \\ \dfrac{\partial U}{\partial y}=x^3-4x^2y+3y^2. \end{cases}$$

Так как $\dfrac{\partial U}{\partial x}=3x^2y-4xy^2$, то $U(x,y)=\int(3x^2y-4xy^2)dx=x^3y-2x^2y^2+\varphi(y)$,

где $\varphi(y)$ – неизвестная функция, для нахождения которой продифференцируем полученное равенство: $\dfrac{\partial U}{\partial y}=x^3-4x^2y+\varphi'(y)=x^3-4x^2y+3y^2$.

Тогда $\varphi'(y)=3y^2$ и $\varphi(y)=y^3+C$.

Итак, $U(x,y)=x^3y-2x^2y^2+y^3+C$.

Окончательно: $\int\limits_{\overset{\smile}{AB}}(3x^2y-4xy^2)dx+(x^3-4x^2y+3y^2)dy=(x^3y-2x^2y^2+y^3)\Big|_A^B=2$.

4.9 Приложения криволинейных интегралов

4.9.1 Приложения КРИ-I

1. ***Длина кривой***

Длина дуги l плоской или пространственной линии вычисляется по формуле

$l=\int\limits_{AB}dl$.

В частности, если l – плоская линия, заданная уравнением $y=f(x)$, где $a\le x\le b$, то

$l=\int\limits_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$.

Если линия l задана уравнением в полярных координатах $\rho=\rho(\varphi),\ \alpha\le\varphi\le\beta$, то

$l=\int\limits_\alpha^\beta\sqrt{\rho^2+(\rho'_\varphi)^2}\,d\varphi$.

Если линия l задана параметрически $x = x(t),\ y = y(t)\ (t_1 \le t \le t_2)$, то

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\, dt .$$

Если l – пространственная линия, заданная параметрическими уравнениями $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)\ (t_1 \le t \le t_2)$, то

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2 + (z_t')^2}\, dt .$$

2. ***Площадь цилиндрической поверхности***

Если направляющей цилиндрической поверхности служит кривая AB, лежащая в плоскости Oxy, а образующая параллельна оси Oz (см. рис. 4.24), то площадь поверхности, задаваемой функцией $z = f(x, y)$, находится по формуле $Q = \int\limits_{AB} f(x, y) dl$.

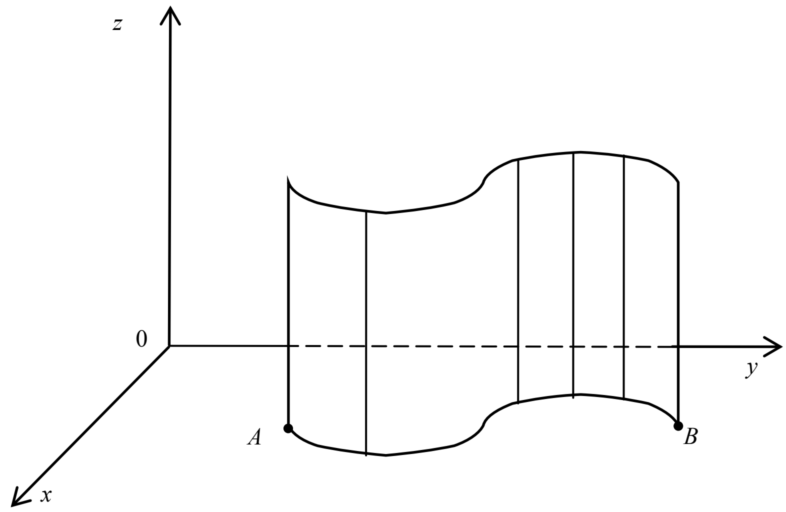


Рисунок 4.24

3. Масса кривой

Масса материальной кривой AB (провод, цепь, трос, …) определяется формулой $m = \int\limits_{AB} \gamma(x, y) dl$, где $\gamma(x, y)$ – плотность кривой.

Доказательство. Разобьем кривую AB на n элементарных дуг $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}\ (i = 1,2,\ldots,n)$. Пусть $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ – произвольная точка дуги $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$. Считая приближенно участок дуги однородным, т.е. считая, что плотность в каждой точке дуги такая же, как и в точке $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$, найдем приближенное значение массы m_i дуги $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$: $m_i \approx \gamma(\bar{x}_i, \bar{y}_i)\Delta l_i$.

Суммируя, находим приближенное значение массы m:

$$m \approx \sum_{i=1}^{n} \gamma(\bar{x}_i, \bar{y}_i)\Delta l_i .$$

За массу кривой AB примем предел этой суммы при условии, что $\Delta = \max \Delta l_i \to 0 \ (n \to \infty)$, т.е.

$$m = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} \gamma(\bar{x}_i, \bar{y}_i)\Delta l_i = \int\limits_{AB} \gamma(x, y)dl .$$

Заметим, что предел существует, если кривая AB кусочно-гладкая, а плотность задана непрерывной в каждой точке AB функцией. Аналогично, масса пространственной дуги l, вдоль которой распределено вещество с плотностью $\gamma = \gamma(x, y, z)$, определяется формулой

$$m = \int\limits_{AB} \gamma(x, y, z)dl .$$

4. Статистические моменты, центр тяжести

Статистические моменты плоской материальной кривой относительно осей Ox и Oy определяются по формулам

$$S_x = \int\limits_{AB} y\gamma(x, y)dl, \ S_y = \int\limits_{AB} x\gamma(x, y)dl ,$$

координаты центра тяжести $x_c = \dfrac{S_y}{m}, \ y_c = \dfrac{S_x}{m}$.

Координаты центра тяжести пространственной материальной дуги определяются по формулам

$$x_c = \frac{1}{m} \int\limits_{AB} x\gamma(x, y, z)dl, \ y_c = \frac{1}{m} \int\limits_{AB} y\gamma(x, y, z)dl, \ z_c = \frac{1}{m} \int\limits_{AB} z\gamma(x, y, z)dl .$$

5. Моменты инерции

Для плоской материальной кривой AB моменты I_x, I_y, I_0 инерции относительно осей Ox, Oy и начала координат соответственно равны:

$$I_x = \int\limits_{AB} y^2\gamma(x, y)dl, \ I_y = \int\limits_{AB} x^2\gamma(x, y)dl, \ I_0 = \int\limits_{AB} \left(x^2 + y^2\right)\gamma(x, y)dl .$$

4.9.2 Приложения КРИ-II

6. Площадь плоской фигуры

Площадь S плоской фигуры, расположенной в плоскости Oxy и ограниченной замкнутой линией L, можно найти по формуле

$$S = \frac{1}{2} \oint\limits_{L} xdy - ydx , \qquad (4.23)$$

при этом кривая L обходится против часовой стрелки.

Доказательство. Положив в формуле Грина (4.15) $P(x, y) = 0, Q(x, y) = x$, получим $\iint\limits_D (1 - 0) dxdy = \oint\limits_L 0 \cdot dx + xdy$, или

$$S = \oint\limits_L xdy. \tag{4.24}$$

Аналогично, полагая $P = -y, Q = 0$, найдем еще одну формулу для вычисления площади фигуры с помощью криволинейного интеграла:

$$S = -\oint\limits_L ydx. \tag{4.25}$$

Сложив почленно равенства (4.24) и (4.25) и разделив на два, получим формулу (4.23). Эта формула используется чаще, чем формулы (4.24) и (4.25).

7. Работа переменной силы

Переменная сила $\vec{F}(P(x, y), Q(x, y))$ на плоскости на криволинейном участке AB производит работу, которая находится по формуле

$$A = \int\limits_{AB} Pdx + Qdy. \tag{4.26}$$

Доказательство. Пусть материальная точка (x, y) под действием переменной силы $\vec{F}$ перемещается в плоскости Oxy по некоторой кривой AB (от точки A до точки B).

Разобьем кривую AB точками $M_0 = A, M_1, M_2, \ldots, M_n = B$ на n «элементарных» дуг $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ длины Δl_i и в каждой из них возьмем произвольную точку $C_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i), i = 1,2,\ldots,n$ (см. рис. 4.25). Заменим каждую дугу $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ вектором $\overrightarrow{M_{i-1}M_i} = (\Delta x_i, \Delta y_i)$, а силу $\vec{F}$ будем считать постоянной на векторе перемещения $\overrightarrow{M_{i-1}M_i}$ и равной заданной силе в точке C_i дуги $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$: $\vec{F}_i = (P(\bar{x}_i, \bar{y}_i), Q(\bar{x}_i, \bar{y}_i))$.

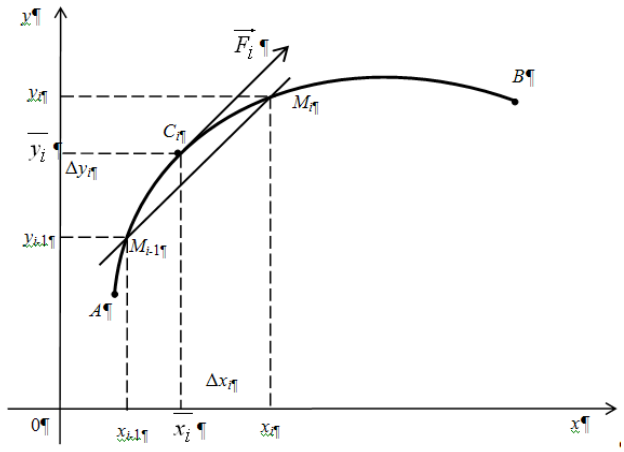


Рисунок 4.25

Тогда скалярное произведение $\vec{F}_i \cdot \overrightarrow{M_{i-1}M_i}$ можно рассматривать как приближенное значение работы $\vec{F}_i$ вдоль дуги $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$: $A \approx \vec{F}_i \cdot \overrightarrow{M_{i-1}M_i} = \left(P(\bar{x}_i, \bar{y}_i)\Delta x_i + Q(\bar{x}_i, \bar{y}_i)\Delta y_i\right)$.

Приближенное значение работы A силы $\vec{F}$ на всей кривой составит величину

$$A = \sum_{i=1}^{n} A_i \approx \sum_{i=1}^{n} P(\bar{x}_i, \bar{y}_i)\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} Q(\bar{x}_i, \bar{y}_i)\Delta y_i .$$

За точное значение работы A примем предел полученной суммы при $\Delta = \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta l_i \to 0$ (тогда, очевидно, $\Delta x_i \to 0$ и $\Delta y_i \to 0$):

$$A = \lim_{\substack{\Delta \to 0 \\ (n \to \infty)}} \sum_{i=1}^{n} P(\bar{x}_i, \bar{y}_i)\Delta x_i + Q(\bar{x}_i, \bar{y}_i)\Delta y_i = \int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy .$$

Замечание. В случае пространственной кривой AB имеем:

$$A = \int_{AB} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz .$$

Пример 1. Найти длину дуги кривой $y = \ln\cos x$ между точками $x = 0$ и $x = \frac{\pi}{3}$.

Решение. Найдем производную $y' = -\frac{\sin x}{\cos x} = -tgx$. Тогда

$$l = \int_0^{\pi/3} \sqrt{1 + tg^2 x}\, dx = \int_0^{\pi/3} \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}\, dx = \int_0^{\pi/3} \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|\Bigg|_0^{\pi/3} =$$

$$= \ln\left|tg\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right)\right| - \ln\left|tg\left(\frac{\pi}{4}\right)\right| = \ln\left|tg\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right|.$$

Пример 2. Найти длину дуги линии $\rho = 1 + \cos\varphi, \quad 0 \le \varphi \le \pi$.

Решение. Производная функции $\rho'_\varphi = -\sin\varphi$. Тогда

$$l = \int_0^{\pi} \sqrt{\rho^2 + (\rho'_\varphi)^2}\, d\varphi = \int_0^{\pi} \sqrt{(1 + \cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi}\, d\varphi = \int_0^{\pi} \sqrt{1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi + \sin^2\varphi}\, d\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi} \sqrt{2 + 2\cos\varphi}\, d\varphi = \sqrt{2}\int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos\varphi}\, d\varphi = \sqrt{2}\int_0^{\pi} \sqrt{2\cos^2\frac{\varphi}{2}}\, d\varphi = 2\int_0^{\pi} \cos\frac{\varphi}{2} d\varphi = 4\sin\frac{\varphi}{2}\Bigg|_0^{\pi} = 4.$$

Пример 3. Найти длину дуги винтовой линии $\begin{cases} x = 4a\cos t \\ y = 4a\sin t \\ z = 3at \qquad (0 \le t \le 2\pi). \end{cases}$

Решение. Найдем производные $\begin{cases} x'_t = -4a\sin t, \\ y'_t = 4a\cos t, \\ z'_t = 3a, \end{cases}$ тогда

$$l=\int_0^{2\pi}\sqrt{16a^2\sin^2 t+16a^2\cos^2 t+9a^2}\,dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{16a^2+9a^2}\,dt=5a\int_0^{2\pi}dt=10\pi a.$$

Пример 4. Найти массу дуги лемнискаты $\rho=\sqrt{\cos 2\varphi}\quad 0\le\varphi\le\pi/3$, если линейная плотность $\gamma(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$.

Решение. В полярных координатах дифференциал дуги кривой равен: $dl=\sqrt{\rho^2+(\rho')^2}\,d\varphi$. В нашем случае $\rho=\sqrt{\cos 2\varphi}$, тогда

$$\rho'(\varphi)=\frac{-\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}},\qquad \gamma(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi}=\rho.$$

Следовательно:

$$m=\int_0^{\pi/3}\rho\sqrt{\cos 2\varphi+\frac{\sin^2 2\varphi}{\cos 2\varphi}}\,d\varphi=\int_0^{\pi/3}\rho\sqrt{\frac{\cos^2\varphi+\sin^2 2\varphi}{\cos 2\varphi}}\,d\varphi=\int_0^{\pi/3}\frac{\rho}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\,d\varphi=$$
$$=\int_0^{\pi/3}\frac{\sqrt{\cos 2\varphi}}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\,d\varphi=\int_0^{\pi/3}d\varphi=\pi/3.$$

Пример 5. Вычислить работу переменной силы $\overline{F}$ при перемещении материальной точки вдоль дуги $\overset{\cup}{AB}$, если $\overline{F}=x\overline{i}+y\overline{j}+z\overline{k}$, $\overset{\cup}{AB}$ – дуга кривой $\begin{cases}x=t,\\ y=2t,\\ z=3t,\quad (0\le t\le 1).\end{cases}$

Решение.

$$A=\int_{AB}xdx+ydy+zdz=\int_0^1(t+2t\cdot 2+3t\cdot 3)dt=\int_0^1 14t\cdot dt=14\cdot\left.\frac{t^2}{2}\right|_0^1=7\text{ (ед. работы)}.$$

Пример 6. Найти координаты центра тяжести винтовой линии

$x=3\cos t,\ \ y=3\sin t,\ \ z=2t\quad 0\le t\le\dfrac{\pi}{2}$, если $\gamma(x,y,z)=kxy$.

Решение. Так как $x'=-3\sin t,\ \ y'=3\cos t,\ \ z'=2$, то

$$dl=\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2+(z_t')^2}\,dt=\sqrt{9\sin^2 t+9\cos^2 t+4}\,dt=\sqrt{13}\,dt.$$

Масса данной дуги:

$$m=\int_L\gamma(x,y,z)dl=\int_L kxydl=\int_0^{\pi/2}9k\sin t\cos t\sqrt{13}dt=9k\sqrt{13}\int_0^{\pi/2}\sin t\,d(\sin t)=$$
$$=9k\sqrt{13}\left.\frac{\sin^2 t}{2}\right|_0^{\pi/2}=\frac{9\sqrt{13}k}{2}.$$

$$X_c=\frac{1}{m}\int_L x\gamma(x,y,z)dl=\frac{2}{9\sqrt{13}k}\int_L xkxydl=\frac{2k}{9\sqrt{13}k}\int_L x^2y\cdot\sqrt{13}\,dt=$$

$$=\frac{2}{9}\int_0^{\pi/2}9\cos^2 t\cdot 3\sin t\,dt=-6\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\,d(\cos t)\ =-6\frac{\cos^3 t}{3}\bigg|_0^{\pi/2}=2.$$

$$Y_c=\frac{1}{m}\int_L y\gamma(x,y,z)dl=\frac{2}{9\sqrt{13}\cdot k}\int_L ykxydl=\frac{2k}{9\sqrt{13}k}\int_L xy^2\cdot\sqrt{13}\,dt=$$

$$=\frac{2}{9}\int_0^{\pi/2}3\cos t\cdot 9\sin^2 t\,dt=6\int_0^{\pi/2}\sin^2 t\,d(\sin t)\ =6\frac{\sin^3 t}{3}\bigg|_0^{\pi/2}=2.$$

$$Z_c=\frac{1}{m}\int_L z\gamma(x,y,z)dl=\frac{2}{9\sqrt{13}\cdot k}\int_L z\cdot kxydl=\frac{2k}{9\sqrt{13}\cdot k}\int_L 2t\cdot 3\cos t\cdot 3\sin t\cdot\sqrt{13}\,dt=$$

$$=4\int_0^{\pi/2}t\cos t\cdot\sin t\,dt=2\int_0^{\pi/2}t\sin 2tdt\ =\begin{vmatrix}u=t & & du=dt\\ & \Rightarrow & \\ dv=\sin 2tdt & & v=-\frac{1}{2}\cos 2t\end{vmatrix}=$$

$$=2\left(-\frac{t}{2}\cos 2t\bigg|_0^{\pi/2}+\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\cos 2t\,dt\right)=2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}\sin 2t\bigg|_0^{\pi/2}\right)=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}.$$

Таким образом, искомый центр тяжести находится в точке $O(2,2,\pi/2)$.

Пример 7. Найти координаты центра тяжести однородной дуги циклоиды

$$\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}\qquad (0\le t\le 2\pi).$$

Решение. В случае однородной дуги линейную плотность $\gamma(x,y,z)$ можно считать постоянной, в частности, положив $\gamma(x,y,z)=1$. Находим массу дуги циклоиды:

$$m=\int_L dl=\int_0^{2\pi}\sqrt{(x'_{(t)})^2+(y'_{(t)})^2}dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{(a(1-\cos t))^2+a^2\sin^2 t}dt=$$

$$=2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt=-4a\cos\frac{t}{2}\bigg|_0^{2\pi}=8a.$$

Находим интегралы:

$$\int_L x_{(t)}\sqrt{(x'_{(t)})^2+(y'_{(t)})^2}\,dt=2a^2\int_0^{2\pi}(t-\sin t)\sin\frac{t}{2}dt=2a^2\left(\int_0^{2\pi}t\sin\frac{t}{2}dt-\int_0^{2\pi}\sin t\cdot\sin\frac{t}{2}\right)dt=$$

$$=2a^2\left(\int_0^{2\pi}t\sin\frac{t}{2}dt-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos\frac{t}{2}\,dt+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos\frac{3t}{2}\,dt\right)=2a^2\left(-2\int_0^{2\pi}td\left(\cos\frac{t}{2}\right)-\sin\frac{t}{2}\bigg|_0^{2\pi}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{3}\sin\frac{3t}{2}\bigg|_0^{2\pi}\right)=-4a^2\left(t\cdot\cos\frac{t}{2}\bigg|_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}\cos\frac{t}{2}\,dt\right)=-4a^2\left(-2\pi-2\sin\frac{t}{2}\bigg|_0^{2\pi}\right)=8\pi a^2.$$

Аналогично:

$$\int\limits_L y(t)\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt = 2a^2\int\limits_0^{2\pi}(1-\cos t)\sin\frac{t}{2}dt = 2a^2\left(\int\limits_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt - \int\limits_0^{2\pi}\cos t\cdot\sin\frac{t}{2}dt\right) =$$

$$= 2a^2\left(-2\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt - \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\sin\frac{3t}{2}dt\right) = 2a^2\left(4-\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{3}\cos\frac{3t}{2}\Big|_0^{2\pi}\right) = \frac{32}{3}a^2.$$

Окончательно, координаты центра тяжести равны: $x_0 = \pi a$, $\quad y_0 = \dfrac{4}{3}a$.

4.10 Поверхностные интегралы I рода

4.10.1 Определение поверхностного интеграла I рода

Пусть в точках некоторой поверхности *S*, с площадью *S*, пространства *Oxyz* определена непрерывная функция $f(x,y,z)$. Разобьем поверхность *S* на *n* частей S_i, площадь которых обозначим через ΔS_i (рис. 4.26), а диаметры – через d_i, $i = 1,2,\dots,n$. В каждой части S_i возьмем произвольную точку $M_i(x_i,y_i,z_i)$ и составим сумму

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\Delta S_i\,. \qquad (4.27)$$

Она называется интегральной суммой для функции $f(x,y,z)$ по поверхности *S*. Если при $\Delta = \max\limits_{1\le i\le n} d_i \to 0$ интегральная сумма (4.27) имеет предел, то он называется поверхностным интегралом I рода от функции $f(x,y,z)$ по поверхности *S* и обозначается $\iint\limits_S f(x,y,z)dS$.

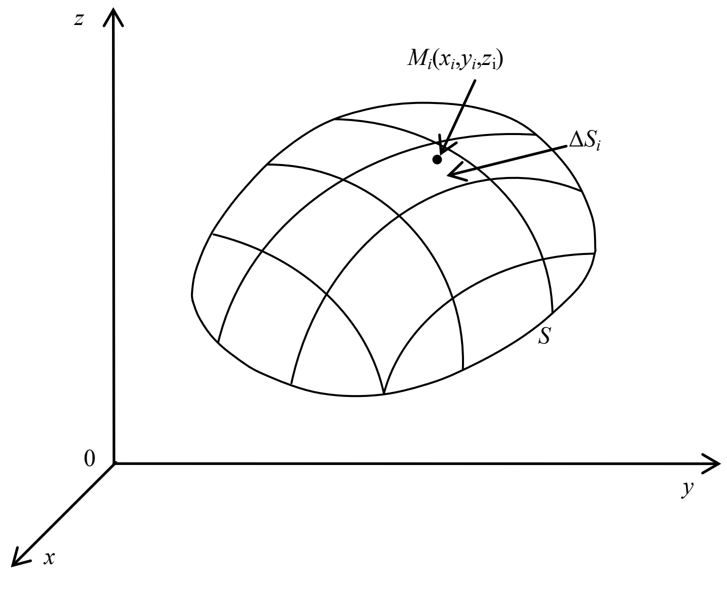


Рисунок 4.26

Таким образом, по определению,

$$\iint_S f(x,y,z)dS = \lim_{\substack{\Delta\to 0\\(n\to\infty)}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\Delta S_i\,. \tag{4.28}$$

Отметим, что если поверхность S гладкая (в каждой ее точке существует касательная плоскость, которая непрерывно меняется с перемещением точки по поверхности), а функция $f(x,y,z)$ непрерывна на этой поверхности, то поверхностный интеграл существует (теорема существования).

4.10.2 Основные свойства поверхностного интеграла I рода

1. *Линейность*

$$\iint_S (c_1 f_1(x,y,z) \pm c_2 f_2(x,y,z))dS = c_1\iint_S f_1(x,y,z)dS \pm c_2\iint_S f_2(x,y,z)dS\,,$$

где c_1, c_2 – числа. Свойство справедливо для любого конечного числа функций $f_i(x,y,z),\, i=1,2,\ldots,n$.

2. *Аддитивность*

Если поверхность S разбить на конечное число частей $S_1, S_2, \ldots, S_n$ так, что $S = S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_n$, а пересечение $S_1 \cap S_2 \cap \ldots \cap S_n$ состоит лишь из границы, их разделяющей, то

$$\iint_S f(x,y,z)dS = \sum_{i=1}^{n} \iint_{S_i} f(x,y,z)dS\,.$$

3. Монотонность

Если на поверхности S выполнено неравенство $f_1(x,y,z) \le f_2(x,y,z)$, то $\iint_S f_1(x,y,z)dS \le \iint_S f_2(x,y,z)dS$.

4. $\iint_S dS = S$, где S – площадь поверхности *S*.

5. Оценка модуля интеграла

$$\left|\iint_S f(x,y,z)dS\right| \le \iint_S |f(x,y,z)|dS\,.$$

6. ***Теорема о среднем значении***

Теорема 4.10. *Если* $f(x,y,z)$ *непрерывна на поверхности S, то на этой поверхности существует точка* (x_c,y_c,z_c) *такая, что*

$\iint\limits_S f(x,y,z)dS = f(x_c,y_c,z_c)\cdot S$ *, где S – площадь поверхности S.*

7. Величина поверхностного интеграла первого рода не зависит от выбора стороны поверхности.

4.10.3 Вычисление поверхностного интеграла I рода

Вычисление поверхности интеграла I рода сводится к вычислению двойного интеграла по области *D* – проекции поверхности *S* на плоскость *Oxy*.

Разобьем поверхность *S* на части S_i, $i=1,2,\ldots,n$. Обозначим через σ_i проекцию S_i на плоскость *Oxy*. При этом область *D* окажется разбитой на *n* частей $\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n$. Возьмем в σ_i произвольную точку $P_i(x_i,y_i)$ и восстановим перпендикуляр к плоскости *Oxy* до пересечения с поверхностью *S*. Получим точку $M_i(x_i,y_i,z_i)$ на поверхности S_i. Проведем в точке M_i касательную плоскость и рассмотрим ту ее часть T_i, которая на плоскость *Oxy* проектируется в область σ_i (рис. 4.27). Площади элементарных частей S_i,T_i и σ_i обозначим как $\Delta S_i,\Delta T_i,\Delta\sigma_i$ соответственно. Будем приближенно считать, что

$$\Delta T_i \approx \Delta S_i. \tag{4.29}$$

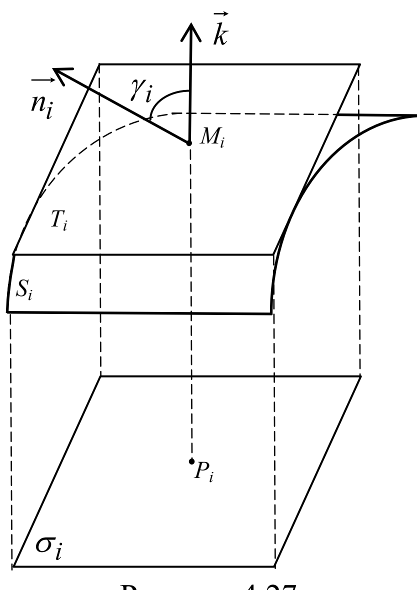


Рисунок 4.27

Обозначив через γ_i острый угол между осью Oz и нормалью $\vec{n}_i$ к поверхности в точке M_i, получаем:

$$\Delta T_i \cdot \cos\gamma_i = \Delta\sigma_i \tag{4.30}$$

(область σ_i есть проекция T_i на плоскость Oxy).

Если поверхность S задана уравнением $z = z(x, y)$, то, как известно, уравнение касательной плоскости в точке M_i есть $z - z_i = z'_x(x_i, y_i)(x - x_i) + z'_y(x_i, y_i)(y - y_i)$, где $z'_x(x_i, y_i), z'_y(x_i, y_i), -1$, – координаты нормального вектора к плоскости. Острый угол γ_i есть угол между векторами $\vec{k}(0,0,1)$ и $\vec{n}_i = \left(-z'_x(x_i, y_i); -z'_y(x_i, y_i); 1\right)$. Следовательно,

$$\cos\gamma_i = \frac{\vec{k} \cdot \vec{n}_i}{|\vec{k}| \cdot |\vec{n}_i|} = \frac{1}{\sqrt{1 + (z'_x(x_i, y_i))^2 + (z'_y(x_i, y_i))^2}}.$$

Равенство (4.30) принимает вид

$$\Delta T_i = \sqrt{1 + (z'_x(x_i, y_i))^2 + (z'_y(x_i, y_i))^2}\,\Delta\sigma_i.$$

В правой части формулы (4.28) заменим ΔS_i (учитывая (4.29)) на полученное выражение для ΔT_i, а z_i заменим на $z(x_i, y_i)$. Поэтому, переходя к пределу при стремлении к нулю наибольшего диаметра S_i (а, следовательно, и σ_i), получаем формулу

$$\iint\limits_S f(x, y, z)dS = \iint\limits_D f(x; y; z(x, y)) \cdot \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\,dxdy, \tag{4.31}$$

выражающую интеграл по поверхности S через двойной интеграл по проекции S на плоскость Oxy.

Отметим, что если поверхность S задана уравнением вида $y = y(x, z)$ или $x = x(y, z)$, то аналогично получим:

$$\iint\limits_S f(x, y, z)dS = \iint\limits_{D_1} f(x; y(x, z); z) \cdot \sqrt{1 + (y'_x)^2 + (y'_z)^2}\,dxdz$$

и (4.32)

$$\iint\limits_S f(x, y, z)dS = \iint\limits_{D_2} f(x(y, z); y; z) \cdot \sqrt{1 + (x'_y)^2 + (x'_z)^2}\,dydz,$$

где D_1 и D_2 – проекции поверхности S на координатные плоскости Oxz и Oyz соответственно.

Пусть поверхность S задана неявно уравнением $F(x, y, z) = 0$ и $F'_z \neq 0, \forall(x, y, z) \in S$. В этом случае равенство $F(x, y, z) = 0$ определяет единственную неявную функцию $z = z(x, y)$, для которой $z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}, z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}$. Тогда формула (4.31) примет вид

$$\iint_S f(x,y,z)dS = \iint_D f(x;y;z)\frac{1}{|F'_z|}\sqrt{(F'_x)^2+(F'_y)^2+(F'_z)^2}\,dxdy, \qquad (4.33)$$

где D – проекция поверхности на плоскость Oxy.

Заметим, что при вычислении интеграла в правой части равенства (4.33) необходимо z выразить из уравнения поверхности $F(x,y,z)=0$.

Пример 1. Вычислить интеграл $\iint_S z(x+y)\,dS$, где S часть поверхности $z=\sqrt{4-x^2}$, отсеченная плоскостями $y=0,\ y=5$ (рис. 4.28).

Решение. Поверхность $z=\sqrt{4-x^2}$ представляет собой верхнюю часть цилиндра $z^2+x^2=4$ с образующими, параллельными оси Oy; $y=0, y=5$ – уравнения плоскостей, параллельных плоскости OXZ. Для вычисления интеграла воспользуемся формулой (4.31).

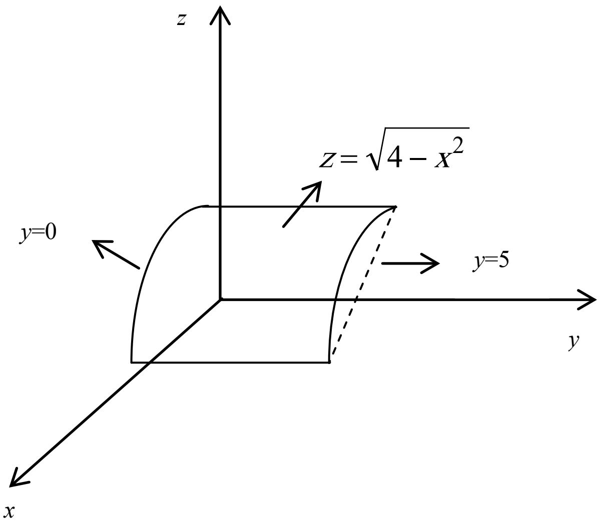


Рисунок 4.28

Проекция рассматриваемой поверхности на плоскость OXY представляет собой прямоугольник (рис. 4.29).

$$z'_x = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}; \quad z'_y = 0.$$

$$\iint_S z(x+y)dS = \iint_D \sqrt{4-x^2}(x+y)\cdot\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}\right)^2}\,dxdy = \iint_D \sqrt{4-x^2}(x+y)\sqrt{\frac{4-x^2+x^2}{4-x^2}}dxdy =$$

$$= \iint_D \sqrt{4-x^2}(x+y)\cdot\frac{2}{\sqrt{4-x^2}}dxdy = 2\iint_D (x+y)dxdy = 2\int_{-2}^{2}dx\int_0^5 (x+y)dy = 2\int_{-2}^{2}\left(xy+\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^5 dx =$$

$$= 2\int_{-2}^{2}\left(5x+\frac{25}{2}\right)dx = \left(5x^2+25x\right)\Big|_{-2}^{2} = 100.$$

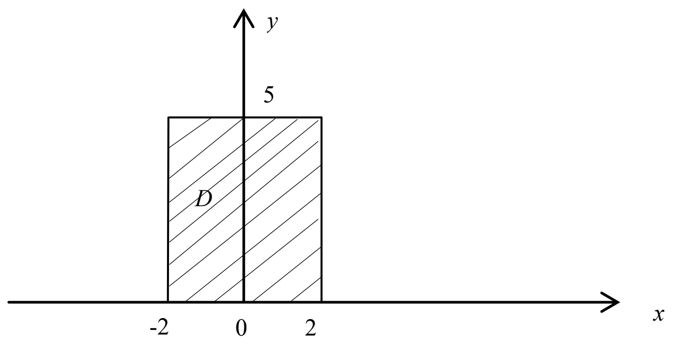


Рисунок 4.29

Пример 2. Вычислить интеграл $\iint\limits_S \left(x^2+y^2\right)dS$, где поверхность S задана уравнением $z=\sqrt{25-x^2-y^2}$.

Решение. Поверхность S представляет собой верхнюю часть сферы $z^2+x^2+y^2=25$ с радиусом $R=5$ (рис. 4.30).

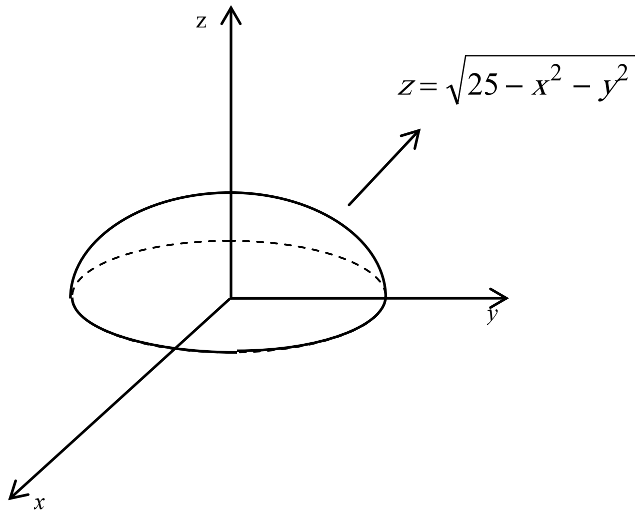


Рисунок 4.30

Для вычисления интеграла воспользуемся формулой (4.31). Для этого найдем

$$z'_x=\frac{(-2x)}{2\sqrt{25-x^2-y^2}}=\frac{-x}{\sqrt{25-x^2-y^2}}, \quad z'_y=\frac{-y}{\sqrt{25-x^2-y^2}}.$$

$$\iint\limits_S \left(x^2+y^2\right)dS=\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)\cdot\sqrt{1+\frac{x^2}{25-x^2-y^2}+\frac{y^2}{25-x^2-y^2}}\,dxdy=$$

$$=\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)\sqrt{\frac{25-x^2-y^2+x^2+y^2}{25-x^2-y^2}}\,dxdy=5\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)\frac{dxdy}{\sqrt{25-x^2-y^2}},$$

где область D – круг $x^2+y^2\le 5$.

Для вычисления последнего интеграла перейдем к полярным координатам:

$$5\iint\limits_D \frac{x^2+y^2}{\sqrt{25-x^2-y^2}}dxdy = \begin{bmatrix} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \\ I=\rho \end{bmatrix} = 5\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^5 \frac{\rho^2\cdot\rho}{\sqrt{25-\rho^2}}d\rho.$$

Интеграл $\int\limits_0^5 \frac{\rho^3}{\sqrt{25-\rho^2}}d\rho$ вычисляем с помощью подстановки $\rho = 5\cdot\sin t$.

$$\int\limits_0^5 \frac{\rho^3}{\sqrt{25-\rho^2}}d\rho = \left| \begin{array}{l} \rho = 5\cdot\sin t, \\ \rho = 5 \Rightarrow \sin t = 1 \Rightarrow t = \pi/2, \\ \rho = 0 \Rightarrow \sin t = 0 \Rightarrow t = 0, \\ d\rho = 5\cos t\, dt \end{array} \right| = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{5^3\sin^3 t\cdot 5\cos t\, dt}{\sqrt{25-25\sin^2 t}} = 5^4\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin^3 t\cos t}{5\cos t} =$$

$$= -5^3\int\limits_0^{\pi/2}\left(1-\cos^2 t\right)d\cos t = -5^3\left(\cos t - \frac{\cos^3 t}{3}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{5^3\cdot 2}{3}.$$

Окончательно получим $5\iint\limits_D \frac{x^2+y^2}{\sqrt{25-x^2-y^2}} = \frac{2}{3}5\int\limits_0^{2/\pi} d\varphi = \frac{4\cdot 5^4\pi}{3}.$

Пример 3. Вычислить $\iint\limits_S \left(x^2+3y^2+z^2+5\right)dS$, где S – часть поверхности $y=\sqrt{x^2+z^2}$, отсеченная плоскостями $y=0,\ y=2$.

Решение. Поверхность S представляет собой верхнюю часть конуса $y^2=x^2+z^2$, заключенную между поверхностями $y=0,\ y=2$ (рис. 4.31).

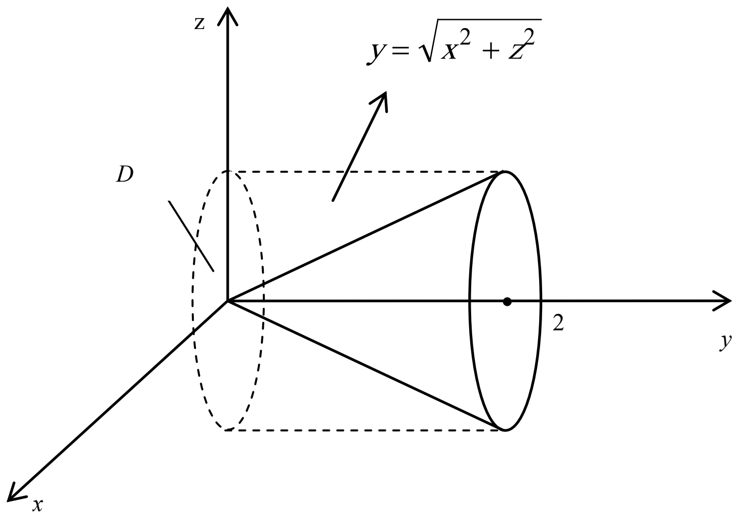


Рисунок 4.31

Так как поверхность задана в виде $y=y(x,z)$, то для вычисления интеграла воспользуемся формулой (4.32). Для этого найдем

$$y'_x = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+z^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}}; \quad y'_z = \frac{z}{\sqrt{x^2+z^2}}.$$

$$\iint_S \left(x^2+3y^2+z^2+5\right)dS = \iint_D \left(x^2+3\left(x^2+z^2\right)+z^2+5\right)\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+z^2}+\frac{z^2}{x^2+z^2}}\,dxdz =$$

$$= \iint_D \left(4x^2+4z^2+5\right)\sqrt{\frac{2\left(x^2+z^2\right)}{x^2+z^2}}\,dxdz = \sqrt{2}\iint_D \left(4x^2+4z^2+5\right)dxdz,$$

где область D – круг $x^2+z^2 \le 4$.

Для вычисления последнего интеграла перейдем к полярным координатам:

$$\sqrt{2}\iint_D \left(4x^2+4z^2+5\right)dxdz = \begin{vmatrix} x = \rho\cos\varphi, \\ z = \rho\sin\varphi, \\ I = \rho \end{vmatrix} = \sqrt{2}\int_0^{2/\pi} d\varphi \int_0^2 \left(4\rho^2+5\right)\rho\, d\rho = \sqrt{2}\cdot 2\pi\left(\rho^3+\frac{5\rho^2}{2}\right)\Bigg|_0^2 =$$

$$= 52\sqrt{2}\pi.$$

4.11 Поверхностные интегралы II рода

4.11.1 Ориентация поверхности

Пусть в пространстве R^3 задана гладкая поверхность S. Возьмем на ней некоторую внутреннюю точку M и проведем через нее вектор нормали к S. Окружим точку M замкнутым контуром Г с выбранным на нем направлением обхода (рис. 4.32). Поверхность S, в каждой точке которой указаны нормальный вектор $\vec{n}$ и направление обхода по контуру Г, называется ориентированной. Сторона поверхности, из каждой точки которой восстанавливается вектор нормали, называется положительной или внешней. Другая сторона поверхности, обращенная в сторону вектора $-\vec{n}$, называется отрицательной или внутренней стороной поверхности S.

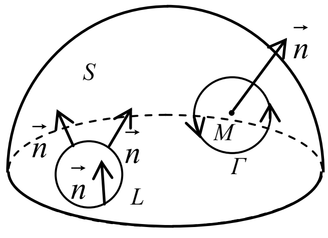


Рисунок 4.32

Поверхности, у которых различают положительные и отрицательные стороны, называются двухсторонними. К ним относятся плоскость, сфера, конус и т.д. Двухсторонняя поверхность характеризуется тем, что если вектор нормали $\vec{n}$ перемещать непрерывно по любому замкнутому контуру L, лежащему на поверхности, он всегда возвращается в исходную точку с первоначальным направлением (рис. 4.32).

Существуют поверхности, не являющиеся двухсторонними. Классическим примером односторонней поверхности является лист Мёбиуса (рис. 4.33). Его можно получить, если взять длинную полоску бумаги и, повернув один конец ее на 180°, склеить с другим концом. При обходе листа Мёбиуса по его средней линии вектор нормали возвращается в исходную точку с направлением, противоположным первоначальному, т.е. лист Мёбиуса – односторонняя поверхность.

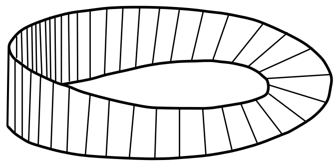


Рисунок 4.33

4.11.2 Нормаль к поверхности

Если поверхность S задана явно в виде $z = z(x, y)$, то в этом случае вектор нормали

$$\vec{n} = \left(-z'_x, -z'_y, 1\right). \tag{4.34}$$

Нормируя его, находим единичный вектор нормали:

$$\overrightarrow{n^0} = \left(-\frac{z'_x}{|\vec{n}|}, -\frac{z'_y}{|\vec{n}|}, \frac{1}{|\vec{n}|}\right) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma), \text{ где } |\vec{n}| = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\ .$$

Пусть теперь поверхность S задана неявно уравнением $F(x, y, z) = 0$. Если $F'_z \neq 0, \forall(x, y, z) \in S$, то равенство $F(x, y, z) = 0$ определяет неявно функцию $z = z(x, y)$, частные производные которой имеют вид $z'_x = -\dfrac{F'_x}{F'_z}, z'_y = -\dfrac{F'_y}{F'_z}$. Подставив их в формулу (4.34), получим вектор нормали

Единичный же вектор нормали в этом случае

$$\overrightarrow{n^0} = \pm\frac{\operatorname{grad} F}{|\operatorname{grad} F|}.$$

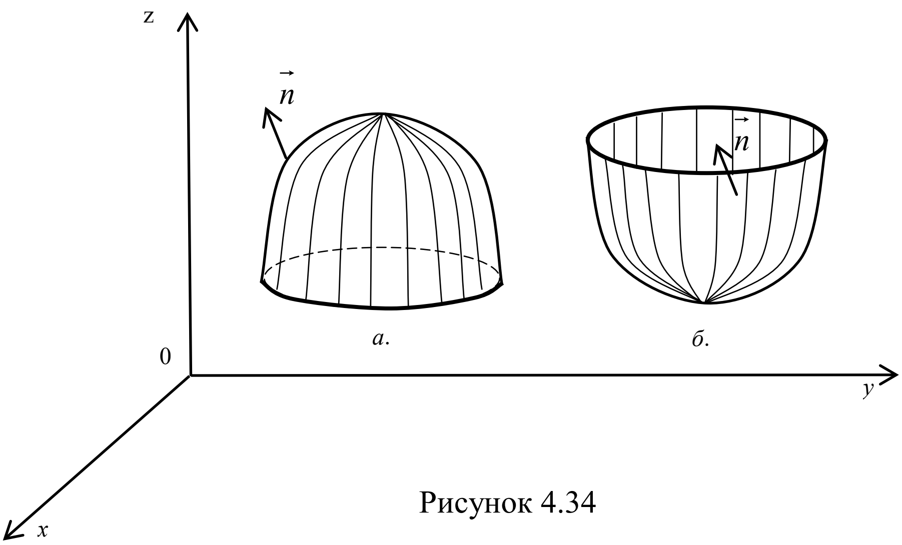


Рисунок 4.34

При выборе единичного вектора нормали необходимо следить за тем, чтобы получилась нормаль нужного направления, т.е. правильно выбирать нужную сторону поверхности. На рис. 4.34, а, б вектор нормали $\vec{n}$ определяет положительную сторону поверхности. Для этого вектора $\cos\gamma > 0$, т.е. он составляет острый угол с осью *Z*. Если для поверхности $z = z(x, y)$ указано, что нормаль к ней составляет с осью *Z* угол $\gamma > \frac{\pi}{2}$, то в этом случае

$$\vec{n} = \left(z'_x, z'_y, -1\right).$$

Аналогично для поверхности $F(x, y, z) = 0$, у вектора нормали которой $\cos\gamma > \frac{\pi}{2}$, следует писать

$$\vec{n} = -\frac{1}{F'_z}\left(F'_x, F'_y, F'_z\right) = -\frac{\operatorname{grad} F}{F'_z}, \text{ и, значит, в этом случае } \overrightarrow{n^0} = -\frac{\operatorname{grad} F}{\left|\operatorname{grad} F\right|}.$$

4.11.3 Определение поверхностного интеграла II рода

Пусть в области *V* пространства R^3 определена вектор-функция

$$\vec{a} = \left(P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)\right) = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}, \tag{4.35}$$

где *P*, *Q*, *R* – непрерывные в *V* функции.

Предположим, что в *V* задана гладкая поверхность *S* с выбранной на ней ориентацией. Пусть $\overrightarrow{n^0} = \overrightarrow{n^0}(x, y, z)$ – единичный вектор нормали к *S* в точке $M(x, y, z) \in S$. Разобьем поверхность *S* на части $S_i, i = 1, 2, \ldots, n$ и выберем в каждой части произвольную точку (x_i, y_i, z_i). Составим интегральную сумму:

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n}\left(\vec{a}(x_i, y_i, z_i), \overrightarrow{n^0}(x_i, y_i, z_i)\right)\Delta S_i, \text{ где } \Delta S_i \text{ – площадь части } S_i.$$

Обозначим через Δ наибольший из диаметров частей S_i. Если при $\Delta \to 0$ существует предел интегральных сумм σ_n, не зависящий ни от способа разбиения поверхности *S* на части S_i, ни от выбора точек $(x_i, y_i, z_i) \in S_i$, то его называют поверхностным интегралом второго рода от функции $\vec{a} = (P, Q, R)$ по поверхности *S* и обозначают $\iint\limits_S \left(\vec{a}, \overrightarrow{n^0}\right) dS$.

Таким образом, по определению,

$$\iint\limits_S \left(\vec{a}, \overrightarrow{n^0}\right) dS = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n}\left(\vec{a}(x_i, y_i, z_i), \overrightarrow{n^0}(x_i, y_i, z_i)\right)\Delta S_i. \tag{4.36}$$

4.11.4 Свойства поверхностного интеграла II рода

1. Если на поверхности S поменять ориентацию на противоположную, знак интеграла $\iint\limits_S \left(\vec{a}, \overrightarrow{n^0}\right) dS$ изменится на противоположный:

$$\iint\limits_{S^+} \left(\vec{a}, \overrightarrow{n^0}\right) dS = -\iint\limits_{S^-} \left(\vec{a}, \overrightarrow{n^0}\right) dS. \tag{4.37}$$

Интеграл слева вычисляется по положительной стороне поверхности S, а интеграл справа – по отрицательной. Действительно, если $\overrightarrow{n^0}$ – вектор нормали на положительно ориентированной стороне поверхности S, то $-\overrightarrow{n^0}$ – вектор нормали по отрицательно ориентированной стороне.

2. Если S_1, S_2, S_3 – цилиндрические поверхности с образующими, параллельными соответственно осям Oz, Ox, Oy то

$$\iint\limits_{S_1} R(x,y,z)dxdy = \iint\limits_{S_2} P(x,y,z)dydz = \iint\limits_{S_3} Q(x,y,z)dxdz = 0.$$

3, 4. Линейность

Если $\vec{a} = \vec{a}_1 \pm \vec{a}_2$, то

$$\iint\limits_S \left(\vec{a}, \overrightarrow{n_0}\right) dS = \iint\limits_S \left(\vec{a}_1, \overrightarrow{n_0}\right) ds \pm \iint\limits_S \left(\vec{a}_2, \overrightarrow{n^0}\right) dS, \quad \iint\limits_S \left(\alpha\vec{a}, \overrightarrow{n^0}\right) dS = \alpha \iint\limits_S \left(\vec{a}, \overrightarrow{n^0}\right) ds, \ \forall \alpha \in R.$$

Свойство справедливо для любого конечного числа вектор-функций $\vec{a}_i,\ i = 1,2,\ldots,n$.

4. ***Аддитивность***

Если кусочно-гладкая поверхность S разбита на конечное число непересекающихся поверхностей S_i, т.е. $S = \bigcup\limits_{i=1}^{n} S_i$,

$$\iint\limits_S \left(\vec{a}, \overrightarrow{n^0}\right) dS = \sum_{i=1}^{n} \iint\limits_{S_i} \left(\vec{a}, \overrightarrow{n^0}\right) dS.$$

5. Оценка модуля интеграла

Имеет место оценка модуля поверхностного интеграла второго рода:

$\left| \iint\limits_S \left(\vec{a}, \overrightarrow{n^0}\right) dS \right| \le \iint\limits_S \left| \left(\vec{a}, \overrightarrow{n^0}\right) \right| dS \le \max\limits_{(x,y,z)\in S} \left|\vec{a}(x,y,z)\right| \cdot P$, где P – площадь поверхности S.

4.11.5 Вычисление поверхностного интеграла II рода

Вычисление поверхности интеграла II рода сводится к вычислению двойного интеграла. Пусть в пространстве R^3 задана поверхность S и D – ее проекция на плоскость Oxy. Тогда из (11.3) – определения поверхностного интеграла второго рода и равенства $dS = |\vec{n}|dxdy \approx \Delta S$ можно получить формулу

$$\iint_S \left(\vec{a}, \overrightarrow{n^0} \right) dS = \iint_D (\vec{a}, \vec{n}) dxdy, \tag{4.38}$$

где $\vec{n}$ – выбранная нормаль к поверхности.

Поскольку $\overrightarrow{n^0} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, где $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ – направляющие косинусы нормали $\vec{n}$ к выбранной стороне поверхности S, можно показать справедливость равенств $dydz = \cos\alpha \cdot ds,\ dzdx = \cos\beta \cdot ds,\ dxdy = \cos\gamma \cdot dS$. Отсюда

$$\iint_S \left(\vec{a}, \overrightarrow{n^0} \right) dS = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma) dS = \iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy. \tag{4.39}$$

Формула (4.39) устанавливает связь между поверхностными интегралами первого и второго рода.

Из формул (4.38) и (4.39) получаем равенство

$$\iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint_D (\vec{a}, \vec{n}) dxdy, \tag{4.40}$$

где D – проекция поверхности S на плоскость Oxy.

4.11.6 Формула Остроградского

Пусть S – поверхность, краем (ограничивающим контуром) которой служит замкнутая кривая Г. Очевидно, что один и тот же замкнутый контур Г может служить краем бесконечного числа поверхностей. Например, на рис. 4.35 изображены поверхности конуса S_1, полусферы S_2, части плоскости S_3, краем которых служит окружность Г.

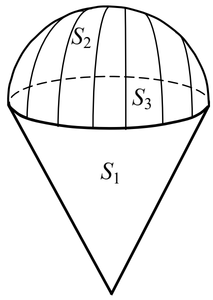


Рисунок 4.35

Ограниченная поверхность, не имеющая края, называется замкнутой. Примерами являются сфера, тор, эллипсоид, поверхность куба, пирамида и т.д.

Формула Остроградского связывает поверхностный интеграл по внешней стороне замкнутой поверхности с тройным интегралом по области, ограниченной этой поверхностью.

Теорема 4.11. *Пусть* $\vec{a} = (P, Q, R)$ *– векторная функция, координатные функции* P, Q, R *которой непрерывны вместе со своими первыми частными производными в замкнутой области V, ограниченной поверхностью S. Тогда имеет место формула Остроградского*

$$\iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz, \tag{4.41}$$

в которой поверхностный интеграл в левой части вычисляется по внешней стороне замкнутой поверхности S.

Доказательство. Рассмотрим область *V*, ограниченную снизу поверхностью S_1, заданной уравнением $z = z_1(x, y)$, сверху – поверхностью S_2, – с уравнением $z = z_2(x, y)$, а с боков – цилиндрической поверхностью S_3 с образующими, параллельными оси *Z* (рис. 4.36). Такую область будем называть *z*-цилиндрической. Пусть *D* – проекция *V* на плоскость *Oxy*, а $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$ – векторы внешней нормали к поверхностям S_1, S_2, S_3 соответственно.

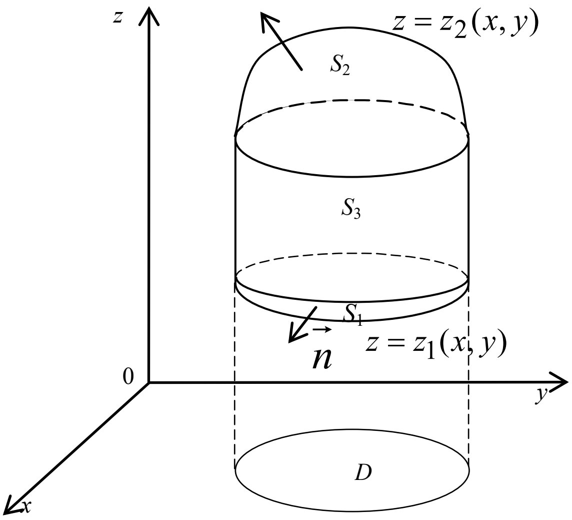


Рисунок 4.36

Рассмотрим тройной интеграл

$$\iiint_V \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z} dxdydz = \iint_D dxdy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz = \iint_D R(x, y, z_2(x, y))dxdy - \iint_D R(x, y, z_1(x, y))dxdy.$$

Первый из стоящих справа интегралов можно записать в соответствии с формулой (4.38) в виде поверхностного интеграла от $R(x, y, z)$, взятого по верхней стороне поверхности $z = z_2(x, y)$. Второй из этих интегралов можно рассматривать как поверхностный интеграл от $R(x, y, z)$, взятый по верхней стороне поверхности $z = z_1(x, y)$, или как интеграл по нижней стороне поверхности $z = z_1(x, y)$, взятый с обратным знаком.

Таким образом, получаем равенство

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint_{S_1} Rdxdy + \iint_{S_2} Rdxdy, \tag{4.42}$$

где в правой части интегрирование ведется по внешней стороне поверхностей S_1 и S_2.

Так как $\vec{n}_3 = (n_{3x}, n_{3y}, 0)$, то по формуле (4.38) найдем

$$\iint_{S_3} Rdxdy = \iint_D (0 \cdot n_{3x} + 0 \cdot n_{3y} + R \cdot 0) dxdy = 0.$$

Поэтому, добавив интеграл $\iint_{S_3} Rdxdy = 0$ в правую часть формулы (4.42), получим равенство

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint_S Rdxdy, \tag{4.43}$$

в котором в поверхностном интеграле интегрирование ведется по внешней замкнутой поверхности $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$.

Аналогичным образом для *y*-цилиндрической и *x*-цилиндрической областей можно получить соответственно равенства

$$\iiint_V \frac{\partial Q}{\partial y} dxdydz = \iint_S Qdzdx; \quad \iiint_V \frac{\partial P}{\partial x} dxdydz = \iint_S Pdydz, \tag{4.44}$$

Рассмотрим такие области *V*, которые можно разбить на конечное число как z-цилиндрических, так и *y*-цилиндрических и *x*-цилиндрических областей. Для такой области справедливы равенства (4.43) и (4.44). Сложив их, получим формулу Остроградского. Теорема доказана.

4.11.7 Формула Стокса

Эта формула связывает криволинейный интеграл по замкнутой поверхности пространственной кривой *L* с поверхностным интегралом по поверхности *S*, краем которой является *L*.

Теорема 4.12. *Если функции* $P(x,y,z), Q(x,y,z)$ и $R(x,y,z)$ *непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка в точках ориентированной поверхности S, то имеет место формула*

$$\iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dxdz = \oint_L Pdx + Qdy + Rdz, \tag{4.45}$$

где L – граница поверхности S и интегрирование вдоль кривой L производится в положительном направлении (т.е. при обходе границы L поверхность S должна оставаться все время слева).

Формула (4.45) называется формулой Стокса.

Доказательство. Пусть $z = f(x, y)$ – уравнение поверхности *S*, функции $f(x,y), f'_x(x,y), f'_y(x,y)$ непрерывны в замкнутой области *D* (проекции поверхности *S* на плоскость *Oxy*), L_1 – граница области *D* (рис. 4.37).

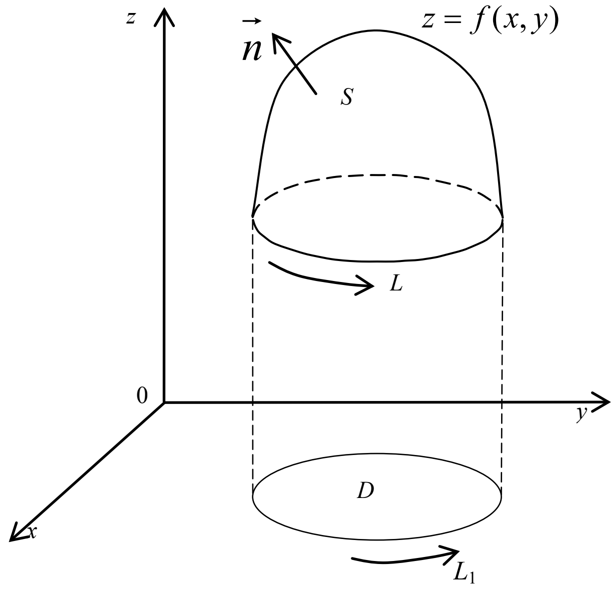


Рисунок 4.37

Будем считать, что поверхность *S* пересекается с любой прямой, параллельной оси *Oz*, не более чем в одной точке. Выберем верхнюю сторону поверхности *S*. Рассмотрим сначала интеграл вида $\oint\limits_L P(x,y,z)dx$. Значения функции $P(x,y,z)$ на *L* равны значениям функции $P(x,y,z)$ на L_1. Интегральные суммы для криволинейных интегралов II рода по контурам *L* и L_1 совпадают. Поэтому

$$\oint\limits_L P(x,y,z)dx = \oint\limits_{L_1} P(x,y,z)dx .$$

Применим к последнему интегралу формулу Грина (см. п. 4.8.4). Тогда получаем:

$$\int\limits_{L_1} P(x,y,z(x,y))dx = \iint\limits_D \left(0 - \frac{\partial}{\partial y}(P(x,y,z(x,y))) \right) dxdy = -\iint\limits_D \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \right) dxdy .$$

Преобразуем полученный двойной интеграл в равный ему поверхностный интеграл II рода (4.39). Для этого последнее равенство перепишем в виде

$\int\limits_{L_1} P(x,y,z(x,y))dx = -\iint\limits_S \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \right) \cos\gamma ds$ и используем уравнение нормали к поверхности *S* (см. п. 4.11.2). Так как выбрана верхняя сторона поверхности *S*, т.е. $\cos\gamma > 0$ (γ – острый угол между нормалью $\vec{n}$ к поверхности *S* и осью *Oz*), то нормаль $\vec{n}$ имеет проекции

$-\dfrac{\partial z}{\partial x}, -\dfrac{\partial z}{\partial y}, 1$. Направляющие косинусы пропорциональны соответствующим проекциям: $\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = -\dfrac{\partial z}{\partial x} : -\dfrac{\partial z}{\partial y} : 1$, т.е. $\dfrac{\cos\alpha}{-\frac{\partial z}{\partial x}} = \dfrac{\cos\beta}{-\frac{\partial z}{\partial y}} = \dfrac{\cos\gamma}{1}$. Из последнего равенства $-\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\cos\beta}{\cos\gamma}$. Тогда

$$-\iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\right)\cos\gamma dS = -\iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\right)\cos\gamma dS =$$
$$= -\iint_S \frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma dS - \frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta dS = \iint_S \frac{\partial P}{\partial z}dxdz - \frac{\partial P}{\partial y}dxdy,$$

т.к. $\cos\gamma dS = dxdy, \cos\beta dS = dxdz$ (см. п. 4.11.5). Следовательно,

$$\oint_L P(x,y,z)dx = \iint_S \frac{\partial P}{\partial z}dxdz - \frac{\partial P}{\partial y}dxdy.$$

Аналогично получаются при соответствующих условиях еще два равенства:

$$\oint_L Q(x,y,z)dy = \iint_S \frac{\partial Q}{\partial x}dydx - \frac{\partial Q}{\partial z}dydz,$$
$$\oint_L R(x,y,z)dz = \iint_S \frac{\partial R}{\partial y}dzdy - \frac{\partial R}{\partial x}dzdx.$$

Складывая почленно три последних равенства, получаем формулу Стокса (4.35). Теорема доказана.

Отметим, что формулу Стокса (4.35) можно применить и для поверхностей более сложного вида (разбив ее на части рассмотренного выше типа).

Замечание 1. Из формулы Стокса вытекает, что если выполняются условия

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$$

(см. п. 4.8.6), то криволинейный интеграл по произвольному пространственному замкнутому контуру L равен нулю:

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = 0.$$

Следовательно, в данном случае криволинейный интеграл не зависит от вида пути интегрирования.

Замечание 2. Пусть теперь L – замкнутая кривая в плоскости Oxy, а S – область D, ограниченная этой кривой. Тогда $dz = 0$, а вектор нормали к D имеет вид $\vec{n} = (0,0,1)$. Следовательно, в этом случае из равенства (4.45) получим формулу Грина (4.15). Таким образом, формула Грина – частный случай формулы Стокса.

Замечание 3. Формулу Стокса можно легко запомнить, если воспользоваться следующим приемом. Составим формально определитель

$$\begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}. \qquad (4.46)$$

Раскладывая его по элементам первой строки и учитывая, что произведение $\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}$ или $\dfrac{\partial}{\partial z}$ на функцию понимается как операция дифференцирования по соответствующей переменной, получаем подынтегральное выражение в левой части формулы Стокса (4.45):

$$\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dxdz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$$

Таким образом, символически формула Стокса может быть записана в виде

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}. \qquad (4.47)$$

Замечание 4. При доказательстве формулы Стокса вид поверхности S с краем L не играет никакой роли. Важна лишь ее ориентация в пространстве. Поэтому при решении конкретных примеров поверхность S выбирается такой, чтобы поверхностный интеграл по ней вычислялся наиболее удобным способом.

Пример 1. Вычислить интеграл $\iint\limits_S x\,dydz + z\,dzdx + dxdy$, где S верхняя сторона плоскости $x - y + z = 1$, лежащей в IV октанте (рис. 4.38).

Решение. Найдем направляющие косинусы нормального вектора плоскости

$$\vec{n}(1,1,1), \quad |\vec{n}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}.$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} > 0, \quad \cos\beta = \frac{-1}{\sqrt{3}} < 0, \quad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}} > 0.$$

$$\iint\limits_S x\,dydz + z\,dzdx + dxdy = \iint\limits_S x\,dydz + \iint\limits_S z\,dzdx + \iint\limits_S dxdy.$$

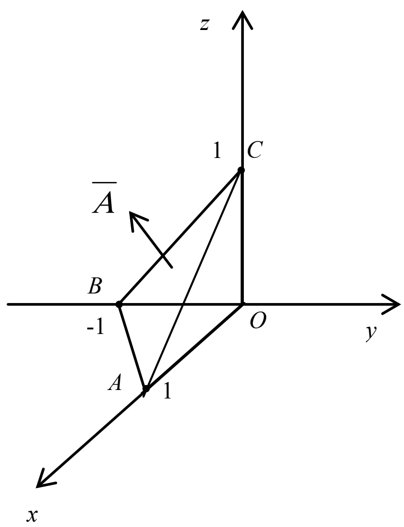


Рис. 4.38

Для вычисления каждого из интегралов применим соответственно формулу 4.39:

$$\iint\limits_{S_0} x\,dydz = \iint\limits_{D_2} (1+y-z)dydz = \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{0}^{1+y} (1+y-z)dz = \int\limits_{-1}^{0} \left(z + yz - \frac{z^2}{2} \right)\Bigg|_0^{1+y} dy = \int\limits_{-1}^{0} 1 + y + y(1+y) -$$

$$- \frac{(1+y)^2}{2} dy = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{0}\left(1 + 2y + y^2\right)dy = \frac{1}{2}\left(y + y^2 + \frac{y^3}{3} \right)\Bigg|_{-1}^{0} = \frac{1}{6},$$

где D_2 – треугольник BOC .

$$\iint\limits_{S} z\,dzdx = -\iint\limits_{D_1} z\,dzdx = -\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{1-x} z\,dz = -\int\limits_{0}^{1} \frac{z^2}{2}\Bigg|_0^{1-x} dx = -\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1}(1-x)^2\,dx = -\frac{1}{6},$$

где D_1 – треугольник AOC . $\iint\limits_{S} dxdy = \iint\limits_{D} dxdy = S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2}.$

Окончательно: $\iint\limits_{S} x\,dydz + zdzdx + dxdy = \frac{1}{2}$.

Пример 2. Вычислить $\iint\limits_{S}\left(3x^2 + 3y^2 + z^2\right)dxdy$, где S – внешняя сторона части поверхности $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, отсеченной плоскостями $z = 0,\ z = 1$ (рис. 4.39).

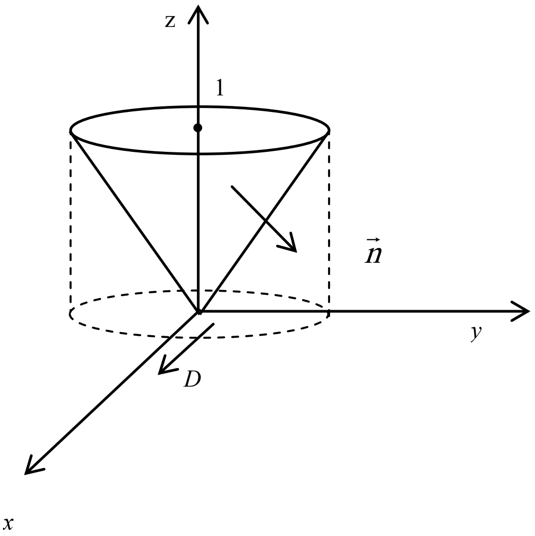


Рисунок 4.39

Решение. Поверхность $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ представляет собой верхнюю часть конуса $z^2 = x^2 + y^2$. Нормаль к поверхности составляет с осью Oz тупой угол. Для вычисления интеграла применим формулу 4.39

$$\iint\limits_{S}\left(3x^2 + 3y^2 + z^2\right)dxdy = -\iint\limits_{D}\left(3x^2 + 3y^2 + x^2 + y^2\right)dxdy = -4\iint\limits_{D}\left(x^2 + y^2\right)dxdy,$$

где D – круг $x^2 + y^2 \le 1$.

Для вычисления двойного интеграла перейдем к полярным координатам:

$$-4\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)dxdy = \begin{vmatrix} x=\rho\cos\varphi, \\ y=\rho\sin\varphi, \\ I=\rho \end{vmatrix} = -4\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \rho^3 d\rho = -2\pi.$$

Пример 3. Вычислить $\oint\limits_S x\,dydz + y\,dzdx + z\,dxdy$, где S внешняя сторона пирамиды, ограниченной плоскостями $2x-3y+z=6,\ x=0,\ y=0,\ z=0$ (рис. 4.40).

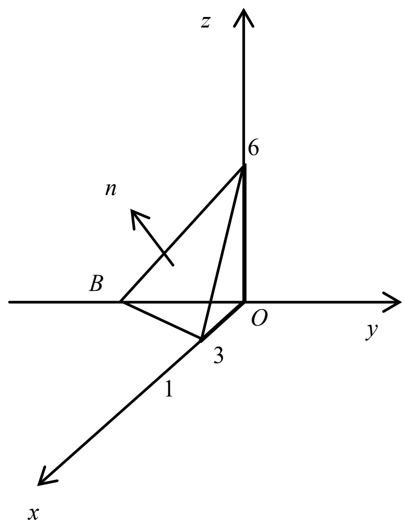


Рис. 4.40

Решение. По формуле (4.41) находим

$$\oint\limits_S x\,dydz + y\,dzdx + z\,dxdy = \iiint\limits_V (1+1+1)\,dV = 3\iiint\limits_V dV = 3V_{пирамиды} = 3\cdot\frac{1}{3}\cdot 3\cdot 6 = 18.$$

4.12 Приложения интегралов по поверхности

4.12.1 Приложения поверхностных интегралов I рода

1. ***Площадь поверхности***

Если поверхность S задана уравнением $z=f(x,y)$, а ее проекция на плоскость Oxy есть область D, в которой $z=f(x,y), z'_x=f(x,y)$ и $z'_y=f(x,y)$ – непрерывные функции, то ее площадь S вычисляется по формуле (см. п. 4.10.2 свойство 4).

$$S=\iint\limits_S dS,$$

или

$$S=\iint\limits_D \sqrt{1+(z'_x)^2+\left(z'_y\right)^2}\,dxdy.$$

Кроме того, поверхностный интеграл применяют для вычисления массы, координат центра масс, статических моментов, моментов инерции материальных поверхностей с известной поверхностной плотностью распределения массы $\gamma = \gamma(x, y, z)$. Все эти величины определяются одним и тем же способом: данную область разбивают на конечное число «мелких» частей, делая для каждой области деления упрощающие задачу предположения; находят приближенное значение искомой величины; переходят к пределу при неограниченном изменении области деления. Проиллюстрируем описанный способ на примере определения массы материальной поверхности.

2. *Масса поверхности*

О материальной поверхности известна ее плотность распределения массы $\gamma = \gamma(x, y, z)$. Тогда для нахождения массы поверхности:

1) Разбиваем поверхность S на n частей $S_i, i = 1, 2, \ldots, n$, площадь которой обозначим ΔS_i.

2) Берем произвольную точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$ в каждой области S_i. Предположим, что в пределах области S_i плотность постоянна и равна значению ее в точке M_i.

3) Масса m_i области S_i мало отличается от массы $\gamma(x_i, y_i, z_i)\Delta S_i$ фиктивной однородной области с постоянной плотностью $\gamma = \gamma(x_i, y_i, z_i)$.

4) Суммируя m_i по всей области, получаем

$$m \approx \sum_{i=1}^{n} \gamma(x_i, y_i, z_i)\Delta S_i \,.$$

5) За точное значение массы материальной поверхности S принимается предел, к которому стремится полученное приближенное значение при стремлении к нулю диаметров областей S_i,т.е.

$$m = \lim_{\max d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \gamma(x_i, y_i, z_i)\Delta S_i \text{, т.е.}$$

$$m = \iint_S \gamma(x, y, z) dS \,. \tag{4.48}$$

3. *Статистические моменты*

Статистические моменты поверхности S относительно координатных плоскостей находятся с помощью интегралов

$$M_{xy} = \iint_S z\gamma(x, y, z) dS, \quad M_{yz} = \iint_S x\gamma(x, y, z) dS, \quad M_{xz} = \iint_S y\gamma(x, y, z) dS \,.$$

4. ***Центр тяжести поверхности***

Координаты центра тяжести поверхности S находятся по следующим формулам:

$$x_c = \frac{M_{yz}}{m},\ y_c = \frac{M_{xz}}{m},\ z_c = \frac{M_{xy}}{m},$$

где m – масса поверхности S.

5. ***Моменты инерции поверхности***

Моменты инерции поверхности S относительно координатных осей Ox, Oy, Oz и начала координат $O(0,0,0)$ находятся соответственно с помощью интегралов

$$I_x = \iint_S \left(y^2 + z^2\right)\gamma(x,y,z)ds,\ I_y = \iint_S \left(x^2 + z^2\right)\gamma(x,y,z)dS,$$
$$I_z = \iint_S \left(x^2 + y^2\right)\gamma(x,y,y)ds,\ I_0 = \iint_S \left(x^2 + y^2 + z^2\right)\gamma(x,y,y)dS.$$

4.12.2 Приложения поверхностных интегралов II рода

6. ***Объем тела***

Полагая в формуле Остроградского (11.8) $P = x, Q = y, R = z$, получим

$$\iint_S xdydz + ydzdx + zdxdy = \iiint_V (1+1+1)dxdydz = 3\iiint_V dV = 3V .$$

Отсюда получаем формулу для вычисления объема области V, ограниченной замкнутой поверхностью S:

$$V = \frac{1}{3}\iint_S xdydz + ydzdx + zdxdy .$$

7. ***Поток вектора через поверхность, его физический смысл***

Пусть $\vec{a} = (P,Q,R)$ – векторное поле скоростей текущей несжимаемой жидкости, а S – кусочно-гладкая поверхность. Требуется определить объем жидкости, протекающей через эту поверхность за единицу времени.

Кусочно-гладкими кривыми разобьем поверхность S на части $S_i, i = 1,2,\ldots,n$. Выделим площадку S_i площадью ΔS_i, и пусть $\overrightarrow{n^0}$ – единичный вектор нормали в произвольной точке $M_i \in S_i$. Объем протекающей жидкости через S_i в единицу времени равен объему криволинейной призмы, изображенной на рис. 4.41.

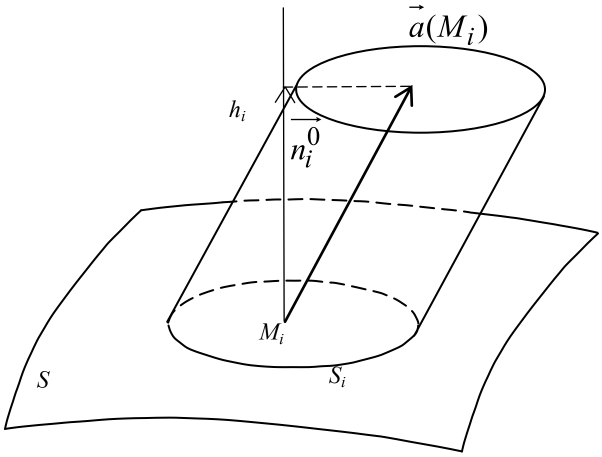


Рисунок 4.41

При разбиении S на достаточно мелкие части площадку S_i с площадью ΔS_i можно считать плоской, вектор $\vec{a}$ – постоянным по модулю и одинаково направленным в каждой точке площадки. Объем $\Delta\Pi_i$ призмы приближенно равен $\Delta\Pi_i \approx h_i \Delta S_i$, где ΔS_i – площадь *i*-й площадки, h_i – высота *i*-й призмы с образующей $\vec{a}(M_i)$. Но h_i является проекцией вектора $\vec{a}(M_i)$ на нормаль $\overrightarrow{n^0}$: $h_i = \text{пр}_{\overrightarrow{n_i^0}} \vec{a}(M_i) = \vec{a}(M_i) \cdot \overrightarrow{n_i^0}$, где $\overrightarrow{n_i^0}$ – единичный вектор нормали к поверхности в точке M_i. Поэтому $\Delta\Pi_i \approx \left(\vec{a}(M_i) \cdot \overrightarrow{n_i^0}\right) \Delta S_i$. Следовательно, общее количество жидкости, протекающее через всю поверхность S за единицу времени, найдем, вычислив сумму

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\vec{a}(M_i) \cdot \overrightarrow{n_i^0}\right) \Delta S_i .$$

Точное значение искомого количества жидкости получим, взяв предел найденной суммы при неограниченном увеличении числа элементарных площадок и стремлении к нулю их размеров (диаметров d_i площадок) в виде поверхностного интеграла второго рода:

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ (\max d_i \to 0)}} \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{a}(M_i) \cdot \overrightarrow{n_i^0}\right) \Delta S_i = \iint_S \left(\vec{a}(M) \cdot \overrightarrow{n^0}\right) dS = \Pi , \tag{4.49}$$

где $M(x, y, z) \in S$.

Пусть $\vec{a} = (P, Q, R)$ – произвольное векторное поле, а S – кусочно-гладкая ориентированная поверхность в R^3. Потоком векторного поля $\vec{a}$ (вектора $\vec{a}$) через поверхность S называется поверхностный интеграл второго рода (4.49). Подчеркнем, что поток – скалярная величина. При этом если $\left(\widehat{\vec{a}, \overrightarrow{n^0}}\right) < \dfrac{\pi}{2}$, то $\Pi > 0$. В этом случае поток вектора $\vec{a}$ идет с внутренней на внешнюю сторону поверхности *S*. Если же $\left(\vec{a}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{n^0}\right) > \dfrac{\pi}{2}$, то $\Pi < 0$ и, значит, поток вектора $\vec{a}$ идет с внешней на внутреннюю сторону поверхности *S*. При перемене ориентации поверхности знак потока П меняется на противоположный вследствие известного свойства поверхностного интеграла второго рода (см. п. 4.11.4, свойство 1).

Вычислить поток можно по формулам (4.39), (4.40).

Поток вектора через замкнутую поверхность

Если поверхность *S* замкнута, то в качестве вектора нормали к ней возьмем внешнюю нормаль. Тогда поток вектора $\vec{a} = (P, Q, R)$ через поверхность удобно вычислять по формуле Остроградского (4.41).

Пусть $\vec{a}$ – поле скоростей текущей несжимаемой жидкости. Если $\Pi = 0$, это означает, что из тела *V*, ограниченного поверхностью *S*, вытекает столько жидкости, сколько и втекает в него. Если $\Pi > 0$, то жидкости вытекает больше, чем втекает. Это говорит о том, что внутри тела *V* имеется источник – место, где жидкость появляется. Если $\Pi < 0$, то жидкости вытекает из тела меньше, чем втекает. В этом случае говорят, что внутри тела *V* имеется сток – место, где жидкость исчезает.

Пример 1. Найти площадь части поверхности $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, вырезанной поверхностью $x^2 + y^2 = 2y$.

Решение. Поверхность $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ есть верхняя часть сферы $z^2 + x^2 + y^2 = 4$ радиусом 2. Уравнение поверхности $x^2 + y^2 = 2y$ приведем к каноническому виду: $x^2 + y^2 - 2y = 0 \Rightarrow x^2 + (y-1)^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 + (y-1)^2 = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$ – это цилиндрическая поверхность с образующими параллельными оси OZ (рис. 4.42).

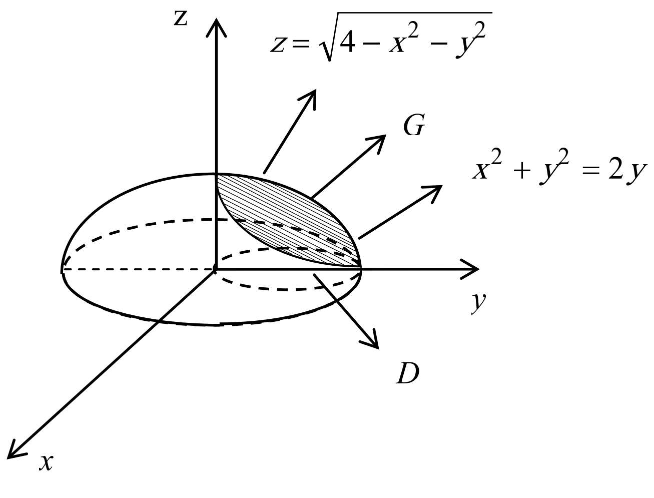


Рисунок 4.42

Площадь части верхней полусферы $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$, вырезанной цилиндром найдем с помощью поверхностного интеграла I рода:

$$\int=\iint dG=\iint\limits_D\sqrt{1+{z'_x}^2+{z'_y}^2}\,dxdy,$$

где $D-$ круг $x^2+(y-1)^2\le 1$ на плоскости OXY, который является проекцией поверхности S.

$$z'_x=-\frac{x}{\sqrt{4-x^2-y^2}},\quad z'_y=\frac{-y}{\sqrt{4-x_2-y^2}}$$

$$S=\iint\limits_D\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\right)^2+\left(\frac{-y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\right)^2}\,dxdy=\iint\limits_D\sqrt{1+\frac{x^2}{4-x^2-y^2}+\frac{y^2}{4-x^2-y^2}}\,dxdy=$$

$$=\iint\limits_D\sqrt{\frac{4-x^2-y^2+x^2+y^2}{4-x^2-y^2}}\,dxdy=2\iint\limits_D\frac{dxdy}{\sqrt{4-x^2-y^2}}=4\iint\limits_{D_1}\frac{dxdy}{\sqrt{4-x^2-y^2}},$$

где D_1 верхний полукруг $x^2+(y-1)^2\le 1$.

Для вычисления последнего интеграла введем полярные координаты $\left|\begin{array}{l}x=\rho\cos\varphi,\\ y=\rho\sin\varphi,\\ I=\rho\end{array}\right|$ и запишем подынтегральную функцию и уравнение окружности $x^2+y^2=2y$ в полярных координатах

$$\frac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}=\frac{1}{\sqrt{4-\rho^2\cos^2\varphi-\rho^2\sin^{2\varphi}}}=\frac{1}{\sqrt{4-\rho^2}},$$

$$x^2+y^2=2y\Rightarrow\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi=2\rho\sin\varphi\Rightarrow\rho^2=2\rho\sin\varphi\Rightarrow\rho=2\sin\varphi.$$

Итак,

$$4\iint\limits_{D_1}\frac{dxdy}{\sqrt{4-x^2-y^2}}=4\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi\int\limits_0^{2\sin\varphi}\frac{\rho}{\sqrt{4-\rho^2}}d\rho=-4\int\limits_0^{\pi/2}\left(\sqrt{4-\rho^2}\Big|_0^{2\sin\varphi}\right)d\varphi=$$

$$=-4\int\limits_0^{\pi/2}\left(\sqrt{4-4\sin\varphi}-2\right)d\varphi=-8\int\limits_0^{\pi/2}(\cos\varphi-1)d\varphi=-8(\sin\varphi-\varphi)\Big|_0^{\pi/2}=-8\left(1-\frac{\pi}{2}\right)=4\pi-8.$$

Пример 2. Вычислить массу плоской пластины $S:\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$, расположенной в I октанте и имеющей поверхностную плотность $\gamma(x,y,z)=2x+\frac{4}{3}y+z$ (кг/м^2) (рис. 4.43).

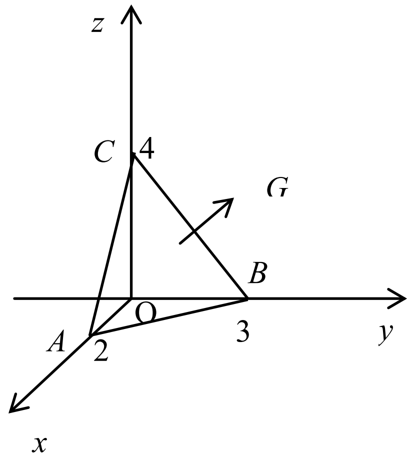


Рисунок 4.43

Решение. Запишем уравнение поверхности S в явном виде: $z = 4\left(1 - \frac{y}{3} - \frac{x}{2}\right)$. Проекцией D поверхности S на плоскость OXY является треугольник AOB. Массу плоской пластины T найдем с помощью поверхностного интеграла первого рода:

$$M_S = \iint_T \gamma(x, y, z)\, dG = \iint_D \gamma(x, y, z(x, y)) \cdot \sqrt{1 + {z'_x}^2 + {z'_y}^2}\, dxdy =$$

$$= \iint_D \left(2x + \frac{4}{3}y + 4\left(1 - \frac{y}{3} - \frac{x}{2}\right)\right) \cdot \sqrt{1 + (-2)^2 + \left(-\frac{4}{3}\right)^2}\, dxdy = \frac{\sqrt{61}}{3} \cdot 4 \iint_D dxdy = \frac{4\sqrt{61}}{3} S_{\Delta AOB}.$$

$$S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2} OB \cdot AO = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 = 3.$$

Окончательно $M_S = 4\sqrt{61}$ кг.

Пример 3. Вычислить момент инерции относительно оси OZ части однородной поверхности сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, для которой $x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0$.

Решение. Так как поверхность однородная, т.е. $\gamma(x, y, z) = c$, где $c = const$, то формула для вычисления момента инерции относительно оси OZ принимает вид:

$$I_x = c \cdot \iint_S \left(x^2 + y^2\right) dS = c \cdot \iint_D \left(x^2 + y^2\right) \sqrt{1 + \frac{x^2}{16 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{16 - x^2 - y^2}}\, dxdy =$$

$$= c \cdot \iint_D \left(x^2 + y^2\right) \sqrt{\frac{16 - x^2 - y^2 + x^2 + y^2}{16 - x^2 - y^2}}\, dxdy = c \cdot \iint_D \left(x^2 + y^2\right) \frac{4}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}}\, dxdy =$$

$$= 4c \cdot \iint_D \frac{\left(x^2 + y^2\right)}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}}\, dxdy,$$

где D – четверть круга $x^2 + y^2 \leq 16$, при $x \geq 0,\ y \geq 0$. Для вычисления последнего интеграла перейдем к полярной системе координат:

$$4c\cdot\iint\limits_D \frac{\left(x^2+y^2\right)}{\sqrt{16-x^2-y^2}}dxdy = \begin{vmatrix} x=\rho\cos\varphi, \\ y=\rho\sin\varphi, \\ I=\rho \end{vmatrix} = 4\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi\int\limits_0^4 \frac{\rho^2\rho\, d\rho}{\sqrt{16-\rho^2}} = 4c\cdot\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi\int\limits_0^4 \frac{\rho^3\, d\rho}{\sqrt{16-\rho^2}}.$$

Для вычисления интеграла $\int\limits_0^4 \frac{\rho^3 d\rho}{\sqrt{16-\rho^2}}$ воспользуемся тригонометрической подстановкой:

$$\int\limits_0^4 \frac{\rho^3 d\rho}{\sqrt{16-\rho^2}} = \begin{vmatrix} \rho=4\sin t, \\ d\rho=4\cos t dt, \\ \rho=0 \Rightarrow t=o \\ \rho=4 \Rightarrow t=\pi/2 \end{vmatrix} = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{4^3\sin^3 t\cdot 4\cos t dt}{\sqrt{16-4^2\cdot\sin^2 t}} = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{4^4\sin^3 t\cdot\cos t}{4\cos t}dt =$$

$$= 4^3\int\limits_0^{\pi/2}\sin^3 t dt = -4^3\int\limits_0^{\pi/2}\left(1-\cos^2 t\right)d\cos t = -4^3\left(\int\limits_0^{\pi/2} d\cos t - \int\limits_0^{\pi/2}\cos^2 t d\cos t\right) =$$

$$= -4^3\left(\cos t\Big|_0^{\pi/2} - \frac{\cos^3 t}{3}\Bigg|_0^{\pi/2}\right) = -4^3\left(-1+\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}\cdot 4^3.$$

Окончательно получаем $4c\cdot\int\limits_0^{\pi/2}\frac{2}{3}\cdot 4^3\, d\varphi = \frac{2}{3}\cdot 4^4\, c\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{4^4}{3}c\pi.$

5 ТЕОРИЯ ПОЛЯ

5.1 Скалярное поле и его характеристики

Скалярное поле – это часть пространства (или все пространство), в каждой точке которого задано определенное число (скаляр) $u(M)$. Математически скалярное поле может быть определено в данной области V пространства скалярной функцией

$$u = u(M) = u(x, y, z),$$

которая является непрерывной функцией своих аргументов, имеющей непрерывные частные производные первого порядка.

Если скалярная функция $u(M)$ является функцией двух переменных $u = u(x, y)$, то поле будет плоским.

1. Геометрической характеристикой скалярного поля служат *поверхности уровня* – геометрическое место точек, в котором значение поле постоянно

$$u(x, y, z) = C, \tag{5.1}$$

C – любое фиксированное число из области значений функции.

Аналогично определяются *линии уровня* для плоского поля $u(x, y) = C$.

Пример 5.1. Найти линии уровня скалярного поля $u = 2x + 3y$.

Решение. По (5.1) имеем $2x + 3y = C$ – это семейство прямых линий (рис. 5.1).

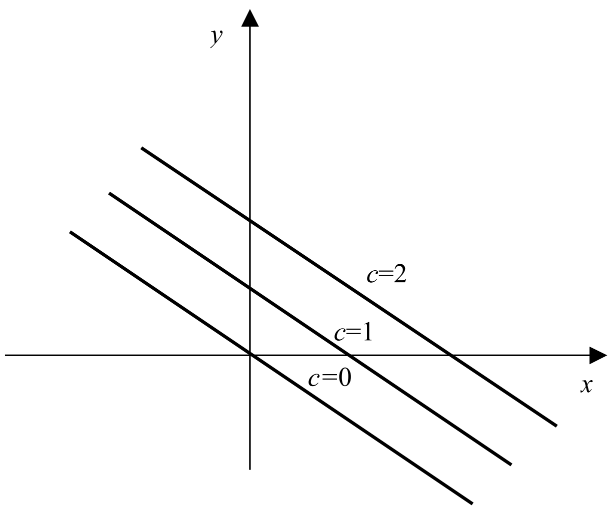


Рисунок 5.1

Пример 5.2. Для скалярного поля $u = 2x^2 - 4x + y^2 + 2y + z^2$ найти стационарные точки, поверхности уровня. Записать уравнение поверхности уровня, проходящей через точку M(2; – 1; 2).

Решение. Частные производные

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4x - 4, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y + 2, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 2z$$

одновременно обращаются в нуль в точке $N(1;\,-\,1;\,0)$, которая является стационарной. По определению поверхности уровня имеем: $2x^2-4x+y^2+2y+z^2=c$ или

$$2(x-1)^2+(y+1)^2+z^2=c+3;$$

$$\frac{(x-1)^2}{1/2}+\frac{(y+1)^2}{1}+\frac{z^2}{1}=c+3;$$

$$\frac{(x-1)^2}{\frac{c+3}{2}}+\frac{(y+1)^2}{c+3}+\frac{z^2}{c+3}=1.$$

Последнее уравнение при различных $c>-3$ определяет семейство эллипсоидов с центром в точке $O(1;\,-\,1;\,0)$ полуосями

$$a=\sqrt{\frac{c+3}{2}},\quad b=\sqrt{c+3},\quad d=\sqrt{c+3}.$$

Поверхность уровня, проходящая через точку $M(2;\,-\,1;\,2)$, имеет уравнение

$$\frac{(x-1)^2}{3}+\frac{(y+1)^2}{6}+\frac{z^2}{6}=1,$$

где $c=2\cdot 2^2-4\cdot 2+(-1)^2+2(-1)+2^2=3$.

2. Пусть $\vec{l}(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ – единичный вектор (α, β, γ – углы, образованные вектором $\vec{l}$ с осями координат). Тогда *производной по направлению* $\vec{l}$ скалярного поля $u=u(x,y,z)$ в точке $M(x,y,z)$ называется

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}\Big|_M=\frac{\partial u(M)}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u(M)}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u(M)}{\partial z}\cos\gamma. \qquad (5.2)$$

Эта производная характеризует скорость изменения поля u по направлению вектора $\vec{l}$.

В случае плоского поля $u=u(x,y)$, $\cos\beta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$ и формула (5.2) примет вид

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}\Big|_M=\frac{\partial u(M)}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u(M)}{\partial y}\sin\alpha.$$

Если вектор $\vec{l}$ не является единичным, то следует сначала найти его направляющие косинусы.

Пример 5.3. Найти производную скалярного поля $u=xy+y^2-4z$ в точке $M(1,2,3)$ по направлению вектора $\vec{l}=2\vec{i}+3\vec{j}-5\vec{k}$.

Решение. Вектор $\vec{l}$ имеет координаты $(2,3,-5)$. Найдем его направляющие косинусы:

$$\cos\alpha = \frac{l_x}{|\vec{l}|} = \frac{2}{\sqrt{2^2+3^2+5^2}} = \frac{2}{\sqrt{38}}, \quad \cos\beta = \frac{l_y}{|\vec{l}|} = \frac{3}{\sqrt{38}}, \quad \cos\gamma = \frac{l_z}{|\vec{l}|} = \frac{-5}{\sqrt{38}}.$$

Вычислим частные производные в точке $M(1,2,3)$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M = y|_M = 2, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M = (x+2y)|_M = 5, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M = -4.$$

Тогда $\frac{\partial u}{\partial \vec{l}} = 2\cdot\frac{2}{\sqrt{38}} + 5\cdot\frac{3}{\sqrt{38}} - 4\frac{-5}{2\sqrt{38}} = \frac{39}{\sqrt{38}}$.

Частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ характеризуют скорость изменения поля $u = u(x,y,z)$ по направлению координатных осей *OX, OY, OZ* соответственно. Точки, в которых выполнено условие $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z} = 0$, называются *стационарными* для поля.

3. *Градиентом* функции $u = u(x,y,z)$ в точке $M(x,y,z)$ называется вектор, который обозначается $\overrightarrow{grad u}$ или ∇_u и определяется по формуле

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, u(M) = \left(u'_x, u'_y, u'_z\right)\big|_M = \frac{\partial u(M)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u(M)}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u(M)}{\partial z}\vec{k},$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные векторы.

Если направление $\vec{l}$ совпадет с направлением градиента функции, который указывает направление наибольшее возрастания функции, то производная по направлению вычисляется по формуле

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}\Big|_M = \left|\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, u(M)\right| = \sqrt{(u'_x)^2 + (u'_y)^2 + (u'_z)^2}.$$

В направлении $\vec{l} = -\left|\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, u(M)\right|$ производная по направлению $\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}$ в точке M принимает наименьшее значение.

Пример 5.4. Найти градиент скалярного поля $u = 2x + 3y$.

Решение. В нашем случае $\overrightarrow{grad u} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right), \frac{\partial u}{\partial x} = 2; \frac{\partial u}{\partial y} = 3$. Следовательно, $\overrightarrow{grad u} = (2;3)$.

5.2 Векторное поле и его характеристики

Если в каждой точке *M* пространства (или его части *V*) задан вектор $\vec{F} = \vec{F}(M)$, то говорят, что в этом пространстве (или в *V*) задано *векторное поле* $\vec{F}$. Задание векторного поля $\vec{F} = \vec{F}(M)$ равносильно заданию трех функций: $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$, которые являются проекциями вектора $\vec{F}(M)$ на координатные оси

$$\vec{F}(M) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}.$$

Примерами векторных полей являются поле электрической напряженности, силовое поле, поле скоростей текущей жидкости и др.

1. *Векторной линией* поля $\vec{F}$ называется линия, касательная в каждой точке которой параллельна вектору поля в этой точке.

В трехмерном случае векторные линии определяются из уравнений

$$\frac{dx}{P(x,y,z)} = \frac{dy}{Q(x,y,z)} = \frac{dz}{R(x,y,z)}. \tag{5.3}$$

Для плоского векторного поля

$$\frac{dx}{P(x,y)} = \frac{dy}{Q(x,y)}, \quad \frac{dx}{P(x,z)} = \frac{dz}{R(x,z)}, \quad \frac{dy}{Q(y,z)} = \frac{dz}{R(y,z)}. \tag{5.4}$$

Пример 5.5. Для плоского поля $\vec{F} = (5x - y)i + 2y\vec{j}$ найти векторные линии.

Решение. Данное поле дифференцируемо во всех точках плоскости *XOY*

$$P(x,y) = 5x - y, \quad Q(x,y) = 2y.$$

Согласно (5.4) имеем: $\dfrac{dx}{5x-y} = \dfrac{dy}{2y}$. Отсюда $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2y}{5x-y}$. Мы получили однородное уравнение, которое решаем с помощью подстановки $y = ux$

$$u'x + u = \frac{2ux}{5x - ux}; \quad u'x = \frac{2u}{5-u} - u; \quad u'x = \frac{u^2 - 3u}{5-u}; \quad \frac{du}{dx}x = \frac{u^2-3u}{5-u}; \quad \int \frac{5-u}{u^2-3u}du = \int \frac{dx}{x}.$$

Разложив подынтегральную функцию слева на простейшие дроби и найдя коэффициенты, получим

$$\int \frac{-5/3}{u}dt + \int \frac{2/3}{u-3}dt = \int \frac{dx}{x};$$

$$-\frac{5}{3}\ln|u| + \frac{2}{3}\ln|u-3| = \ln|x| + \ln C; \quad \frac{(u-3)^{2/3}}{u^{5/3}} = xC, u = y/x.$$

Следовательно, $C = \dfrac{(y/x-3)^{2/3}}{(y/x)^{5/3}x}$ – семейство векторных линий.

2. *Потоком* векторного поля через ориентированную поверхность *S* называется поверхностный интеграл первого рода от скалярного произведения вектора $\vec{F}$ на единичный вектор нормали $\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$:

$$\Pi = \iint_s (\vec{F}, \vec{n}) ds = \iint_s (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma) ds = \iint_s Pdydz + Qdxdz + Rdxdz \,. \qquad (5.5)$$

Как известно, ориентация гладкой поверхности определяется выбором одного из двух возможных векторов нормали, который изменяется на поверхности непрерывным образом.

Свойства потока

1) При изменении ориентации поверхности поток изменяет знак на противоположный.

2) Если *S* на конечную сумму непересекающихся поверхностей, $S = \sum_{i=1}^{n} S_i$, то формула (3.3) принимает вид

$$\Pi = \sum_{i=1}^{n} \iint_{s_i} (\vec{F}, \vec{n}) ds \,.$$

Физический смысл потока зависит от природы поля $\vec{F}$. Если, например, $\vec{F}$ – поле скоростей текущей жидкости в области *V*, то поток будет равен количеству жидкости, проходящей через поверхность *S* за единицу времени.

В случае замкнутой поверхности *S* в качестве вектора нормали берется вектор к внешней стороне этой поверхности, а поток определяется

$$\Pi = \oint\!\!\!\oint_s (\vec{F}, \vec{n}) ds \,. \qquad (5.6)$$

Пусть $\vec{F}$ – поле скоростей текущей несжимаемой жидкости. Если $\Pi = 0$, это означает, что из тела *V*, ограниченного поверхностью *S*, вытекает столько жидкости, сколько и втекает в него. Если $\Pi > 0$, то жидкости вытекает больше, чем втекает. Это говорит о том, что внутри тела *V* имеется *источник* – место, где жидкость появляется. Если $\Pi < 0$, то жидкости вытекает из тела меньше, чем втекает. В этом случае говорят, что внутри тела *V* имеется *сток* – место, где жидкость исчезает.

Пример 5.6. Вычислить поток векторного поля $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ через верхнюю сторону части поверхности $z = 4 - x^2 - y^2$, отсеченной плоскостью $z = 0$.

Решение. Данное поле дифференцируемо во всех точках плоскости *XOY*

$$P(x, y) = x, \quad Q(x, y) = y, \quad R(x, y) = z \,.$$

Проекцией *D* рассматриваемой поверхности на плоскость *XOY*является круг радиуса

2. Т.к. внешняя сторона параболоида видна со стороны положительного направления оси *OZ*, то перед интегралом по проекции надо поставить знак «+». Координаты вектора нормали $\vec{n} = (2x, 2y, 1)$. Скалярное произведение

$$(\vec{F} \cdot \vec{n}) = x \cdot 2x + y \cdot 2y + 1 \cdot (-z) = 2x^2 + 2y^2 - z = 2x^2 + 2y^2 - 4 + x^2 + y^2 = 3(x^2 + y^2) - 4.$$

Тогда

$$\Pi = +\iint_D (3(x^2 + y^2 - 4)\,dx\,dy = \begin{vmatrix} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ |J| = \rho \end{vmatrix} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 (3\rho^2 - 4) \cdot \rho\,d\rho = 8\pi.$$

Если поверхность *S* замкнута, то поток удобно вычислять по формуле *Остроградского-Гаусса*:

$$\oiint_S Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz, \tag{5.7}$$

где *V* – область, ограниченная поверхностью *S*.

Пример 5.7. Вычислить поток векторного поля $\vec{F} = 3x\vec{i} - 3y\vec{j} - 5z^2\vec{k}$ через внешнюю сторону замкнутой поверхности S, состоящей из части параболоида $x^2 + y^2 = 2z$ и сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 8$.

Решение. В соответствии с формулой (5.7) имеем

$\dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z} = 3 - 3 - 10z$. Тогда $\Pi = \iiint_V -10z dxdydz$.

Вычисление тройного интеграла по области *V* будем осуществлять в цилиндрических координатах: $x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi, z = z$.

$$\Pi = -10 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho d\rho \int_{\rho^2/2}^{\sqrt{8-\rho^2}} z dz = -\frac{280\pi}{3}.$$

3. Величина потока характеризует интенсивность источников или стоков суммарно. Более точно характеристикой является *дивергенция*

$$div\vec{F}(M) = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right)\Bigg|_M. \tag{5.8}$$

Дивергенция векторного поля есть скалярная величина. Она образует скалярное поле в данном векторном поле.

Если $div\vec{F}(M) > 0$, то точка *M* представляет собой источник, если $div\vec{F}(M) < 0$, то в точке *M* – сток. Если $div\vec{F}(M) = 0$, то в точке *M* нет ни источника, ни стока или их действие взаимно компенсируется. Такое поле называется *соленоидальным* или трубчатым.

Пример 5.8. Вычислить дивергенцию поля

$\vec{F} = (2xy + zx)\vec{i} + (xyz + y)\vec{j} + (x + y + 2z)\vec{k}$ в точке $M(1,1,2)$

Решение. Согласно формуле (3.4):

$$\left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_M = (2y+z)|_M = 4; \quad \left.\frac{\partial Q}{\partial y}\right|_M = (xz+1)|_M = 3; \quad \left.\frac{\partial R}{\partial z}\right|_M = 2.$$

Следовательно, $div\vec{F}(M) = 4 + 3 + 2 = 9 > 0$. Значит, в точке M находится источник.

С учетом определения дивергенции формулу (5.7) можно записать

$$\Pi = \iiint\limits_V div\vec{F}dv.$$

4. *Циркуляцией* векторного поля $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ вдоль замкнутой линии L называется криволинейный интеграл второго рода

$$Ц = \oint\limits_L Pdx + Qdy + Rdz, \tag{5.9}$$

где обход линии L осуществляется в положительном направлении. Физический смысл циркуляции состоит в следующем: циркуляция – это работа силы поля вдоль кривой L, расположенной в области действия силового поля.

Если линия L не замкнута, то криволинейный интеграл $A = \int\limits_L Pdx + Qdy + Rdz$, который определяет работу вектора $\vec{F}$ при передвижении точки приложения вектора по линии L, называется *линейным интегралом*.

Пример 5.9. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{F} = (2x - y^2 + 1)\vec{i} + (3x + 2y^2 - 10)\vec{j}$ по линии L, состоящей из отрезка прямой AB и параболы $x = 3 - y^2$.

Решение. Исходная линия L состоит из двух участков: прямой AB, $A(-1,-2)$, $B(2,1)$ и параболы. Следовательно, циркуляция заданного поля $\vec{F}$ будет равна сумме линейных интегралов:

$$Ц = \int\limits_{AB} + \int\limits_{BCA}.$$

Уравнение прямой AB запишем в виде $\dfrac{y-1}{-2-1} = \dfrac{x-2}{-1-2} \Rightarrow y = x - 1$.

$$\int\limits_{AB} = \int\limits_{2}^{-1}\Big(2x - (x-1)^2 + 1) + (3x + 2(x-1)^2 - 10)\Big)dx = 16{,}5;$$

$$\int\limits_{BCA} = \int\limits_{-1}^{2}\big((2x - (3-x) + 1) + (3x + 2(3-x) - 10\big)dx = -12.$$

Циркуляция по заданному контуру равна $Ц = 16{,}5 - 12 = 4{,}5 > 0$.

5. *Ротором* векторного поля $\vec{F}$ в точке $M(x,y,z)$ называется вектор

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} - \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}, \tag{5.10}$$

где частные производные вычислены в точке *M*.

Символически вектор (5.10) можно получить из определителя (если разложить его по элементам первой строки):

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}. \tag{5.11}$$

Ротор является характеристикой вихревых движений в поле.

Пример 5.10. Найти ротор для векторного поля $\vec{F} = (2xy - z; yx + 2; x^2 - 3xz)$.

Решение. Воспользуемся формулой (5.11):

$$\overrightarrow{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ (2x - z) & (yx + 2 &)(x^2 - 3xz) \end{vmatrix} = \vec{i}\left(\frac{\partial(x^2 - 3xz)}{\partial y} - \frac{\partial(yx + 2)}{\partial z}\right) -$$

$$-\vec{j}\left(\frac{\partial(x^2 - 3xz)}{\partial x} - \frac{\partial(2xy - z)}{\partial z}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial(yx + 2)}{\partial x} - \frac{\partial(2xy - z)}{\partial y}\right) = (-2x + 3z - 1)\vec{j} +$$

$$+(y - 2x)\vec{k}.$$

5.3 Потенциальное векторное поле. Операторы Гамильтона и Лапласа

Векторное поле $\vec{F} = (P, Q, R)$ называется *потенциальным* или *безвихревым* в некоторой области *V*, если

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{F}(M) = 0, \forall M \in V. \tag{5.12}$$

Равенство (5.12) называется *условием потенциальности* поля.

Для того, чтобы векторное поле $\vec{F} = (P, Q, R)$ было потенциальным в *V*, необходимо и достаточно, чтобы существовала скалярная функция $u = u(x, y, z)$, такая, что

$$\vec{F} = \overrightarrow{\text{grad}}\, u.$$

Функция $u = u(x, y, z)$ называется *потенциалом* поля.

В потенциальном векторном поле:

1) $u(x,y,z) = \int\limits_{x_0}^{x} P(x, y_0, z_0)dx + \int\limits_{x_0}^{x} Q(x, y, z_0)dy + \int\limits_{z_0}^{z} R(x, y, z)\,dz + C$;

2) $Ц = 0$;

3) для любых двух точек A и B в области V значение криволинейного интеграла $\int\limits_{AB}\left(\vec{F}, dn\right)$ не зависит от пути интегрирования, соединяющего точки A и B и расположенного в области V;

4) если $u(x, y, z)$ – потенциал векторного поля $\vec{F}$, то для любого контура $L \subset V$

$$\int\limits_{AB}\left(\vec{F}, dn\right) = u(x_1, y_1, z_1) - u(x_0, y_0, z_0).$$

Основные характеристики векторного анализа (градиент, дивергенция, ротор) и операции над ними удобно представлять в виде оператора Гамильтона

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}.$$

Справедливы следующие равенства

$$\nabla_u = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, u; \quad (\nabla, \vec{F}) = \mathrm{div}\, \vec{F}; \quad [\nabla, \vec{F}] = \overrightarrow{\mathrm{rot}} \vec{F}.$$

С помощью ∇ можно показать, что

$$\mathrm{div}\, \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{F} = 0; \quad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, u = 0.$$

Введем *оператор Лапласа*

$$\Delta = (\nabla, \nabla) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Нетрудно убедиться, что $div\,\overrightarrow{grad} u = \Delta u$.

Операции $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, \mathrm{div}\, \vec{F}$ и $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{F}$ связаны соотношением $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{F} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, \mathrm{div}\, \vec{F} - \Delta\vec{F}$, где $\Delta\vec{F} = \Delta P\vec{i} + \Delta Q\vec{j} + \Delta R\vec{k}$.

6 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

6.1 Общие понятия

Определение 1. *Обыкновенным дифференциальным уравнением n-ого порядка* называется уравнения вида:

$$F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0, \tag{6.1}$$

где x – независимая переменная; $y = y(x)$ – искомая функция; $y', y'', \dots, y^{(n)}$ – производные искомой функции.

Определение 2. *Порядком дифференциального уравнения* называется наивысший порядок производной, входящей в это уравнение.

Например:

1) $y' + 6x^3 = 0$ – уравнение первого порядка;

2) $y'' + 4y' = 0$ – уравнение второго порядка;

3) $y^{(5)} + 8x^2 y''' + 2e^{3x} y + 4 = 0$ – уравнение пятого порядка.

Определение 3. Всякая функция $\varphi(x)$, которая, будучи подставленная вместо y в выражение (6.1), обращает это выражение в тождество, называется *решением дифференциального уравнения* (6.1).

Если $\varphi(x)$ – решение, то $\varphi(x) + C$ тоже является решением. Это значит, что уравнение имеет бесчисленное множество решений, зависящих от параметра C.

Можно показать, что уравнение n-ого порядка имеет семейство решений, зависящих от произвольных независимых друг от друга постоянных.

Например: уравнение $y^{(n)} = 0$ имеет решение: $y(x) = C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \dots + C_{n-1} x + C_n$.

Определение 4. Процесс нахождения решения дифференциального уравнения называется *интегрированием дифференциального уравнения*.

Определение 5. Решение дифференциального уравнения (6.1), содержащее n независимых произвольных постоянных, называется его *общим решением*:

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0. \tag{6.2}$$

Замечание. Дифференциальное уравнение может иметь не одно, а несколько общих решений. Например, для уравнения $y' = 2y$ функции $y = Ce^{2x}$ и $y = e^{2x+C}$ являются общими решениями, причем разными, так как первая из них обращается в нуль (C=0), а вторая – никогда в нуль не обращается.

Определение 6. Соотношение $\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$, (6.3)

связывающее между собой независимую переменную, искомую функцию и n произвольных постоянных, называется общим интегралом уравнения (6.1). Следовательно, в общем интеграле решение задано в неявном виде.

Например: рассмотрим уравнение: $y\,y' = 2x$. Для него $y^2 \in\!\!= -x^2 + 2$, где C – произвольная постоянная. $y^2 \in\!\!+ x^2 = 2 \quad \geq 0$ – общий интеграл; $y \in\!\!= \pm x\sqrt{2 \quad - \quad ^2}$ – общее решение.

Определение 7. Решение, полученное из общего при фиксированных значениях произвольных постоянных, называется *частным решением*.

Определение 8. *Особым решением* называется такое решение, которое не может быть получено ни при каких значениях произвольных постоянных, входящих в общее решение.

Определение 9. График частного решения называется *интегральной кривой* рассматриваемого дифференциального уравнения. Уравнение этой линии есть уравнение (6.2) и (6.3) при фиксированных $C_1, C_2, ..., C_n$.

Геометрически общий интеграл представляет собой семейство интегральных кривых, являющихся графиками решений уравнения.

Наример, для уравнения $y' = \dfrac{y}{x}$ общим решением является $y = \dfrac{c}{x}$. Оно представляет собой семейство гипербол.

6.2 Дифференциальные уравнения I порядка

Определение 1. *Дифференциальным уравнением первого порядка* называется соотношение, связывающее независимую переменную, искомую функцию и ее производную:

$$F(x, y, y') = 0. \tag{6.4}$$

Обычно мы рассматриваем уравнения, которые можно разрешить относительно производной

$$y' = f(x, y). \tag{6.5}$$

Если в (6.5) положить $f(x, y) = \dfrac{M(x, y)}{N(x, y)}$, то уравнение (6.5) можно записать в симметричной форме:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0. \tag{6.6}$$

Здесь переменные x и y равноправны. Иногда бывает выгодно рассматривать x как функцию y. В этом случае часто применяют форму записи (6.6).

Пример 1. $y' = -\dfrac{y}{x}$.

Это уравнение можно записать иначе: $\dfrac{dx}{x} + \dfrac{dy}{y} = 0$, т.к. $y' = \dfrac{dy}{dx}$.

Задача Коши

Пусть $y = \varphi(x, C)$ будет общим решением уравнения (6.5). Это общее решение определяет семейство интегральных кривых. Для того чтобы из этого семейства выделить какое-либо частное решение, необходимо задать еще дополнительные условия, в частности, частное решение можно выделить путем задания на плоскости точки (x_0, y_0), через которую проходит интересующая нас интегральная кривая.

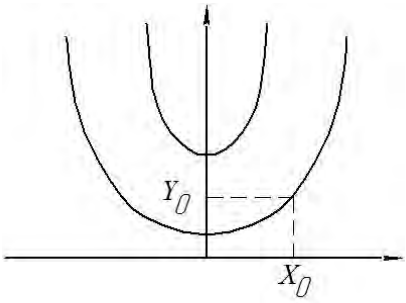


Рисунок 6.1

Следовательно, возникает задача отыскания такого решения уравнения $y' = f(x, y)$, которое при заданном x_0 принимает заданное значение y_0.

Это записывают так: $$\left.\begin{array}{l} y' = f(x, y) \\ y\big|_{x=x_0} = y_0 \end{array}\right\} \qquad (6.7)$$

Такая задача называется *задачей Коши*. Условие $y\big|_{x=x_0} = y_0$ называется *начальным условием*. Начальные условия необходимы для определения соответствующего значения произвольной постоянной *C*. Покажем на примере как вычисляется *C*.

Пусть требуется среди решений уравнения $y' = 4 + y^2$ найти такое, которое при $x = 0$ обращается в нуль, т.е. $y\big|_{x=0} = 0$.

Общим решением служит функция $y = \frac{1}{2}Ctg(2x + \;), \quad \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$.

Так как требуется, чтобы выполнялось условие (6.7), то должно быть $0 = \mathrm{tg}(0 + C)$, а это возможно только при $C = 0$. Следовательно, частное решение, удовлетворяющее условию (6.7), получается из общего решения при $C = 0$, т.е. $y = tg\, 2x,\ x \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$. Это и есть решение задачи Коши.

Основное свойство общего решения

Общее решение $y = \varphi(x, C)$ дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ обладает тем свойством, что из него по любому заданному допустимому начальному условию $y\big|_{x=x_0} = y_0$

может быть найдено частное решение, удовлетворяющее этому условию. Это означает, что подставив в общее решение x_0 вместо x и y_0 вместо y, получаем уравнение относительно C: $y_0 = \varphi(x_0, C)$, из которого всегда может быть найдено значение $C = C_0$ и притом единственное. Функция $y = \varphi(x, C_0)$ служит искомым частным решением.

Замечания:

1. Сформулированное основное свойство общего решения справедливо при определенных требованиях, наложенных на функцию $f(x, y)$. Эти требования даются теоремой существования и единственности.

2. Допустимыми начальными условиями $y\big|_{x=x_0} = y_0$ называются такие условия, когда точка $(x_0, y_0) \in D$, где D – область определения функции $f(x, y)$.

3. Пусть $y = \varphi(x, C)$ будет общим решением некоторого дифференциального уравнения.

Поставим вопрос: можно ли по известному общему решению «восстановить» то дифференциальное уравнение, для которого данное решение является общим?

На этот вопрос отвечает следующая теорема:

Теорема. *Для того, чтобы по известному общему решению* $y = \varphi(x, C)$ *восстановить дифференциальное уравнение, нужно исключить С из равенств:* $\left.\begin{matrix} y = \varphi(x, C) \\ y' = \varphi'(x, C) \end{matrix}\right\}$.

Полученное соотношение $\Phi(x, y, y') = 0$ *и есть то дифференциальное уравнение, для которого* $y = \varphi(x, C)$ *служит общим решением.*

Пример 2. Пусть дана функция $y = tgC(2x + \quad)$, где C – произвольная постоянная. Требуется определить то дифференциальное уравнение, для которого она служит общим решением.

Решение. Используем теорему:

$$y = tgC(2x + \quad) \quad y' = C\frac{1 \qquad y}{\cos^2(2xC\!\!+ \quad)} = 1 + tg^2(2x + \quad) = 4 + \quad^2.$$

Искомым дифференциальным уравнением будет $y' = 4 + y^2$.

6.3 Уравнения с разделяющимися переменными

Уравнением с разделяющимися переменными называется уравнение вида:

$$P(x)Q(y)\,dx + R(x)S(y)\,dy = 0. \tag{6.8}$$

В этом уравнении легко разделить переменные. Для этого поделим уравнение на произведение $R(x)Q(y) \neq 0$. Тогда получим:

$$\frac{P(x)}{R(x)}dx+\frac{S(y)}{Q(y)}dy=0. \tag{6.9}$$

Это уравнение с разделенными переменными. Его общим интегралом будет

$$\int\frac{P(x)}{R(x)}dx+\int\frac{S(y)}{Q(y)}dy=C. \tag{6.10}$$

Если решения $y_k=a_k$ получаются из (6.10) при подходящем выборе *C*, то такие решения есть частные, если же подобрать нужное *C* невозможно, то они – особые решения.

Следовательно, если *у* уравнения (6.8) есть особые решения, то соответствующие им графики, т.е. интегральные кривые – это прямые параллельные оси *OX*.

Частным решением уравнения (6.8), удовлетворяющим начальному условию $y\big|_{x=y_0}=y_0$ будет функция $y(x)$, определенная уравнением:

$$\int_{x_0}^{x}\frac{P(t)}{R(t)}dt+\int_{y_0}^{y}\frac{S(u)}{Q(u)}du=0. \tag{6.11}$$

Пример 3. Для уравнения $x\sqrt{1-y^2}\,dx+y\sqrt{1-x^2}\,dy=0$ найти общий интеграл и частное решение, удовлетворяющее условию $y\big|_{x=-1}=0$.

Решение. Найдём общий интеграл. Делим уравнение на $\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\neq 0$:

$$\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{y\,dy}{\sqrt{1-y^2}}=0.$$

Отсюда $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}+\int\frac{y\,dy}{\sqrt{1-y^2}}=C$ или $\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}=C\Rightarrow$ – общий интеграл.

При $x=-1$ $y=0$ имеем С$=\sqrt{1-(-1)^2}+\sqrt{1-0^2}\Rightarrow C=1$.

Следовательно, частное решение будет иметь вид: $\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}=1$.

Пример 4. Найти частное решение уравнения $(x+2y)\cdot y'=1$, если $y(0)=-\frac{1}{2}$ – задача Коши.

Решение. Введем новую функцию $z=x+2y$, тогда $z'=1+2y'$, $y'=\frac{z'-1}{2}$; $z\cdot\frac{z'-1}{2}=1$;

$$z'-1=\frac{2}{z},\ z'=\frac{2}{z}+1=\frac{2+z}{z},\ \frac{zdz}{2+z}=dx;\int\frac{z+2-2}{2+z}dz=\int dx+c;\ z-2\ln|z+2|=x+c;$$

$x+2y-2\ln|x+2y+2|=x+c;\ y-\ln|x+2y+2|=c$ – общее решение;

$-\frac{1}{2}-\ln|0-1+2|=c;\ c=-\frac{1}{2};\ y-\ln|x+2y+2|=-\frac{1}{2}$ – частное решение.

6.4 Однородные уравнения

Определение. Уравнение

$$y' = f(x, y) \tag{6.12}$$

называется однородным, если $f(x, y)$ может быть представлена как функция отношения своих аргументов,

$$f(x, y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right). \tag{6.13}$$

То есть однородное уравнение имеет вид:

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right). \tag{6.14}$$

Однородные уравнения можно записать ещё и так:

$$N(\mathrm{x}, \mathrm{y})\,\mathrm{dx} \pm \mathrm{M}(\mathrm{x}, \mathrm{y})\,\mathrm{dy} = 0, \tag{6.15}$$

где $N(x,y)$ и $M(x,y)$ – однородные функции одного порядка.

Решаются однородные уравнения с помощью подстановки $u = y/x$, тогда $y = u \cdot x$ $y' = u' \cdot x + u$.

Пример 5. Решить уравнение $y' = \dfrac{y}{x} + \mathrm{tg}\dfrac{y}{x}$.

Решение. Так как $y' = \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$ – уравнение однородное. Введем новую функцию u по формуле: $u = \dfrac{y}{x}$, $y' = u' \cdot x + u$. Уравнение примет вид: $u' \cdot x + u = u + \mathrm{tg}\,u$ или $\dfrac{du}{dx} \cdot x = \mathrm{tg}\,u \Rightarrow \mathrm{ctg}\,u \cdot du = \dfrac{dx}{x}$ – это уравнение с разделенными переменными. Интегрируя, получаем общее решение $\ln|\sin u| = \ln|x| + \ln|c|$. Окончательно, общее решение $\sin u = c \cdot x$ исходного уравнения имеет вид $\sin\dfrac{y}{x} = c \cdot x$, где c – произвольная постоянная.

Пример 6. Решить уравнение $y' = 2\sqrt{\dfrac{y}{x}} + \dfrac{y}{x}$.

Решение. Уравнение однородное. Полагаем $y = u \cdot x$. $u'x + u = 2\sqrt{u} + u$; $u'x = 2\sqrt{u}$. Если $\sqrt{u} \neq 0$, то $\dfrac{du}{2\sqrt{u}} = \dfrac{dx}{x}$. Отсюда $\sqrt{u} = ln|x| + C$; $u = \left(ln|x| + C\right)^2$. Окончательно $y = x\left(\ln|x| + C\right)^2$ – общий интеграл.

Дифференциальные уравнения, приводящиеся к однородным

Рассмотрим уравнение вида

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a_1x+b_1y+C_1}{ax+by+C}\right). \tag{6.16}$$

Если $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a & b \end{vmatrix} \neq 0$, то это уравнение с помощью подстановки $x=\xi+\alpha, y=\eta+\beta$, где ξ и η – новые переменные, а α и β – некоторые постоянные числа, определяемые из системы

$$\begin{cases} a_1\alpha+b_1\beta+C_1=0, \\ a\alpha+b\beta+C=0, \end{cases}$$

приводится к однородному уравнению $\frac{d\eta}{d\xi}=f(\frac{a_1\xi+b_1\eta}{a\xi+b\eta})$.

Если $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a & b \end{vmatrix} = 0$, то уравнение (6.16) принимает вид

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{k(ax+by)+C_1}{ax+by+C}\right)\equiv f_1(ax+by).$$

Полагая $z=ax+by$, приходим к уравнению, не содержащему независимой переменной.

Пример 7. Решить уравнение: $(x+y-2)dx+(x-y+4)dy=0$.

Решение. Уравнение является частным случаем уравнения (6.16).

Определитель $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, поэтому надо решить следующую систему $\begin{cases} \alpha+\beta-2=0 \\ \alpha-\beta+4=0 \end{cases}$.

Решая, получим, что $\alpha=-1, \beta=3$. Выполняя в заданном уравнении подстановку $x=\xi-1, y=\eta+3$, получаем однородное уравнение $(\xi+\eta)d\xi+(\xi-\eta)d\eta=0$. Интегрируя его при помощи подстановки $\eta=z\xi$, находим $\xi^2+2\eta\xi-\eta^2=C$.

Возвращаясь к старым переменным *x* и *y*, по формулам $\xi=x+1, \eta=y-3$, имеем $x^2+2xy-y^2-4x+8y=C$.

Пример 8. Проинтегрировать дифференциальное уравнение: $y'=\frac{x-y}{2x-2y+5}$.

Решение. У этого уравнения $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0$. Решаем с помощью подстановки

$x-y=z;\ dx-dy=dz;\ dy=dx-dz$. Следовательно, $\frac{dx-dz}{dx}=\frac{z}{2z+5};\ 1-\frac{dz}{dx}=\frac{z}{2z+5}$;

$\frac{dz}{dx}=1-\frac{z}{2z+5}=\frac{2z+5-z}{2z+5};\ \frac{dz}{dx}=\frac{z+5}{2z+5};\ \frac{2z+5}{z+5}dz=dx;\ \int\frac{2z+5}{z+5}dz=\int dx;\ \int\left(2-\frac{5}{z+5}\right)dz=dx$;

$2z-5\ln|z+5|=x+C$. Заменяя z, получим $x-2y-5\ln|x-y+5|=C$ – общий интеграл.

6.5 Линейные уравнения

Определение. *Линейным дифференциальным уравнением I порядка* называется дифференциальное уравнение вида:

$$y'+p(x)y=q(x), \qquad (6.17),$$

где $y(x)$ – неизвестная функция;

$p(x),\ q(x)$ – заданные функции.

Если $q(x)=0$, то уравнение (6.17) примет вид:

$$y'+p(x)y=0 \qquad (6.18)$$

и называется *линейным однородным*, соответствующим уравнению (6.17). При этом уравнение (6.17) называется *линейным неоднородным*.

6.5.1 Интегрирование линейного однородного уравнения

Рассмотрим линейное однородное уравнение (6.18). Это уравнение с разделяющимися переменными. Пусть $y\not\equiv 0$, тогда

$$\frac{dy}{y}+p(x)dx=0. \qquad (6.19)$$

Отсюда общий интеграл $\int\frac{dy}{y}+\int p(x)dx=C$ или $\ln|y|=C-\int p(x)dx$;

$|y|=e^{C}e^{-\int p(x)dx}-\int p(x)\,dx$; e^{C} заменяем на $\tilde{C}>0$; $y=\pm\tilde{C}e^{-\int p(x)dx}$. Но $\pm\tilde{C}$ есть любое число, кроме нуля. Положим $\pm\tilde{C}=\hat{C}$.

$$y=\hat{C}e^{-\int p(x)dx},\ \hat{C}\neq 0, \qquad (6.20)$$

где $\hat{C}$ – произвольная постоянная. Это общее решение не содержит функции $y=0$, которая является решением уравнения (6.19). Для того чтобы общее решение содержало все решения, его надо записать в виде:

$$y=Ce^{-\int p(x)dx}, \qquad (6.21)$$

где C – произвольная постоянная, принимающая любые значения.

Пример 9. Найти общее решение уравнения $y'+2x^2y=0$.

Решение. Имеем $p(x) = 2x^2$. Тогда $\int p(x)dx = \frac{2x^3}{3}$ (произвольную постоянную можно считать равной нулю). Получаем $y = C\,e^{-\int p(x)dx} = C\,e^{-\frac{2x^3}{3}}$ – общее решение.

6.5.2 Интегрирование линейного неоднородного уравнения

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение

$$y' + p(x)y = q(x). \tag{6.22}$$

Его решаем с помощью подстановки $y = uv;\ y' = u'v + uv'$. Подставляем в исходное уравнение: $u'v + uv' + p(x)uv = q(x)$. Второе и третье слагаемое объединяем в скобку и выносим общий множитель $u'v + u(v' + p(x)v) = q(x)$. Определяем $v(x)$ из условия, что $v' + p(x)v = 0$: $\frac{dv}{dx} = -p(x);\ \frac{dv}{v} = -p(x)dx;\ \int\frac{dv}{v} = -\int p(x)dx;\ \ln|v| = -\int p(x)dx;\ v = e^{-\int p(x)dx}$. Найденное выражение для v подставляем в оставшуюся часть уравнения: $u'v = q(x)$; $u'\cdot e^{-\int p(x)dx} = q(x);\ \frac{du}{dx} = q(x)\cdot e^{-\int p(x)dx};\ du = q(x)\cdot e^{-\int p(x)dx}dx;\ u = \int q(x)\cdot e^{-\int p(x)dx}dx + C$.

Общее решение имеет вид: $y = u\cdot v = \left(\int q(x)\cdot e^{\int p(x)dx}dx + C\right)e^{-\int p(x)dx}$, C – произвольная постоянная.

Пример 10. Найти решение диференциального уравнения $y'\sin x - y\cos x = 1$

Решение. Имеем: $y' - y\frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\sin x}$ – линейное неоднородное уравнение. Решаем с помощью подстановки $y = uv;\ y' = u'v + uv'$. Получаем:

$$u'v + uv' - uv\frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\sin x};\quad u'v + u\left(v' - v\frac{\cos x}{\sin x}\right) = \frac{1}{\sin x}.$$

Пусть $v' - v\frac{\cos x}{\sin x} = 0;\ \frac{dv}{dx} = v\frac{\cos x}{\sin x};\ \frac{dv}{v} = \frac{\cos x dx}{\sin x};\ \int\frac{dv}{v} = \int\frac{d(\sin x)}{\sin x};\ \ln|v| = \ln|\sin x|;\ v = \sin x$.

Найденное выражение для v подставляем в оставшуюся часть уравнения:

$$u'\sin x = \frac{1}{\sin x};\ u' = \frac{1}{\sin^2 x};\ \frac{du}{dx} = \frac{1}{\sin^2 x};\ du = \frac{dx}{\sin^2 x};\ \int du = \int\frac{dx}{\sin^2 x};\ u = -\operatorname{ctg} x + C.$$

Следовательно, общее решение $y = u\cdot v = (-\operatorname{ctg} x + C)\cdot\sin x$.

6.6 Уравнение Бернулли

Определение. Уравнением Бернулли называется уравнение вида:

$$y' + p(x)y = q(x)y^n, \tag{6.22}$$

где n – любое число, не обязательно целое.

При $n=0$ уравнение Бернулли превращается в линейное неоднородное уравнение. При $n=1$ оно превращается в линейное однородное уравнение.

Таким образом, уравнение Бернулли служит некоторым обобщением линейных уравнений, в общем случае оно является *нелинейным дифференциальным уравнением* (при $n \neq 0$ и $n \neq 1$).

Однако во всех случаях его решение тесно связано с решением линейного уравнения.

Теорема. *Пусть $n \neq 0$ и $n \neq 1$. Тогда уравнение Бернулли (6.22) с помощью подстановки $z = y^{1-n}$ сводится к решению линейного уравнения (для функции z).*

Замечание. Уравнение Бернулли (6.22) может быть решено другим способом. Введем вместо неизвестной функции $y(x)$ две неизвестные функции $u(x)$ и $v(x)$, такие, что $y(x) = u(x) \cdot v(x)$,

$$y'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x). \tag{6.23}$$

Далее решаем по аналогии с линейным уравнением

Пример 11. $xy' - 4y = x^2\sqrt{y}$ или $y' - \frac{4}{x}y = x\sqrt{y}$.

Решение. Это уравнение Бернулли. Здесь $p(x) = -\frac{4}{x}$, $q(x) = x$, $n = \frac{1}{2}$. Преобразуем уравнение, разделив его на $\sqrt{y}$: $\frac{y'}{\sqrt{y}} - \frac{4}{x}\sqrt{y} = x$.

Положим $z = \sqrt{y}$, тогда $z' = \frac{y'}{2\sqrt{y}}$, $\frac{y'}{\sqrt{y}} = 2z'$. Следовательно, $2z' - \frac{4}{x}z = x$ или $z' - \frac{2}{x}z = \frac{x}{2}$. Отсюда $z = C\,e^{\int \frac{2}{x}dx} + e^{\int \frac{2}{x}dx} \int \frac{x}{2} e^{-\int \frac{2}{x}dx} dx$. $z = C\,x^2 + x^2 \int \frac{dx}{2x} = C\,x^2 + \frac{1}{2}x^2 \ln|x|$ и $y = z^2 = \left(C\,x^2 + \frac{1}{2}x^2 \ln|x| \right)^2$, $y = 0$ – особое решение.

6.7 Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах

Определение. Если в уравнении

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \tag{6.24}$$

левая часть есть полный дифференциал некоторой функции $U(x,y)$, то оно называется уравнением в полных дифференциалах. Это уравнение можно переписать в виде $du(x,y)=0$, следовательно, его общий интеграл есть $u(x,y)=c$.

Например, уравнение $xdy+ydx=0$ есть уравнение в полных дифференциалах, так как его можно переписать в виде $d(xy)=0$. Общим интегралом будет $xy=c$.

Теорема. Предположим, что функции M и N определены и непрерывны в некоторой односвязной области D и имеют в ней непрерывные частные производные соответственно по y и по x. Тогда, для того, чтобы уравнение (6.24) было уравнением в полных дифференциалах, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось тождество

$$\frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x}. \tag{6.25}$$

Доказательство. Доказательство необходимости этого условия очевидно. Поэтому докажем достаточность условия (6.25). Покажем, что может быть найдена такая функция *u(x,y)*, что $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = M(x,y)$ и $\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$. Действительно, поскольку $\frac{\partial u}{\partial x} = M(x,y)$, то

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(x,y)dx + \varphi(y), \tag{6.26}$$

где $\varphi(y)$ – произвольная дифференцируемая функция. Продифференцируем (6.26) по y:

$\frac{\partial u}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} dx + \varphi'(y)$. Но $\frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x}$, следовательно,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} dx + \varphi'(y) = N(x,y) - N(x_0,y) + \varphi'(y).$$

Положим $\varphi'(y) = Q(x_0,y) \Leftrightarrow \varphi(y) = \int_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy$ и тогда $\frac{\partial u}{\partial y} = N(x,y)$.

Итак, построена функция $u(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy$, для которой $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = M(x,y)$, а $\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$.

Пример 12. Найти общий интеграл уравнения: $(\frac{y}{x^2+y^2} + e^x)dx - \frac{x}{x^2+y^2}dy = 0$.

Решение. Здесь $M(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2} + e^x$, $N(x,y) = -\frac{x}{x^2+y^2}$.

Тогда $\frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$. Следовательно, заданное дифференциальное уравнение 1-го порядка является уравнением в полных дифференциалах, т.е. существует такая функция *u(x,y)*, частные производные которой соответственно по x и y равны $M(x,y)$ и $N(x,y)$:

$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y}{x^2+y^2}+e^x$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x}{x^2+y^2}$. Интегрируем первое из двух соотношений по x:

$$u(x,y)=\int(\frac{y}{x^2+y^2}+e^x)dx+\varphi(y)\,,\ u(x,y)=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}+e^x+\varphi(y)\,.$$

Теперь продифференцируем $u(x,y)$ по y и приравняем полученное в результате выражение выписанной выше частной производной $\frac{du}{dy}$: $-\frac{x}{x^2+y^2}+\varphi'(y)=-\frac{x}{x^2+y^2}$.

Откуда $\varphi'(y)=0$ и $\varphi(y)=c$. Следовательно, общим интегралом заданного уравнения является: $\operatorname{arctg}\frac{x}{y}+e^x=c$.

Интегрирующий множитель

Определение. Если уравнение $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ не является уравнением в полных дифференциалах и существует функция $\mu = \mu(x,y)$ такая, что после умножения на нее обеих частей уравнения получается уравнение $\mu(Mdx + Ndy) = 0$ в полных дифференциалах, т. е. $\mu(Mdx + Ndy)du$, то функция $\mu(x,y)$ называется интегрирующим множителем уравнения. В случае, когда уравнение уже есть уравнение в полных дифференциалах, полагают $\mu = 1$.

Если найден интегрирующий множитель μ, то интегрирование данного уравнения сводится к умножению обеих его частей на μ и нахождению общего интеграла полученного уравнения в полных дифференциалах.

Если μ есть непрерывно дифференцируемая функция от x и y, то $\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}\equiv\frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$.

Отсюда следует, что интегрирующий множитель μ удовлетворяет следующему уравнению с частными производными 1-го порядка:

$$N\frac{\partial\mu}{\partial x}-M\frac{\partial\mu}{\partial y}=\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right). \tag{6.27}$$

Если заранее известно, что $\mu = \mu(\omega)$, где ω – заданная функция от x и y, то уравнение (6.27) сводится к обыкновенному (и притом линейному) уравнению с неизвестной функцией μ от независимой переменной ω:

$$\frac{d\mu}{d\omega}=\Psi(\omega)\mu \tag{6.28}$$

где $\Psi(\omega)\equiv\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N\frac{\partial\omega}{\partial x}-M\frac{\partial\omega}{\partial y}}$, т. е. дробь является функцией только от ω. Решая уравнение (6.28), находим интегрирующий множитель $\mu = e^{\int \Psi(\omega)d\omega}$, $c = 1$.

В частности, уравнение $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ имеет интегрирующий множитель, зависящий только от x ($\omega = x$) или только от y ($\omega = y$), если выполнены соответственно следующие условия:

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} \equiv \Psi(x),\ \mu = e^{\int \Psi(x)dx} \text{ или } \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M} \equiv \Psi(y),\ \mu = e^{\int \Psi(y)dy}.$$

Пример 13. Решить уравнение $\left(xy^2 - 3y^3\right)dx + \left(1 - 3xy^2\right)dy = 0$.

Решение.

Положим $M(x,y) = xy^2 - 3y^3$, $N(x,y) = 1 - 3xy^2$. Тогда $\frac{\partial M}{\partial y} = 2xy - 9y^2$; $\frac{\partial N}{\partial x} = -3y^2$.

Подставив полученные выражения, получим

$$\left(\left(1 - 3xy^2\right)\frac{\partial\omega}{\partial x} - \left(xy^2 - 3y^3\right)\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)\frac{d\mu}{d\omega} = \left(2xy - 6y^2\right)\mu. \tag{6.29}$$

Предположим, что $\omega = x$, тогда (6.29) преобразуется в выражение вида

$$\left(\left(1 - 3xy^2\right)\cdot 1 - \left(xy^2 - 3y^3\right)\cdot 0\right)\frac{d\mu}{d\omega} = \left(2xy - 6y^2\right)\mu;\quad \frac{d\mu}{\mu} = \frac{2y(x - 3y)}{1 - 3xy^2}dx.$$

Замечаем, что функция ω не может зависеть только от x, поскольку в последнем выражении в правой части функция, зависящая от x и y. Проверим теперь множитель $\omega = y$.

Подставим в (6.29), получим

$$\left(-xy^2 + 3y^3\right)\frac{d\mu}{dy} = \left(2xy - 6y^2\right)\mu,\ \frac{d\mu}{\mu} = \frac{-2y(x - 3y)}{-y^2(x - 3y)}dy,\ \frac{d\mu}{\mu} = \frac{-2}{-y}dy,\ \ln\mu = -2\ln y,\ \mu = y^{-2}\ –$$

интегрирующий множитель.

Домножаем исходное уравнение на $\frac{1}{y^2}$, получаем уравнение в полных дифференциалах

$$(x - 3y)dx + \left(\frac{1}{y^2 - 3x}\right)dy = 0;\quad M(x,y) = x - 3y,\quad N(x,y) = \frac{1}{y^2} - 3x \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Пусть $U'_x(x,y) = x - 3y,\ U'_y(x,y) = \frac{1}{y^2} - 3x$.

Тогда $U(x,y) = \int U'_x dx = \int (x - 3y)dx = \frac{x^2}{2} - 3yx + \varphi(y)$.

Поскольку $\left(\frac{x^2}{2} - 3yx + \varphi(y)\right)'_y = U'_y$, то получаем $-3x + \varphi'(y) = \frac{1}{y^2} - 3x$,

$$\varphi'(y)=\frac{1}{y^2}\Rightarrow\varphi(y)=\int\frac{dy}{y^2}=-\frac{1}{y}+C.$$

Подставляя значение $\varphi(y)$ в $U(x,y)$, получаем общее решение исходного уравнения $\frac{x^2}{2}-3yx-\frac{1}{y}=C$.

6.8 Линейные однородные ДУ высших порядков. Определитель Вронского

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=0. \tag{6.30}$$

Установим некоторые свойства его решения.

Теорема. Если функции $y_1=y_1(x)$ и $y_2=y_2(x)$ – частные решения уравнения (6.30), то

$$y=c_1y_1(x)+c_2y_2(x), \tag{6.31}$$

где c_1, c_2 – произвольные постоянные, также является решением этого уравнения (6.30).

Доказательство. Подставим выражение y и ее производных в рассматриваемое уравнение (6.30):

$$\begin{aligned}&(c_1y_1+c_2y_2)''+a_1(x)(c_1y_1+c_2y_2)'+a_2(x)(c_1y_1+c_2y_2)=\\&=c_1y_1''+c_2y_2''+a_1(x)(c_1y_1'+c_2y_2')+a_2(x)(c_1y_1+c_2y_2)=\\&=c_1(y_1''+a_1(x)y_1'+a_2(x)y_1)+c_2(y_2''+a_1(x)y_2'+a_2(x)y_2)=c_1\cdot 0+c_2\cdot 0=0.\end{aligned}$$

Так как функции y_1 и y_2 – решения уравнения (6.30) и, следовательно, выражения в скобках тождественно равны нулю. Таким образом, $y=c_1y_1+c_2y_2$ также является решением уравнения (6.30). Если y_1 и y_2 – решения уравнения (6.30), то решениями будут и $y=y_1+y_2$ и $y=cy_1$. Функция (6.31) содержит две произвольные постоянные.

Определение. Функции $y_1=y_1(x)$ и $y_2=y_2(x)$ называются линейно независимыми на интервале (a,b), если равенство

$$\alpha_1y_1+\alpha_2y_2=0 \tag{6.32}$$

выполняется при $\alpha_1=0$ и $\alpha_2=0$.

Определение. Если равенство (6.32) выполняется хотя бы при одном $\alpha_i\neq 0$, то функции y_1 и y_2 называются линейно зависимыми.

Очевидно, функции y_1 и y_2 линейно зависимы тогда и только тогда, когда они пропорциональны: $\frac{y_1}{y_2}=\lambda$.

Средством изучения линейной зависимости системы функций является определитель Вронского W_x.

Для двух дифференцируемых функций $W_x = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$.

Для *n* функций

$$W_x = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \dots & y_n'' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Определение. Функции $y_1, \dots, y_n$ линейно зависимы, если определитель Вронского тождественно равен нулю.

Определение. Определитель Вронского не равен нулю, если частные решения (функции $y_i(x)$) линейно независимы.

Определение. Совокупность линейно независимых на интервале (a,b) частных решений $y_1(x), \dots, y_n(x)$ образует фундаментальную систему решений, т.е. любое произвольное решение может быть получено как комбинация $y = \alpha_1 y_1(x) + \ldots + \alpha_n y_n(x)$.

Теорема. Если частные решения $y_1 = y_1(x), \dots, y_n = y_n(x)$ образуют на (a,b) фундаментальную систему решений, то общее решение представляется в виде функции

$$y = c_1 y_1 + \ldots + c_n y_n(x),$$

где c_i – произвольные постоянные.

Пример 14. Показать, что функции $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = xe^{2x}$, $y_3 = x^2 e^{2x}$ образуют фундаментальную систему решений уравнения $y''' - 8y = 0$.

Решение. Найдем определитель Вронского

$$W_x = \begin{vmatrix} e^{2x} & xe^{2x} & x^2 e^{2x} \\ 2e^{2x} & (1+2x)e^{2x} & (2x+2x^2)e^{2x} \\ 4e^{2x} & (4+4x)e^{2x} & (2+8x+4x^2)e^{2x} \end{vmatrix} = e^{6x} \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 2 & (1+2x) & (2x+2x^2) \\ 4 & (4+4x) & (2+8x+4x^2) \end{vmatrix} =$$

$$= e^{6x} \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 4 & (2+8x) \end{vmatrix} = e^{6x} \left[1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2x \\ 4 & 2+8x \end{vmatrix} \right] = e^{6x}(2+8x-8x) = 2e^{6x}.$$

Получим $W(x) \neq 0$ ни при каких *x*. Следовательно, данная система образует фундаментальную систему решений исходного уравнения.

6.9 Дифференциальные уравнения II порядка, допускающие понижение порядка

Рассмотрим частные случаи уравнений II порядка, допускающих «понижение» порядка, т.е. случаи, когда уравнение II порядка приводится к интегрированию двух уравнений первого порядка.

1) Правая часть не содержит *y* и y'

Пусть дано уравнение

$$y''=f(x). \tag{6.33}$$

Положим $y'=z$. Тогда $y''=z'$ и $z'=f(x)$. Получили уравнение первого порядка. Отсюда $z=\int f(x)dx+c_1$ или $y'=\int f(x)dx+c_1$. Имеем опять уравнение первого порядка $y=\int\left(\int f(x)dx+c_1\right)dx+c_2$ или $y=\int\left(\int f(x)dx\right)dx+c_1x+c_2$. Получили общее решение уравнения (6.33).

Пример 15. Найти общее решение уравнения $y''=\cos 2x+x+5$.

Решение. Последовательно интегрируем исходное уравнение

$$y'=\int(\cos 2x+x+5)dx=\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{x^2}{2}+5x+C_1$$

$$y=\int\left(\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{x^2}{2}+5x+C_1\right)dx=-\frac{1}{4}\cos 2x+\frac{x^3}{6}+\frac{5x^2}{2}+C_1x+C_2 - \text{общее решение.}$$

2) Правая часть уравнения не содержит *y*

Пусть дано уравнение

$$y''=f(x,y'). \tag{6.34}$$

Положим $y'=z$, тогда для z имеем уравнение $z'=f(x,z)$. Пусть его решение будет $z=\varphi(x,c_1)$. Следовательно, $y=\varphi(x,c_1)$. Отсюда $y=\int\varphi(x,c_1)\,dx+c_2$. Это общее решение уравнения (6.34).

Пример 16. $y''=\dfrac{y'}{x}+x^2$.

Решение. Положим $z=y'$, тогда $z'=\dfrac{z}{x}+x^2$ и его решение $z=\dfrac{x^3}{2}+2c_1x$. Следовательно, $y'=\dfrac{x^3}{2}+2c_1x$ и $y=\int\left(\dfrac{x^3}{2}+2c_1x\right)dx+c_2$ или $y=\dfrac{x^4}{8}+c_1x^2+c_2$ – общее решение уравнения (6.34).

3) Правая часть не содержит *x*

$$y''=f(y,y'). \tag{6.35}$$

Положим $y' = z$ и будем считать z функцией y. Тогда $y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = z\frac{dz}{dy}$.

Итак, $y'' = z\frac{dz}{dy}$. Подставляя это в уравнение (6.35), получим: $z\frac{dz}{dy} = f(y,z)$, т.е. уравнение первого порядка относительно z. Решив его, будем иметь $z = \varphi(y, c_1)$ или $\frac{dy}{dx} = \varphi(y, c_1)$. Получили уравнение с разделяющимися переменными. Отсюда $\frac{dy}{\varphi(y, c_1)} = dx$.

$x + c_2 = \int \frac{dy}{\varphi(y, c_1)}$ – это общий интеграл уравнения (6.35).

Пример 17. $y'' = -y$.

Решение. Положим $z = y'$, тогда $z\frac{dz}{dy} = -y$ или $z\,dz = -y\,dy$. Отсюда $z^2 = c_1 - y^2$; $z = \pm\sqrt{c_1 - y^2}$ или $\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{c_1 - y^2}$; $\frac{dy}{\sqrt{c_1 - y^2}} = \pm dx \to \arcsin\frac{y}{c_1} = c_2 \pm x$ или $y = \sqrt{c_1}\sin(c_2 \pm x)$ – общее решение.

6.10 Линейные однородные дифференциальные уравнения II порядка с постоянными коэффициентами

Рассмотрим линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0. \tag{6.36}$$

где a_1 и a_2 – постоянные коэффициенты.

Найдем общее решение этого уравнения. Будем искать решение уравнения в форме $y = e^{\lambda x}$. Тогда $y' = \lambda e^{\lambda x}$, $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$. Подставляя это выражение в уравнение (6.36), получим: $e^{\lambda x}(\lambda^2 + a_1\lambda + a_2) = 0$. Но так как $e^{\lambda x} \neq 0$, то

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0. \tag{6.37}$$

Это уравнение по отношению к уравнению (6.36) называется *характеристическим*.

Если функция $y = e^{\lambda x}$ есть решение уравнения (6.36), то λ должно быть корнем характеристического уравнения (6.37).

Рассмотрим три возможные случая:

1) корни уравнения вещественны и различны $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

2) корни вещественны и равны $\lambda_1 = \lambda_2$.

3) корни комплексно сопряженные $\lambda_1 = \alpha + \beta i$, $\lambda_2 = \alpha - \beta i$.

1 случай. $\lambda_1 \neq \lambda_2$ и действительные.

В этом случае функции $e^{\lambda_1 x}$ и $e^{\lambda_2 x}$ будут решениями уравнения (6.37). Так как их отношение $\dfrac{e^{\lambda_1 x}}{e^{\lambda_2 x}} = e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x} \neq \text{const}$, то эти решения линейно независимы и, следовательно, они составляют фундаментальную систему. А поэтому общее решение уравнения (6.37) в этом случае будет

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}. \tag{6.38}$$

Пример 18. $y'' - 2y' - 3y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение будет $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$. Его корни $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2$. Общее решение будет $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x}$.

2 случай. Корни равны $\lambda_1 = \lambda_2 = -\dfrac{a_1}{2}$.

В этом случае имеем пока только одно решение $y_1 = e^{\lambda_1 x}$. Покажем, что вторым решением будет $y_2 = x e^{\lambda_1 x}$. Действительно,

$$y_2 = x e^{\lambda_1 x},\ y_2' = e^{\lambda_1 x} + \lambda_1 x e^{\lambda_1 x},\ y_2'' = 2\lambda_1 e^{\lambda_1 x} + \lambda_1^2 x e^{\lambda_1 x}.$$

Подставив это в левую часть уравнения (6.37), получим

$$2\lambda_1 e^{\lambda_1 x} + \lambda_1^2 x e^{\lambda_1 x} + a_1(e^{\lambda_1 x} + \lambda_1 x e^{\lambda_1 x}) + a_2 x e^{\lambda_1 x} =, \quad = e^{\lambda_1 x}\left\{\left(\underbrace{\lambda_1^2 + a_1\lambda_1 + a_2}_{=0}\right) + \left(\underbrace{2\lambda_1 + a_1}_{=0}\right)\right\} = 0,$$ так как λ_1 есть корень уравнения (6.37), и потому, что $\lambda_1 = -\dfrac{a_1}{2}$. А это значит, что $y_2 = x e^{\lambda_1 x}$ есть решение уравнения (6.37), что и требовалось доказать.

Итак, мы имеем два решения $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ и $y_2 = x e^{\lambda_1 x}$. Они линейно независимы, следовательно, образуют фундаментальную систему решений. Поэтому общий интеграл будет $y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 x e^{\lambda_1 x} = (c_1 + c_2 x) e^{\lambda_1 x}$.

Пример 19. $y'' - 4y' + 4 = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$. Корни $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$. Общее решение $y = (c_1 + c_2 x) e^{2x}$.

3 случай. Корни характеритического уравнения комплексно сопряженные: $\lambda_1 = \alpha + \beta i,\ \lambda_2 = \alpha - \beta i$. Следовательно, имеем два комплексных линейно независимых решения $y_1 = e^{(\alpha + i\beta)x},\ y_2 = e^{(\alpha - i\beta)x}$.

Общее решение будет $y = c_1 e^{(\alpha + i\beta)x} + c_2 e^{(\alpha - i\beta)x} = e^{\alpha x}(c_1 e^{i\beta} + c_2^{-i\beta})$, где c_1 и c_2 – комплексные числа. Выразим $e^{\beta i}$ и $e^{-\beta i}$ по формулам Эйлера. Тогда $y = e^{\alpha x}\{c_1(\cos\beta x + i\sin\beta x) + c_2(\cos\beta x - i\sin\beta x)\} = e^{\alpha x}\{\cos\beta x(c_1 + c_2) + \sin\beta x(ic_1 - ic_2)\}$

Положим здесь $c_1 = \dfrac{A - Bi}{2},\ c_2 = \dfrac{A + Bi}{2}$. Тогда $c_1 + c_2 = A,\ i(c_1 - c_2) = i(-Bi) = B$.

Поэтому $y = e^{\alpha x}\{A\cos\beta x + B\sin\beta x\} = Ae^{\alpha x}\cos\beta x + Be^{\alpha x}\sin\beta x$.

Таким образом, в случае комплексно сопряженных корней характеристического уравнения, исходное уравнение (6.36) имеет два линейно независимых вещественных решения $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x,\ y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$.

Общее решение имеет вид: $y = e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x + c_2\sin\beta x)$.

Пример 20. $y'' - 6y' + 15y = 0$.

Решение. $\lambda^2 - 6\lambda + 15 = 0 \quad \lambda_1 = 3 + 2i,\ \lambda_2 = 3 - 2i\ (\alpha = 3,\ \beta = 2)$.

Общее решение: $y = e^{3x}(c_1\cos 2x + c_2\sin 2x)$.

6.11 Линейные неоднородные дифференциальные уравнения II порядка с постоянными коэффициентами

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x), \tag{6.39}$$

где a_1 и a_2 – заданные постоянные коэффициенты, $f(x)$ – заданная функция.

Общее решение такого уравнения складывается из общего решения $\overline{y(x)}$ соответствующего однородного уравнения

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \tag{6.40}$$

и какого-нибудь частного решения $y^*(x)$ уравнения (6.39), т.е.

$$y = \overline{y(x)} + y^*(x). \tag{6.41}$$

Выбор выражения для $y^*(x)$ осуществляется в зависимости от правой части $f(x)$ и корней λ_i характеристического уравнения. Рассмотрим частные случаи.

1) $f(x) = P_n(x)$ – многочлен *n*-го порядка и $\lambda_i \neq 0$. Тогда $y^* = Q_n(x)$ – многочлен с буквенными коэффициентами того же *n*-го порядка.

2) $f(x) = P_n(x)$ и есть $\lambda_i = 0$. Тогда $y^* = Q_n(x)\cdot x^k$, где *k* – число корней $\lambda_i = 0$.

3) $f(x) = P_n(x)\cdot e^{\alpha x}$, и $\lambda_i \neq \alpha$. Тогда $y^* = Q_n(x)\cdot e^{\alpha x}$.

4) $f(x)=P_n(x)\cdot e^{\alpha x}$, есть $\lambda_i=\alpha$. Тогда $y^*=Q_n(x)\cdot e^{\alpha x}\cdot x^k$, где k – число корней $\lambda_i=\alpha$.

5) $f(x)=e^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta x+R_m(x)\sin\beta x\right)$ и $\lambda_{1,2}\neq\alpha\pm\beta_i$.

Тогда $y^*=e^{\alpha x}\left(Q_q(x)\cos\beta x+D_q(x)\sin\beta x\right)$, где $q=\max\{n;m\}$.

6) $f(x)=e^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta x+R_m(x)\sin\beta x\right)$ и $\lambda_{1,2}=\alpha\pm\beta_i$.

Тогда $y^*=x\cdot e^{\alpha x}\left(Q_q(x)\cos\beta x+D_q(x)\sin\beta x\right)$.

Дальнейшее решение осуществляется в следующей последовательности:

- От выбранного выражения y^* берем все нужные для исходного уравнения производные и подставляем в исходное неоднородное уравнение.
- Затем составляем систему уравнений для определения неизвестных коэффициентов. Система получается путем приравнивания коэффициентов при одинаковых функциях слева и справа от знака равно.
- Решая систему, определяем неизвестные коэффициенты и подставляем их в выражение для y^*.
- Наконец, записываем общее решение.

Пример 21. Решить дифференциальное уравнение $y''+y'-6y=x+1$.

Решение. Общее решение ищется по формуле $y=\bar{y}+y^*$.

Для однородного уравнения имеем $\lambda^2+\lambda-6=0;\ \lambda_1=-3;\ \lambda_2=2;\ \bar{y}=c_1e^{-3x}+c_2e^{2x}$.

Частное решение исходного неоднородного уравнения ищем в виде $y^*=Ax+B;\ \lambda_i\neq 0$. Тогда

$$y^{*\prime}=A;\ y^{*\prime\prime}=0;\ A-6Ax-6B=x+1;$$

$$\left.\begin{aligned}x^0&: A-6B=1\\ x^1&: -6A=1\end{aligned}\right\}\Rightarrow \begin{aligned}-\frac{1}{6}-6B=1,\ 6B=-\frac{7}{6},\ B=-\frac{7}{36}\\ A=-\frac{1}{6}\end{aligned}$$

Следовательно, $y^*=-\frac{1}{6}x-\frac{7}{36}$.

Общее решение: $y=\bar{y}+y^*=c_1e^{-3x}+c_2e^{2x}-\frac{1}{6}x-\frac{7}{36}$.

Пример 22. Найти общее решение дифференциальное уравнения $y''-y'=x^2+1$.

Решение. Для однородного уравнения имеем $\lambda^2-\lambda=0;\ \lambda(\lambda-1)=0;\ \lambda_1=0;\ \lambda_2=1$.

Общее решение однородного уравнения: $\bar{y}=c_1+c_2e^x$.

$y^* = \left(Ax^2 + Bx + C\right) \cdot x = Ax^3 + Bx^2 + Cx$, так как есть $\lambda_1 = 0$.

$y^{*\prime} = 3Ax^2 + 2Bx + C$; $y^{*\prime\prime} = 6Ax + 2B$. Следовательно,

$$6Ax + 2B - 3Ax^2 - 2Bx - C = x^2 + 1$$

$$\left.\begin{array}{l} x^0 : 2B - C = 1 \\ x^1 : 6 - 2B = 0 \\ x^2 : -3A = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} C = -3 \\ B = -1 \\ A = -\dfrac{1}{3} \end{array}$$

Тогда $y^* = -\dfrac{1}{3}x^3 - x - 3$.

Общее решение: $y = \overline{y} + y^* = c_1 + c_2 e^x - \dfrac{1}{3}x^3 - x - 3$.

Пример 23. Найти общее решение дифференциальное уравнения $2y'' - 3y' + y = xe^{4x}$.

Решение. Для однородного уравнения имеем $2\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0; \lambda_1 = 1; \lambda_2 = \dfrac{1}{2}$.

$\overline{y} = c_1 e^x + c_2 e^{\frac{1}{2}x}$; $y^* = \left(Ax + B\right) \cdot e^{4x}$.

У нас $\lambda_i \neq 4$. $y^{*\prime} = Ae^{4x} + \left(Ax + B\right) \cdot 4e^{4x} = e^{4x}\left(A + 4A + 4B\right)$;

$y^{*\prime\prime} = Ae^{4x}\left(A + 4Ax + 4B\right) + e^{4x} \cdot 4A = e^{4x}\left(4A + 16Ax + 16B + 4A\right)$.

Подставляем в исходное неоднородное уравнение:

$e^{4x}\left(8A + 32Ax + 32B + 4A\right) - e^{4x}\left(3A + 12Ax + 12B\right) + e^{4x}\left(Ax + B\right) = xe^{4x}$;

$8A + 32Ax + 32B + 4A - 3A - 12Ax - 12B + Ax + B = x$;

$$\left.\begin{array}{l} x^0 : 8A + 32B + 4A - 3A - 12B + B = 0 \\ x^1 : 32A - 12A + A = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} 9A + 21B = 0 \\ 21A = 1 \end{cases} \Rightarrow A = \frac{1}{21},\ B = -\frac{9}{441}$$

Тогда $y^* = \left(\dfrac{1}{21}x - \dfrac{9}{441}\right)e^{4x}$.

Общее решение: $y = \overline{y} + y^* = c_1 e^x + c_2 e^{\frac{1}{2}x} + \left(\dfrac{1}{21}x - \dfrac{9}{441}\right)e^{4x}$.

Пример 24. Найти общее решение дифференциальное уравнения $y'' - y = 8e^x$.

Решение. Имеем $\lambda^2 - 1 = 0; \lambda_{1,2} = \pm 1$; $\overline{y} = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$; $y^* = A \cdot e^x \cdot x$, так как есть $\lambda_1 = 1 = \alpha$. $y^{*\prime} = Ae^x + Ax \cdot e^x = e^x\left(A + Ax\right)$; $y^{*\prime\prime} = e^x\left(A + Ax\right) + e^x \cdot A = e^x\left(2A + Ax\right)$;

$e^x\left(2A + Ax\right) - Axe^x = 8e^x; 2A + Ax - Ax = 8; 2A = 8; A = 4 \Rightarrow y^* = 4x \cdot e^x$.

Общее решение: $y = \overline{y} + y^* = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + 4xe^x$.

Пример 25. $y'' + y = 4x\sin x$.

Решение. Характеристическое уравнение: $\lambda^2 + 1 = 0$, $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$. Следовательно, $Y^*(x) = x\left[(Ax+B)\cos x + (Cx+D)\sin x\right] = (Ax^2 + Bx)\cos x + (Cx^2 + Dx)\sin x$. Отсюда

$$
\begin{aligned}
&y^{*\prime} = (2Ax+B)\cos x + \left(Ax^2 + Bx\right)(-\sin x) + (2Cx+D)\sin x + \left(Cx^2 + DX\right)\cos x = \\
&= \cos x\left(2Ax + B + Cx^2 + Dx\right) + \sin x\left(2Cx + D - Ax^2 - Bx\right) \\
&y^{*\prime\prime} = -\sin x\left(2Ax + B + Cx^2 + Dx\right) + \cos x(2A + 2Cx + D) + \\
&+ \cos x\left(2Cx + D - Ax^2 - Bx\right) + \sin x(2C - 2Ax - B) = \\
&= \cos x\left(2A + 2Cx + D + 2Cx + D - Ax^2 - Bx\right) + \sin x\left(2C - 2Ax - B - 2Ax - B - Cx^2 - Dx\right) = \\
&\cos x\left(2A + 4Cx + 2D - Ax^2 - Bx\right) + \sin x\left(2C - 4Ax - 2B - Cx^2 - Dx\right).
\end{aligned}
$$

Подставляем найденные выражения для $y^{*\prime\prime}$ и y^* в исходное уравнение:

$$
\begin{aligned}
&\cos x\left(2A + 4Cx + 2D - Ax^2 - Bx\right) + \sin x\left(2C - 4Ax - 2B - Cx^2 - Dx\right) + \\
&+ \cos x\left(Ax^2 + Bx\right) + \sin x\left(Cx^2 + Dx\right) = 4x\sin x
\end{aligned}
$$

или:

$$
\cos x\left(2A + 2D + 4Cx - Ax^2 - Bx + Ax^2 + Bx\right) + \sin x\left(2C - 4Ax - 2B - Cx^2 - Dx + Cx^2 + Dx\right) = 4x\sin x
$$

Имеем:

$$
\cos x(2A + 2D) + x\cdot\cos x(4C) + \sin x(2C - B) + x\sin x(-4A) = 4x\sin x.
$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых функциях:

$$
\left.\begin{aligned}
&\cos x : 2A + 2D = 0 \\
&x\cos x : 4C = 0 \\
&\sin x : 2C - 2B = 0 \\
&x\sin x = -4A = 4
\end{aligned}\right\} \Rightarrow
\begin{aligned}
D &= 1 \\
C &= 0 \\
B &= 0 \\
A &= -1
\end{aligned}
$$

Следовательно, $y^* = -x^2\cos x + x\sin x$.

Общее решение исходного уравнения:

$$
y = \bar{y} + y^* = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - x^2\cos x + x\sin x.
$$

Принцип суперпозиции частных решений

Если при решении линейных неоднородных диференциальных уравнений 2-го порядка с постоянными коэффициентами правая часть представляет собой сумму (разность) различных функций, то имеет место следующая теорема.

Теорема. *Частное решение уравнений с постоянными коэффициентами вида*

$y'' + p\,y' + q\,y = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)$ *ищется в виде суммы частных решений*

$y^* = \sum_{i=1}^{n} y_i^* = y_1^* + y_2^* + ... + y_n^*$, *которые являются частными решениями уравнений*

$y'' + py' + q\,y = f_i(x) \quad (i = \overline{1, n})$.

Пример 26. Решить дифференциальное уравнение 2-го порядка $y'' - y = 2\sin x + x - 3$.

Решение. Согласно изложенной методике найдем решение однородного уравнения.

Характеристическое уравнение имеет вид $k^2 - 1 = 0$. Корни уравнения в этом случае вещественные и равны $k_{1,2} = \pm 1$, следовательно, два частных линейно-независимых решения однородного уравнения имеют вид $y_1 = e^{-x}$ и $y_2 = e^x$. Тогда общее решение с постоянными коэффициентами в данном случае будет иметь вид: $\bar{y} = C_1\, e^{-x} + C_2\, e^x$.

Проанализируем правую часть данного уравнения, которая состоит из суммы двух функций, первая из которых равна $f_1(x) = 2\sin x$, а вторая $f_2(x) = x - 3$. Согласно принципу суперпозиции частных решений частное решение данного уравнения будем искать в виде $y^* = y_1^* + y_2^*$, причем первое частное решение удовлетворяет уравнению с правой частью, равной $2\sin x$, а второе частное решение – уравнению с правой частью $x - 3$. Для $f_1(x) = 2\sin x$ имеем:

$y_1^* = A\cos x + B\sin x$.

Найдем первую и вторую производные этой функции и подставим найденные функции в исходное уравнение:

$-A\cos x - B\sin x - A\cos x - B\sin x = 2\sin x$ или $-2\,A\cos x - 2\,B\sin x = 2\sin x$.

Сравнивая коэффициенты при одинаковых функциях, находим $\begin{cases} \sin x\ : -2\,A = 10 \\ \cos x :\ 2B = 0 \end{cases}$.

Решаем эту систему и определяем неизвестные коэффициенты: $A = 0$, а коэффициент $B = -1$. Таким образом, частное решение рассматриваемого первого неоднородного дифференцального уравнения имеет вид: $y_1^* = -\sin x$. Решаем второе уравнение для $f_2(x) = x - 3$. В этом случае $y_2^* = A\,x + B;\ y_2^{*\prime} = A;\ y_2^{*\prime\prime} = 0$. После подстановки в рассматриваемое уравнение получаем: $-A\,x - B = x - 3$.

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях аргумента находим

$\begin{cases} x :\ -A = 1 \\ x^0 :\ -B = -3 \end{cases}$. Решаем эту систему и определяем неизвестные коэффициенты: $A = -1$, а коэффициент $B = 3$. Таким образом, частное решение второго неоднородного дифференциального уравнения имеет вид: $y_2^* = -x+3$. Общее решение исходного неоднородного дифференциального уравнения определяется суммой всех найденных функций

$$y = \bar{y} + y_1^* + y_2^* = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x} - \sin x - x + 3 .$$

6.12 Метод вариации произвольных постоянных

Метод вариации произвольных постоянных применим для функции $f(x)$ любого вида.

Рассмотрим уравнение (6.39): $y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x)$, где $f(x)$– любая функция (непрерывная).

Пусть нам известно общее решение однородного уравнения

$$\begin{aligned} &y'' + a_1 y' + a_2 y = 0, \\ &\bar{y} = c_1 y_1 + c_2 y_2, \end{aligned} \qquad (6.42)$$

где c_1, c_2 – произвольные постоянные, а y_1 и y_2 – частные решения уравнения.

Будем искать частное решение уравнения (6.39) в виде

$$Y(x) = c_1(x) y_1 + c_2(x) y_2 , \qquad (6.43)$$

т.е. в таком же виде, как общее решение (6.42), но только вместо произвольных постоянных подставим пока неизвестные функции. Найдем их. Поскольку $Y(x)$ должно быть решением уравнения (6.39), то функции c_1 и c_2 связаны только одной зависимостью. Для того чтобы их найти, этого недостаточно. Поэтому мы вправе наложить на них еще одно условие.

Найдем производную $Y'(x)$.

$$Y'(x) = c_1 y_1' + c_2 y_2' + c_1' y_1 + c_2' y_2 \qquad (6.44)$$

Потребуем, чтобы $Y'(x)$ имела бы такой же вид, как если бы c_1 и c_2 были бы постоянными. Отсюда следует:

$$c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0 . \qquad (6.45)$$

Тогда $Y'(x) = c_1 y_1' + c_2 y' .$ (6.46)

Найдем $Y''(x)$.

$$Y''(x) = c_1 y_1'' + c_2 y_2'' + c_1' y_1' + c_2' y_2' . \qquad (6.47)$$

Подставляя Y, Y' и Y'', определенные формулами (6.45), (6.46) и (6.47), в уравнение (6.39), получим:

$$c_1 y_1'' + c_2 y_2'' + c_1' y_1' + c_2' y_2' + a_1 (c_1 y_1' + c_2 y_2') + a_2 (c_1 y_1 + c_2 y_2) = f(x)$$

или $c_1 \left(\underbrace{y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1}_{=0} \right) + c_2 \left(\underbrace{y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2}_{=0} \right) + c_1' y_1' + c_2' y_2' = f(x) .$

Но y_1 и y_2 суть решения однородного уравнения, поэтому имеем

$$c_1'y_1' + c_2'y_2' = f(x). \tag{6.48}$$

Таким образом, c_1' и c_2' определяются из (6.45) и (6.47), т.е. из системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} c_1'y_1 + c_2'y_2 &= 0 \\ c_1'y_1' + c_2'y_2' &= f(x) \end{aligned}\right\}. \tag{6.49}$$

Эта неоднородная система линейных алгебраических уравнений относительно c_1' и c_2' с определителем $\Delta = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$.

Это определитель Вронского, по доказанному ранее $\Delta \neq 0$, поэтому система (6.49) имеет единственное решение. Определяем c_1' и c_2' из (6.49) и, интегрируя их, найдем $c_1(x)$ и $c_2(x)$, а затем и $y(x)$.

Замечание. Если при интегрировании c_1' и c_2' ввести произвольные постоянные, то сразу получим общий интеграл неоднородного уравнения (6.39).

Пример 27. $y'' + y = \operatorname{tg} x$.

Решение. Соответствующее однородное уравнение – $y'' + y = 0$.

Характеристическое уравнение: $\lambda^2 + 1 = 0,\ \lambda_1 = i,\ \lambda_2 = -i$.

Общее решение однородного уравнения

$y^* = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ $\qquad\qquad$ $y_1 = \cos x,\ y_2 = \sin x$.

Частное решение заданного уравнения ищем в виде

$Y = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2 = c_1(x)\cos x + c_2(x)\sin x$,

где $c_1'(x)$ и $c_2'(x)$ определяются из системы:

$$\left.\begin{aligned} c_1'(x)\cos x + c_2'(x)\sin x &= 0 \\ -c_1'(x)\sin x + c_2'(x)\cos x &= \operatorname{tg} x \end{aligned}\right\}.$$

Отсюда $c_1'(x) = -\dfrac{\sin^2 x}{\cos x},\ c_2'(x) = \sin x$; $c_1(x) = -\displaystyle\int \frac{\sin^2 x}{\cos x}dx = \sin x - \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) + c_1$;

$c_2(x) = \int \sin x\, dx = -\cos x + c_2$.

Общее решение будет $y = \left\{\sin x - \ln \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x}{2}\right) + c_1\right\}\cos x + (-\cos x + c_2)\sin x$ или

$$y = \underbrace{c_1 \cos x + c_2 \sin x}_{\bar{y}} - \underbrace{\cos x \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)}_{Y(x)}.$$

6.13 Системы дифференциальных уравнений

Определение. *Нормальной системой дифференциальных уравнений* называется система вида:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{cases} \tag{6.50}$$

Для неё можно сформулировать теорему о существовании и единственности решения.

Теорема. *Если функции* $f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n),\ i = \overline{1, n}$ *определены и непрерывны на некотором открытом множестве и имеют непрерывные частные производные* $\dfrac{df_i}{dy_j}$ $\quad i, j = \overline{1, n}$*, то система* (6.50) *имеет решение*

$$\begin{cases} y_1 = \varphi_1(x) \\ y_2 = \varphi_2(x) \\ \ldots\ldots\ldots \\ y_n = \varphi_n(x) \end{cases}, \quad i = \overline{1, n}. \tag{6.51}$$

При наличии начальных условий

$$y_i(x_0) = y_0, \quad i = \overline{1, n}, \tag{6.52}$$

где x_0, y_0 *– заданные числа, это решение будет единственным.*

Одним из основных методов решения нормальной системы дифференциальных уравнений является метод сведения системы к одному дифференциальному уравнению высшего порядка.

Пусть задана нормальная система (6.50). Продифференцируем по x любое уравнение, например, первое:

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \cdot \frac{dy_1}{dx} + \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \cdot \frac{dy_2}{dx} + \ldots$$

Подставив в это равенство значениея производных $\dfrac{dy_1}{dx}, \dfrac{dy_2}{dx}, \ldots$ из системы (6.50), получим $\dfrac{d^2 y_1}{dx^2} = \dfrac{\partial f_1}{\partial x} + \dfrac{\partial f_1}{\partial y_1} \cdot f_1 + \dfrac{\partial f_1}{\partial y_2} \cdot f_2 + \ldots$ или $\dfrac{d^2 y_1}{dx^2} = F_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

Полученное равенство снова продифференцируем по x и снова, заменив производные $\frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx}, \ldots$, получим $\frac{d^3 y_1}{dx^3} = F_3(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

Продолжая этот процесс, находим $\frac{d^m y_1}{dx^n} = F_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$, то есть получаем систему

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ \frac{d^2 y_1}{dx^2} = F_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{d^n y_1}{dx^n} = F_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{cases} \quad (6.53)$$

Из первых (n – 1) уравнений системы (6.53) выразим функции $y_2, y_3, \ldots, y_n$ через $x, y_1, y_1', y_1'', \ldots, y_1^{(n-1)}$:

$$\begin{cases} y_2 = \varphi_2(x, y_1, y_1', y_1'', \ldots, y_1^{(n-1)}) \\ y_3 = \varphi_3(x, y_1, y_1', y_1'', \ldots, y_1^{(n-1)}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = \varphi_n(x, y_1, y_1', y_1'', \ldots, y_1^{(n-1)}) \end{cases} \quad (6.54)$$

Найденные значения $y_2, y_3, \ldots, y_n$ подставим в последнее уравнение системы (6.53). Получим одно дифференциальному уравнение n-го порядка:

$$\frac{d^n y_1}{dx} = \Phi\left(x, y_1, y_1', y_1'', \ldots, y_1^{(n-1)}\right).$$

Пусть его общее решение $y_1 = \Psi\left(x, C_1, C_2, \ldots, C_n\right)$.

Продифференцировав его (n – 1) раз и подставив значения производных в уравнения (6.53), найдем функции $y_2, y_3, \ldots, y_n$.

Пример 28. Решить систему уравнений $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 2y - z \\ \frac{dz}{dx} = 4y + 2z \end{cases}$.

Решение. Продифференцируем первое уравнение $y'' = 2y' - z'$. Заменим z' его выражением из второго уравнения $y'' = 2y' - 4y - 2z$. Из первого уравнения $z = 2y - y'$. Подставим в последнее уравнение: $y'' = 2y' - 4y + 2y'$ или $y'' - 4y' - 8y = 0$.

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - 4\lambda - 8 = 0; \quad D = 16 + 32 = 48; \quad \lambda_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{48}}{2} = 2 \pm 2\sqrt{3}.$$

Тогда $y = C_1 e^{(2+2\sqrt{3})x} + C_2 e^{(2-2\sqrt{3})x}; \quad y' = C_1 e^{(2+2\sqrt{3})x} \cdot (2 + 2\sqrt{3}) + C_2 e^{(2-2\sqrt{3})x} \cdot (2 - 2\sqrt{3}).$

Имеем:

$$y = C_1 e^{(2+2\sqrt{3})x} + C_2 e^{(2-2\sqrt{3})x}; \quad y' = C_1 e^{(2+2\sqrt{3})x} \cdot (2 + 2\sqrt{3}) + C_2 e^{(2-2\sqrt{3})x} \cdot (2 - 2\sqrt{3})$$

$$z = 2y - y' = 2C_1 e^{(2+2\sqrt{3})x} + C_2 e^{(2-2\sqrt{3})x} - C_1 e^{(2+2\sqrt{3})x} \cdot (2 + 2\sqrt{3}) + C_2 e^{(2-2\sqrt{3})x} \cdot (2 - 2\sqrt{3}) =$$

$$= -C_1 e^{(2+2\sqrt{3})x} \cdot 2\sqrt{3} - C_2 e^{(2-2\sqrt{3})x} \cdot 2\sqrt{3}.$$

Таким образом, общее решение системы:

$$\begin{cases} y = C_1 e^{(2+2\sqrt{3})x} + C_2 e^{(2-2\sqrt{3})x} \\ z = -C_1 e^{(2+2\sqrt{3})x} \cdot 2\sqrt{3} - C_2 e^{(2-2\sqrt{3})x} \cdot 2\sqrt{3}. \end{cases}$$

6.14 Системы линейных дифференциальных уравнений

Определение. Система дифференциальных уравнений называется *линейной*, если она линейна относительно всех неизвестных функций и их производных.

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n + f_1(x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n + f_n(x) \end{cases} \tag{6.55}$$

Одним из методов решения такой системы является метод Эйлера.

Метод Эйлера

Рассмотрим систему вида:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = a_{11}y + a_{12}z \\ \dfrac{dz}{dx} = a_{21}y + a_{22}z \end{cases} \tag{6.56}$$

где $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ – постоянные. Система (6.56) имеет фундаментальную систему решений, состоящую из элементарных функций. Основным методом построения фундаментальной системы решений (6.56) является метод Эйлера. Согласно этому методу, решение ищется в виде $y(x) = \alpha_1 e^{\lambda x}, z(x) = \alpha_2 e^{\lambda x}$. Дифференцируем обе функции по x и подставляем в (6.56):

$$\begin{cases} \lambda\alpha_1 e^{\lambda x} = a_{11}\alpha_1 e^{\lambda x} + a_{12}\alpha_2 e^{\lambda x} \\ \lambda\alpha_2 e^{\lambda x} = a_{21}\alpha_1 e^{\lambda x} + a_{22}\alpha_2 e^{\lambda x} \end{cases}$$

Сокращаем оба уравнения системы на $e^{\lambda x} \neq 0$:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 = 0 \\ a_{21}\alpha_1 + (a_{22} - \lambda)\alpha_2 = 0 \end{cases} \tag{6.57}$$

Так как $\alpha_1, \alpha_2, \lambda$ – некоторые постоянные числа, подлежащие определению, среди которых хотя бы одно отлично от нуля, то определитель системы (6.57) должен быть равен нулю

$$\begin{vmatrix} (a_{11} - \lambda) & a_{12} \\ a_{21} & (a_{22} - \lambda) \end{vmatrix} = 0. \tag{6.58}$$

Уравнение (6.58) называется характеристическим уравнением, а его корни – характеристическими числами системы (6.56). Каждому из корней характеристического уравнения соответствует хотя бы одно частное решение указанного выше вида. Различают три случая.

1) Оба корня характеристического уравнения вещественны и различны: $\lambda_1, \lambda_2 \in R, \lambda_1 \neq \lambda_2$. Подставляем λ_1 в одно из уравнений системы (6.57), например, в первое уравнение: $(a_{11} - \lambda)\alpha_1^1 + a_{12}\alpha_2^1 = 0$. Из него с точностью до константы определяем α_1^1, α_2^1, откуда получаем первое решение ЛОС ДУ: $y_1(x) = \alpha_1^1 e^{\lambda_1 x}, z_1(x) = \alpha_2^1 e^{\lambda_1 x}$. То же самое проделываем со вторым корнем характеристического уравнения λ_2 и в результате получаем второе, линейно независимое на $\mathbb{R}$, решение: $y_2(x) = \alpha_1^2 e^{\lambda_2 x}, z_2(x) = \alpha_2^2 e^{\lambda_2 x}$. Следовательно, общим решением системы (6.56) будет следующее семейство функций:

$$y(x) = c_1\alpha_1^1 e^{\lambda_1 x} + c_2\alpha_1^2 e^{\lambda_2 x}$$

$$z(x) = c_1\alpha_2^1 e^{\lambda_1 x} + c_2\alpha_2^2 e^{\lambda_2 x}.$$

2) Если $\lambda_1 = a + ib$ – корень характеристического уравнения, то $\lambda_2 = a - ib$. Подставляем λ_1 в одно из двух уравнений системы (6.57) и с точностью до постоянной получаем α_1^1, α_2^1. Теперь можно составить первое решение системы (6.56):

$$y_1(x) = \alpha_1^1 e^{\lambda_1 x} = \alpha_1^1 e^{(a+ib)x} = \alpha_1^1 e^{ax} \cdot e^{ibx} = \alpha_1^1 e^{ax}(\cos bx + i\sin bx) = \widetilde{y}_1(x) + i \cdot \widetilde{y}_2(x)$$

$$z_1(x) = \alpha_2^1 e^{ax}(\cos bx + i\sin bx) = \widetilde{z}_1(x) + i \cdot \widetilde{z}_2(x).$$

Отделив вещественную и мнимую части, получим два вещественных линейно независимых частных решения системы (6.56), соответствующих корню *a+ib*. Решения, соответствующие корню *a–ib*, будут линейно зависимы с решениями, соответствующими крню *a+ib.*

Итак, общее решение в этом случае имеет вид:

$y(x) = c_1 \cdot \widetilde{y}_1(x) + c_2 \cdot \widetilde{y}_2(x)$

$z(x) = c_1 \cdot \widetilde{z}_1(x) + c_2 \cdot \widetilde{z}_2(x)$.

3) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$.

В случае кратного корня характеристического уравнения предлагается представить общее решение системы уравнений (6.56) в следующем виде:

$y(x) = e^{\lambda x}(c_1 + c_2 x), z(x) = e^{\lambda x}(a_1 + a_2 x)$, где c_1, c_2, a_1, a_2 – постоянные числа, причем a_1 и a_2 должны быть выражены через c_1 и c_2 . Рассмотрим поясняющий пример.

Пример 29. Найти общее решение системы:

$$\begin{cases} y' = y - z \\ z' = y + 3z \end{cases}$$

Решение. $y(x) = \alpha_1 e^{\lambda x}, z(x) = \alpha_2 e^{\lambda x}$. Характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 .$$

Его корни: $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$. Следовательно $y(x) = e^{2x}(c_1 + c_2 x), z(x) = e^{2x}(a_1 + a_2 x)$.

Продифференцируем *y(x)* и подставим y, z, y' в первое уравнение исходной системы:

$2e^{2x}(c_1 + c_2 x) + c_2 e^{2x} = e^{2x}(c_1 + c_2 x) - e^{2x}(a_1 + a_2 x)$.

Откуда после сокращения на e^{2x} получаем $c_1 + c_2 x + c_2 = -(a_1 + a_2 x)$.

Приравняем в этом тождестве множители при одинаковых степенях *x*. В результате получим: $a_1 = -(c_1 + c_2), a_2 = -c_2$. Итак, общее решение заданной системы уравнений имеет вид:

$$y(x) = e^{2x}(c_1 + c_2 x)$$
$$z(x) = -e^{2x}((c_1 + c_2) + c_2 x),$$

где c_1 и c_2 – произвольные постоянные.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Занятие 1.

Область определения и область значений функции нескольких переменных. Частные производные

Аудиторные задания

1.1 Найти область определения и область значений функций и изобразить их графически:

1) $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$; **2)** $z=\ln\left(y-x^2+2x\right)$.

1.2 Найти область определения функций и изобразить их графически:

1) $z=\arcsin\left(3-x^2-y^2\right)$; **2)** $z=\sqrt{x^2-4}+\sqrt{4-y^2}$;

3) $u=\sqrt{1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}}$; **4)** $z=x+\arccos y$.

1.3 Найти пределы функций:

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\frac{\sin\left(x^2y\right)}{xy^2}$; **2)** $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}}\frac{\sin(x+y-2)}{(x+y)^2-4}$; **3)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$; **4)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2}$.

1.4 Исследовать функции на непрерывность:

1) $z=\frac{xy+1}{x^2-y}$; **2)** $z=\frac{x^2+y^2+2}{x^2+y^2}$; **3)** $z=\frac{1}{x^2+y^2-4}$; **4)** $z=e^{1/(x-y)}$.

1.5 Найти частные производные функций:

1) $z=x^2y^3+x^2+y+10$; **2)** $z=\frac{x}{y^2}+\frac{y}{x^2}+\frac{1}{3xy}$; **3)** $z=(x+3y)\sin\sqrt{xy}$;

4) $z=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$; **5)** $z=x^y$; **6)** $z=x^{\cos y}$.

Домашние задания

1.6 Найти область определения функций и изобразить ее графически:

1) $z=\ln\left(x^2+y^2-4\right)$; **2)** $z=\arccos\frac{x}{3}+\arcsin\frac{x}{3}$.

1.7 Найти пределы функций:

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to -1}}\frac{\operatorname{tg}(x+y)e^{x-y}}{x^2-y^2}$; **2)** $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\frac{\sin y\left(x^2+2x-4\right)}{\left(x^2+2\right)y}$.

1.8 Исследовать функции на непрерывность:

1) $z=\dfrac{x^2+y^2+1}{(x-y)^3}$; **2)** $z=\dfrac{1}{y-x^2}$.

1.9 Найти частные производные функций:

1) $z=x\sqrt{y}+\dfrac{y}{\sqrt[3]{x}}$; **2)** $z=\left(5x^2y-y^3+7\right)^3$; **3)** $z=\dfrac{y^2}{x}+\operatorname{tg}^2 y$; **4)** $z=x\cdot e^{x^2/y}$.

Ответы: 1.3 1) 0; **2)** 1/4; **3)** 2; **4)** 1. **1.5 1)** $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2xy^3+2x, \dfrac{\partial z}{\partial y}=3x^2y^2+1$;

2) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{y^2}-\dfrac{2y}{x^3}-\dfrac{1}{3yx^2}, \dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{2x}{y^3}+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{3xy^2}$; **3)** $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\sin\sqrt{xy}+(x+3y)\cdot\cos\sqrt{xy}\cdot\dfrac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}$,

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=3\sin\sqrt{xy}+(x+3y)\cdot\cos\sqrt{xy}\cdot\dfrac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}}$; **4)** $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{y}{x^2+y^2}, \dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{x}{x^2+y^2}$;

5) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=y\cdot x^{y-1}, \dfrac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln x$; **6)** $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\cos y\cdot x^{\cos y-1}, \dfrac{\partial z}{\partial y}=-x^{\cos y}\ln|x|\cdot\sin y$.

1.7 1) $\dfrac{e^2}{2}$; **2)** $-\dfrac{1}{3}$. **1.9 1)** $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\sqrt{y}-\dfrac{y}{3\sqrt[3]{x^4}}, \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{x}{2\sqrt{y}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$;

2) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=30xy\left(5x^2y-y^3+7\right)^2, \dfrac{\partial z}{\partial y}=3\left(5x^2y-y^3+7\right)^2\left(5x^2-3y^2\right)$;

3) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{y^2}{x^2}, \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{2y}{x}+2\operatorname{tg} y\cdot\dfrac{1}{\cos^2 y}$; **4)** $\dfrac{\partial z}{\partial x}=e^{\frac{x^2}{y}}+\dfrac{2x^2\cdot e^{\frac{x^2}{y}}}{y}, \dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{x^3\cdot e^{\frac{x^2}{y}}}{y^2}$.

Занятие 2.

Полный дифференциал функции нескольких переменных и его применение. Частные производные и дифференциалы высших порядков

Аудиторные задания

2.1 Найти полный дифференциал функций:

1) $z=\dfrac{x-y}{x+y}$; **2)** $z=\left(x^2+y^2\right)e^{xy}$; **3)** $u=(xy)^z$; **4)** $u=\dfrac{x}{\sqrt{y^2+z^2}}$.

2.2 Вычислить приближенно:

1) $1{,}08^{3{,}96}$; **2)** $\sqrt{(4{,}05)^2+(2{,}93)^2}$; **3)** $\operatorname{arctg}\dfrac{0{,}02}{0{,}95}$; **4)** $\sqrt{5\cdot e^{0{,}02}+2{,}03^2}$.

2.3 Найти частные производные второго порядка функций:

1) $z = e^{x-2y}$; **2)** $z = \dfrac{1}{xy}$**; 3)** $z = \sin(xy)$; **4)** $z = \ln\left(x^2 + y^2\right)$**.**

2.4 Найти полный дифференциал второго порядка функций:

1) $z = \dfrac{x}{y}$; **2)** $z = \dfrac{1}{(x-y)^2}$**; 3)** $z = \ln\sqrt{x^2 + y}$; **4)** $z = \sin(x + \cos y)$**.**

Домашние задания

2.5 Найти полный дифференциал функций:

1) $z = \sqrt{x^2 - y^2}$; **2)** $z = e^{x\sin y}$**; 3)** $z = \operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{x}{y}}$ **.**

2.6 Вычислить приближенно:

1) $0{,}98^{2{,}01}$; **2)** $\ln\left(0{,}9^3 + 0{,}09^3\right)$**; 3)** $\sqrt{(4{,}04)^2 + (3{,}01)^2}$ **.**

2.7 Найти частные производные второго порядка:

1) $z = y \cdot \ln x$; **2)** $z = \dfrac{xy}{x-y}$**; 3)** $z = e^{xy}$**.**

2.8 Найти полные дифференциалы второго порядка:

1) $z = 3x^2y - 2xy + y^2 - 1$; **2)** $z = \dfrac{x}{y^2}$**; 3)** $z = e^{x^2 - y^3}$ **.**

Ответы: 2.1 1) $dz = \dfrac{2y}{(x+y)^2}dx - \dfrac{2x}{(x+y)^2}dy$; **2)** $dz = e^{xy}\left[\left(2x + x^2y + y^3\right)dx + \left(2y + x^3 + xy^2\right)dy\right]$;

3) $dz = (xy)^{z-1}\left(zydx + zxdy + xy\ln|xy|dz\right)$; **4)** $du = \dfrac{dx}{\sqrt{y^2+z^2}} - \dfrac{xydy + xzdz}{\sqrt{\left(y^2+z^2\right)^3}}$; **2.2 1)** 1,32; **2)** 4,998**;**

3) 0,02; **4)** 3,037; **2.3 1)** $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^{x-2y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4e^{x-2y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -2e^{x-2y}$;

2) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{2}{x^3y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{2}{y^3x}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \dfrac{1}{x^2y^2}$**; 3)** $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -y^2\sin(xy), \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -x^2\sin(xy),$

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \cos(xy) - xy\sin(xy)$;

4) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2\dfrac{y^2 - x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2\dfrac{x^2 - y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \dfrac{-4xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$;

2.4 1) $d^2z=-\frac{2}{y^2}dxdy+\frac{2x}{y^3}dy^2$; **2)** $d^2z=\frac{6}{(x-y)^4}\left(dx^2-2dxdy+dy^2\right)$;

3) $d^2z=\frac{\left(2y-2x^2\right)dx^2-4xdxdy-dy^2}{2\left(x^2+y\right)^2}$; **4)** $d^2z=-\sin(x+\cos y)d^2x+2\sin(x+\cos y)\cdot\sin ydxdy-$

$-\left(\sin^2 y\sin(x+\cos y)+\cos y\cos(x+\cos y)\right)dy^2$; **2.5 1)** $dz=\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}dx-\frac{y}{\sqrt{x^2-y^2}}dy$;

2) $dz=e^{x\sin y}\cdot\sin ydx+e^{x\sin y}x\cos ydy$; **3)** $dz=\frac{\sqrt{\frac{y}{x}}}{2(x+y)}dx-\frac{\sqrt{\frac{x}{y}}}{2(x+y)}dy$;

2.6 1) 0,96; **2)** – 0,3**; 3)** 5,038; **2.7 1)** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{y}{x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{1}{x}$;

2) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2y^2}{(x-y)^3},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{2x^2}{(x-y)^3},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=-\frac{2xy}{(x-y)^3}$ **;**

3) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y^2e^{xy},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^2e^{xy},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=e^{xy}(1+xy)$;

2.8 1) $d^2z=6ydx^2+2(6x-2)dxdy+2dy^2$; **2)** $d^2z=-\frac{4}{y^3}dxdy+\frac{6x}{y^4}dy^2$;

3) $d^2z=e^{x^2-y^3}\left(\left(4x^2+2\right)dx^2-12xy^2dxdy+\left(9y^4-6y\right)dy^2\right)$.

Занятие 3.

Производные сложных функций нескольких переменных. Производная функции, заданной неявно

Аудиторные задания

3.1 Найти указанные производные для функций:

1) $z=x^2+y^2+xy$, если $x=a\sin t,\ y=a\cos t,\ \frac{dz}{dt}-?$

2) $z=x^2\ln y$, если $x=\sqrt{t^2+1},\ y=\arcsin t,\ \frac{dz}{dt}-?$

3) $z=x^2+\sqrt{y}$, если $y=\sin x,\ \frac{\partial z}{\partial x}-?\ \frac{dz}{dx}-?$

4) $z=3^x\operatorname{arctg}\frac{1}{y}$**;** если $y=e^{-x},\ \frac{dz}{dx}-?\ \frac{\partial z}{\partial x}-?$

5) $z=\ln\left(u^2+v^2\right)$, если $u=x\cos y,\ v=y\sin x,\ \dfrac{\partial z}{\partial x}-?\ \dfrac{\partial z}{\partial y}-?$

6) $z=\sqrt{u^2-v^2}$, если $u=x^y,\ v=x\ln y,\ \dfrac{\partial z}{\partial x}-?\ \dfrac{\partial z}{\partial y}-?$

7) $z=\cos xy$, если $x=u\cdot e^v,\ y=\dfrac{u}{v},\ \dfrac{\partial z}{\partial u}-?\ \dfrac{\partial z}{\partial v}-?$ **.**

3.2 Найти частные производные от неявно заданных функций:

1) $x^2y-xy^2-xyz+6-xyz^3=0$; **2)** $\dfrac{xy}{z}+\dfrac{z}{x}=1$ **;**

3) $\dfrac{x}{z}=\ln\dfrac{z}{y}+1$; **4)** $x+\operatorname{arctg}\dfrac{y}{z}=z$ **; 5)** $z^{xy}+\cos z=0$.

Домашние задания

3.3 Найти указанные производные для функций:

1) $z=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$, если $x=e^{2t+1},\ y=e^{2t-1},\ \dfrac{dz}{dt}-?$

2) $z=x\sin(x+y)$, если $x=\dfrac{1}{t^3},\ y=(t-1)^2,\ \dfrac{dz}{dt}-?$

3) $z=u^2\ln v$, если $u=\dfrac{y}{x},\ v=x^2+y^2,\ \dfrac{\partial z}{\partial x}-?\ \dfrac{\partial z}{\partial y}-?$

4) $z=\arcsin\dfrac{x}{y}$, если $x=u^2+v^2,\ y=u\cdot v,\ \dfrac{\partial z}{\partial u}-?\ \dfrac{\partial z}{\partial v}-?$

3.4 Найти частные производные от неявно заданных функций:

1) $xyz=x+y+z$; **2)** $z^3-3xyz=a^3$ **; 3)** $x+y+z=e^{-(x+y+z)}$; **4)** $ze^{xy}+zxy^2=a^2$ **.**

Ответы: 3.1 1) $\dfrac{dz}{dt}=a^2\cos 2t$; **2)** $\dfrac{dz}{dt}=\dfrac{2xt\ln y}{\sqrt{t^2+1}}+\dfrac{x^2}{y\sqrt{1-t^2}}$; **3)** $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x;\ \dfrac{dz}{dx}=2x+\dfrac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$;

4) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=3^x\cdot\ln 3\operatorname{arctg}\dfrac{1}{y};\ \dfrac{dz}{dx}=3^x\cdot\ln 3\operatorname{arctg}\dfrac{1}{y}+3^x\cdot\dfrac{1}{1+y^2}\cdot e^{-x}$; **5)** $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{2u}{u^2+v^2}\cdot\cos y+\dfrac{2v}{u^2+v^2}y\cdot\cos x$;

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{2u}{u^2+v^2}x\cdot\sin y+\dfrac{2v}{u^2+v^2}\cdot\sin x$; **6)** $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{u}{\sqrt{u^2-v^2}}\cdot y\cdot x^{y-1}-\dfrac{v}{\sqrt{u^2-v^2}}\cdot\ln y$;

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{u}{\sqrt{u^2-v^2}}\cdot x^y\ln x-\dfrac{v}{\sqrt{u^2-v^2}}\cdot\dfrac{x}{y}$ **; 7)** $\dfrac{\partial z}{\partial u}=-\sin(xy)\cdot y\cdot e^v-\sin(xy)\cdot x\cdot\dfrac{1}{v}$;

$\frac{\partial z}{\partial v}=-\sin(xy)\cdot y\cdot u\cdot e^{v}+\sin(xy)\cdot x\cdot\frac{u}{v^2}$; **3.2 1)** $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2xy-y^2-yz-yz^3}{xy+3xyz^2}; \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x^2-2xy-xz-xz^3}{xy+3xyz^2}$;

2) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z}{x}; \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x^2z}{z^2-x^2y}$**; 3)** $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z}{x+z}; \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z^2}{y(x+z)}$; **4)** $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z^2+y^2}{z^2+y^2+y}; \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{z^2+y^2+y}$;

5) $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{z^{xy}y\ln|z|}{xyz^{xy-1}-\sin z}; \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{z^{xy}x\ln|z|}{xyz^{xy-1}-\sin z}$; **3.3 1)** $\frac{dz}{dt}=\frac{2e^{2t}(x-y)}{x^2+y^2}$;

2) $\frac{dz}{dt}=-3\frac{\sin(x+y)+x\cos(x+y)}{t^4}+2x(t-1)\cos(x+y)$**;**

3) $\frac{\partial z}{\partial x}=2u\left(\frac{ux}{v}-\frac{y\ln v}{x^2}\right); \frac{\partial z}{\partial y}=2u\left(\frac{\ln v}{x}-\frac{uy}{v}\right)$;

4) $\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}\left(2u-\frac{x}{y}v\right); \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}\left(2v-\frac{x}{y}u\right)$;

3.4 1) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1-yz}{xy-1}; \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1-xz}{xy-1}$; **2)** $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{yz}{z^2-xy}; \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xz}{z^2-xy}$; **3)** $\frac{\partial z}{\partial x}=-1; \frac{\partial z}{\partial y}=-1$;

4) $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{yze^{xy}+zy^2}{e^{xy}+xy^2}; \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{xze^{xy}+2xyz}{e^{xy}+xy^2}$.

Занятие 4.

Касательная плоскость и нормаль к поверхности.

Производная по направлению. Градиент

Аудиторные задания

4.1 Написать уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности в указанной точке:

1) $x^2+y^2+z^2=26; M_0(3,4,1)$; **2)** $z=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}; M_0(2,3,2)$**; 3)** $e^z-z+xy=3; M_0(2,1,0)$;

4) $z=xy-\sqrt{x^2+y^2}; M_0(3,4,0)$**; 5)** $z=\sin(xy); M_0\left(1,\frac{\pi}{3},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

4.2 Найти производную функции $u=xy^2+z^3-xyz$ в точке $M(1,1,2)$ по направлению вектора, образующего с координатными осями острые углы, если $\alpha=60°, \beta=45°$?

4.3 Найти производную функции $u=x^2-2xz+y^2$ в точке $M(1,2,-1)$ по направлению вектора $\overrightarrow{MM_1}$, где M_1 – точка с координатами $(2,4,-3)$.

4.4 Найти градиент функций в указанных точках:

1) $z = 4 - x^2 - y^2$; $M(1,2)$; **2)** $z = \dfrac{xy}{x^2 + y^2 + 1}$; $M(0,3)$**; 3)** $z = e^{\frac{2x}{x^2+y^2}}$; $M(1,1)$**.**

4.5 Найти наибольшую скорость возрастания функций в указанных точках:

1) $z = 5x^2 + 6xy$; $M_0(2,1)$; **2)** $u = xzye^{x+y+z}$; $M(1,1,-1)$**.**

Домашние задания

4.6 Написать уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности в указанной точке:

1) $x^2 + 3y^2 - 4z^2 = 15$; $M_0(2,-3,2)$; **2)** $4y^2 - z^2 + 4xy - xz + 3z = 9$; $M_0(1,-2,1)$**;**

3) $z + x^3 + y^3 + z^3 + xyz = 6$; $M_0(1,2,-1)$**.**

4.7 Найти производную по направлению функции $z = 5x^2 - 2y^2$ в точке $M_0(2,5)$ по направлению к точке $N(-2,2)$.

4.8 Найти градиенты функций в указанных точках:

1) $u = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$; $M_0(2,1,-1)$; **2)** $u = x^2 - \operatorname{arctg}(y+z)$; $M_0(2,1,1)$**.**

Ответы:

4.1 1) $3x + 4y + z = 26$; $\dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y-4}{4} = \dfrac{z-1}{1}$; **2)** $3x + 2y - 3z = 6$; $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-3}{2/3} = \dfrac{z-2}{-1}$;

3) $x + 2y = 4$; $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z}{0}$; **4)** $17x + 11y - 5z = 95$; $\dfrac{x-3}{17} = \dfrac{y-4}{11} = -\dfrac{z}{5}$;

5) $\pi x + 3y - 6z - 2\pi + 3\sqrt{3} = 0$; $\dfrac{x-1}{\pi} = \dfrac{y - \frac{\pi}{3}}{3} = \dfrac{z - \frac{\sqrt{3}}{2}}{-6}$; **4.2** 5; **4.3** $\dfrac{16}{3}$;

4.4 1) $\overrightarrow{\operatorname{grad} z} = -2\vec{i} - 4\vec{j}$; **2)** $\overrightarrow{\operatorname{grad} z} = \dfrac{9}{10}\vec{i}$; **3)** $\overrightarrow{\operatorname{grad} z} = -e\vec{j}$; **4.5 1)** $2\sqrt{205}$; **2)** $2\vec{e}$;

4.6 1) $2x - 9y - 8z - 15 = 0$; $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+3}{-9} = \dfrac{z-2}{-8}$; **2)** $3x + 4y + 5 = 0$; $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{4} = \dfrac{z-1}{0}$**;**

3) $x + 11y + 5z - 17 = 0$; $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{11} = \dfrac{z+1}{6}$; **4.7** – 4; **4.8 1)** $\overrightarrow{\operatorname{grad} u} = 15\vec{i} + 9\vec{j} - 3\vec{k}$;

2) $\overrightarrow{\operatorname{grad} u} = 4\vec{i} - \dfrac{1}{5}\vec{j} - \dfrac{1}{5}\vec{k}$.

Занятие 5.

Экстремум и условный экстремум функции нескольких переменных

Аудиторные задания

5.1 Исследовать на экстремум следующие функции:

1) $z = x^3 + y^3 - 3xy$; **2)** $z = -4 + 6x - x^2 - xy - y^2$**; 3)** $z = x^3 + y^3$;

4) $z = 6x^2y^3 - 6x^2 - 9y^2 + 1$**; 5)** $z = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3$.

5.2 Найти условные экстремумы следующих функций:

1) $z = 2x + y$, если $x^2 + y^2 = 5$; **2)** $z = xy + 3x^2$, если $x + y + 1 = 0$**;**

3) $z = 2x^2 + 9y^2$, если $x^2 + 9y^2 = 1$; **4)** $z = x^2 + 2y^2$, если $3x + 2y = 11$**.**

Домашние задания

5.3 Исследовать на экстремум функции:

1) $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$; **2)** $z = 3x^2y + y^3 - 18x - 30y$**; 3)** $z = (x-1)^2 + 4y^2$**.**

5.4 Найти условные экстремумы функций:

1) $z = xy,\ x + y = 1$; **2)** $z = e^{xy},\ x + y = 1$**; 3)** $z = xy,\ x^2 + y^2 = 8$**.**

Ответы: 5.1 1) $z_{\min} = z(1,1) = -1$; **2)** $z_{\max} = z(4,-2) = 8$; **3)** экстремума нет; **4)** $z_{\max} = z(0,0) = 1$; **5)** $z_{\max} = z(4,4) = 15$; **5.2 1)** $z(2,1) = 5$ – условный max, $z(-2,-1) = -5$ – условный min; **2)** $z(0{,}25;-1{,}25) = -0{,}125$ – условный min; **3)** $z(-1,0) = 2; z(1,0) = 2$ – условный max, $z\left(0,-\frac{1}{3}\right) = 1$**;** $z\left(0,\frac{1}{3}\right) = 1$ – условный min; **4)** $z(3,1) = 11$ – условный min;

5.3 1) $z_{\min} = z(1;0{,}5) = 0$; **2)** $z_{\min} = z(1;3) = -72; z_{\max} = z(-1,-3) = 72$; **3)** $z_{\min} = z(1;0) = 0$;

5.4 1) $z(0{,}5;0{,}5) = 0{,}25$ – условный max; **2)** $z\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right) = e^{\frac{1}{4}}$ – условный max;

3) $z(2;-2) = z(-2;2) = -4$ – условный min; $z(-2,-2) = 4$ – условный max**.**

Занятие 6.

Наибольшее и наименьшее значения функции нескольких переменных в замкнутой области

Аудиторные задания

6.1 Найти наибольшее и наименьшее значение функции в замкнутой области:

1) $z = e^{x^3+3x^2+6y^2}$, $x^2+y^2 \le 1$; **2)** $z = x^2 - xy + 2y^2 + 3x + 2y + 1$, $x + y + 5 = 0$, $x = 0$, $y = 0$**;**

3) $z = x^2 + 2xy - 10$, $y = x^2 - 4$, $y = 5$; **4)** $z = x^2 y(4 - x - y)$, $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 6$**;**

5) $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 \le 9$.

Домашние задания

6.2 Найти наибольшее и наименьшее значение функции в замкнутой области:

1) $z = x^2 - xy + y^2 - 4x + 2y + 5$, $x + y = 3$, $x = 0$, $y = -1$; **2)** $z = x + y$, $x^2 + y^2 \le 1$**;**

3) $z = x^3 + y^3 - 3xy$, $x = 0$, $x = 2$, $y = -1$, $y = 2$; **4)** $z = xy - 2x - y$, $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 8$**;**

5) $z = 1 + 2x + 3y$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $x + y \le 6$.

Ответы:

6.1 1) $z_{наиб} = z(0,1) = e^6$, $z_{наим} = z(0,0) = 1$; **2)** $z_{наиб} = z(0,-5) = 41$, $z_{наим} = z(-2,-1) = -3$;

3) $z_{наиб} = z(3,5) = 29$, $z_{наим} = z(-3,5) = -31$; **4)** $z_{наиб} = z(2,1) = 4$, $z_{наим} = z(4,2) = -64$;

5) $z_{наиб} = 9$ (в точках окружности $x^2 + y^2 = 9$), $z_{наим} = z(0,0) = 0$;

6.2 1) $z_{наиб} = z(0,3) = 20$, $z_{наим} = z(2,0) = 1$;

2) $z_{наиб} = z\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}$, $z_{наим} = z\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2}$;

3) $z_{наиб} = z(2,-1) = 13$, $z_{наим} = z(1,1) = z(0,-1) = -1$;

4) $z_{наиб} = z(3{,}5; 4{,}5) = 4{,}25$; $z_{наим} = z(8,6) = -16$; **5)** $z_{наиб} = z(0,6) = 19$, $z_{наим} = z(0,0) = 1$**.**

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Занятие 7. Неопределенный интеграл. Метод непосредственного интегрирования

Аудиторные задания

7.1 Пользуясь свойствами неопределенного интеграла и таблицей основных неопределенных интегралов, найти следующие интегралы:

1) $\int\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-1\right)dx$; **2)** $\int\frac{\left(1+4\sqrt[3]{x}\right)^2}{x}dx$; **3)** $\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$; **4)** $\int\frac{1+3x^2}{x^2\left(1+2x^2\right)}dx$;

5) $\int\sin^2\frac{x}{2}dx$; **6)** $\int\frac{4x^2+2x-3}{x^2}dx$; **7)** $\int\sin 3x\cos x\,dx$; **8)** $\int(2x+3)^3dx$;

9) $\int\cos 4x\cos 8x\,dx$; **10)** $\int\frac{1+\cos^2 x}{1-\cos 2x}dx$; **11)** $\int 2^x\left(1+\frac{2^{-x}}{\sqrt[4]{x^3}}\right)dx$; **12)** $\int\frac{5-\sin^3 x}{\sin^2 x}dx$;

13) $\int\left(\frac{3}{1+x^2}-\frac{7}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$; **14)** $\int\frac{x^2}{x^2-1}dx$; **15)** $\int\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)^2dx$; **16)** $\int\frac{x^4}{x^2+1}dx$;

17) $\int e^x\left(5-\frac{3e^{-x}}{x^4}\right)dx$; **18)** $\int\left(1-\sqrt{x}\right)^3dx$; **19)** $\int\left(\sqrt{x}-\frac{3}{\sqrt{x}}\right)dx$; **20)** $\int\frac{6x^4-8x^3-4x^2+3x-5}{x^2}dx$;

21) $\int\left(\sqrt{x^5}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx$; **22)** $\int e^{-x}\left(1+\frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$; **23)** $\int 3^x\left(2-\frac{3^{-x}}{1+x^2}\right)dx$;

24) $\int\left(\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{5}{\cos^2 x}\right)dx$; **25)** $\int\frac{3\sqrt{1-x^2}+2\cos^2 x}{\sqrt{1-x^2}\cos^2 x}dx$; **26)** $\int\frac{6x+7+7x^2}{x^3+x}dx$;

27) $\int(\mathrm{ch}\,x+\mathrm{sh}\,x)dx$; **28)** $\int\frac{2+7\,\mathrm{sh}^2 x}{\mathrm{sh}^2 x}dx$.

Домашние задания

7.2 Пользуясь таблицей основных неопределенных интегралов и свойствами неопределенного интеграла, найти следующие интегралы:

1) $\int\left(x^2-4\right)(x+2)dx$; **2)** $\int\frac{9x^5+12x^4-6x^3+7x^2-4x+2}{x^3}dx$; **3)** $\int\mathrm{tg}^2 x\,dx$;

4) $\int e^x\left(3+5e^{-x}\,\mathrm{ctg}^2 x\right)dx$; **5)** $\int\cos^2\frac{x}{2}dx$; **6)** $\int\left(\frac{2}{x^3}-\frac{4}{x^5}+\frac{6}{x^7}\right)dx$;

7) $\int\frac{\left(1-\sqrt{x}\right)^3}{x}dx$; **8)** $\int\frac{7+3\cos^2 x}{\cos^2 x}dx$; **9)** $\int\frac{x^2}{x^2+1}dx$; **10)** $\int\frac{x^4}{x^2-1}dx$.

Ответы: **7.1** **1)** $\frac{x^2}{2}+\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-2x+C$; **2)** $\ln|x|+24\sqrt[3]{x}+24\sqrt[3]{x^2}+C$; **3)** $\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x+C$;

4) $-\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\sqrt{2}x+C$; **5)** $\frac{x}{2}-\frac{\sin x}{2}+C$; **6)** $4x+2\ln|x|+\frac{3}{x}+C$; **7)** $-\frac{1}{4}\cos 2x-\frac{1}{8}\cos 4x+C$;

8) $2x^4+12x^3+27x^2+27x+C$; **9)** $\frac{1}{8}\sin 4x+\frac{1}{24}\sin 12x+C$; **10)** $-\operatorname{ctg}x-\frac{1}{2}x+C$;

11) $\frac{2^x}{\ln 2}+4\sqrt[4]{x}+C$; **12)** $-5\operatorname{ctg}x+4\cos x+C$; **13)** $3\operatorname{arctg}x-7\arcsin x+C$; **14)** $x+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$;

15) $x+\cos x+C$; **16)** $\frac{x^3}{3}-x+\operatorname{arctg}x+C$; **17)** $5e^x+\frac{1}{x^3}+C$; **18)** $x-2x^{3/2}+\frac{3}{2}x^2-\frac{2}{5}x^{5/2}+C$;

19) $\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-6\sqrt{x}+C$; **20)** $2x^3-4x^2-4x+3\ln|x|+\frac{5}{x}+C$; **21)** $\frac{2}{7}\sqrt{x^7}+3\sqrt[3]{x}+C$;

22) $-e^{-x}+\arcsin x+C$; **23)** $\frac{2\cdot 3^x}{\ln 3}-\operatorname{arctg}x+C$; **24)** $3\arcsin x-5\operatorname{tg}x+C$;

25) $3\operatorname{tg}x+2\arcsin x+C$; **26)** $6\operatorname{arctg}x+7\ln|x|+C$; **27)** $\operatorname{ch}x+\operatorname{sh}x+C$; **28)** $-2\operatorname{cth}x+7x+C$.

7.2 **1)** $\frac{x^4}{4}+\frac{2}{3}x^3-2x^2-8x+C$; **2)** $3x^3+6x^2-6x+7\ln|x|+\frac{4}{x}-\frac{1}{x^2}+C$; **3)** $\operatorname{tg}x-x+C$;

4) $3e^x-5\operatorname{ctg}x-5x+C$; **5)** $\frac{x}{2}+\frac{\sin x}{2}+C$; **6)** $-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^6}+C$; **7)** $\ln|x|-6\sqrt{x}+3x-\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+C$;

8) $7\operatorname{tg}x+3x+C$; **9)** $x-\operatorname{arctg}x+C$; **10)** $\frac{x^3}{3}+x+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$.

Занятие 8. Интегрирование с помощью замены переменной. Метод подстановки

Аудиторные задания

8.1 Найти неопределенные интегралы подведением (поднесением) под знак дифференциала:

1) $\int\cos x\, 2^{\sin x}dx$; **2)** $\int\frac{dx}{x(1+2\ln x)^4}$; **3)** $\int\frac{2x+3}{x^2+3x+2}dx$; **4)** $\int\frac{4x+4}{x^2+2x}dx$; **5)** $\int\frac{\operatorname{tg}x\,dx}{\cos^2 x}$;

6) $\int\frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{arctg}x}$; **7)** $\int xe^{-x^2}dx$; **8)** $\int\frac{\sin^3 2x}{\cos^4 2x}dx$; **9)** $\int\frac{dx}{x\ln 4x}$; **10)** $\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^4}}$.

8.2 Найти интегралы, применив метод подстановки:

1) $\int x(3x+4)^5dx$; **2)** $\int x\sqrt{2x+3}\,dx$; **3)** $\int\frac{\ln x\sqrt{2+\ln^2 x}}{x}dx$; **4)** $\int\frac{\sin 2x}{4+\sin^2 x}dx$;

5) $\int\frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$; **6)** $\int\frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$; **7)** $\int\frac{\sin xdx}{\sqrt{1+2\cos x}}$; **8)** $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}$;

9) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$; 10) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$; 11) $\int \frac{2^{1/x}}{x^2}\,dx$; 12) $\int \frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx$;

13) $\int \frac{\cos\frac{x}{\sqrt{2}}}{2-\sin\frac{x}{\sqrt{2}}}\,dx$; 14) $\int \frac{dx}{3^x+1}$; 15) $\int \frac{(2x+1)dx}{\sqrt{x+1}}$; 16) $\int \frac{\ln x+1}{x\ln x}\,dx$;

17) $\int \frac{\sin x + x\cos x}{x^2\sin^2 x}\,dx$; 18) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$; 19) $\int 4^{x\ln x}(1+\ln x)dx$; 20) $\int \frac{2x-\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

Домашние задания

8.3 Найти неопределенные интегралы подведением (поднесением) под дифференциал:

1) $\int e^{4x-3}dx$; 2) $\int \frac{\cos 2x}{1+\sin^2 2x}\,dx$; 3) $\int x^2 e^{-x^3}\,dx$; 4) $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln 2x}}$;

5) $\int x\sqrt{x^2-4}\,dx$; 6) $\int \frac{xdx}{x^2+7}$; 7) $\int \frac{3^x dx}{1+9^x}$; 8) $\int x^2\cos(3x^3+1)\,dx$.

8.4 Найти неопределенные интегралы методом подстановки:

1) $\int \frac{4\sin 2x\,dx}{4+\sin^2 x}$; 2) $\int \frac{\ln x+1}{1+x\ln x}\,dx$; 3) $\int \frac{dx}{1+e^x}$; 4) $\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}\,dx$;

5) $\int \frac{x(2\ln x+1)}{4+x^2\ln x}\,dx$; 6) $\int \frac{2^{1/x^2}}{x^3}\,dx$; 7) $\int x(4x+5)^3\,dx$; 8) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-4\ln^2 x}}$.

Ответы: 8.1 1) $\frac{2^{\sin x}}{\ln 2}+C$; 2) $-\frac{1}{6(1+2\ln x)^3}+C$; 3) $\ln\left|x^2+3x+2\right|+C$; 4) $2\ln\left|x^2+2x\right|+C$;

5) $\frac{\mathrm{tg}^2 x}{2}+C$; 6) $\ln\left|\mathrm{arctg}\,x\right|+C$; 7) $-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C$; 8) $\frac{1}{6\cos^3 2x}-\frac{1}{2\cos 2x}+C$; 9) $\ln\left|\ln 4x\right|+C$;

10) $\frac{1}{2}\arcsin x^2+C$.

8.2 1) $\frac{(3x+4)^7}{63}-\frac{2(3x+4)^6}{27}+C$; 2) $\frac{(2x+3)^{5/2}}{10}-\frac{(2x+3)^{3/2}}{2}+C$; 3) $\frac{1}{3}(2+\ln^2 x)^{3/2}+C$;

4) $\ln\left|4+\sin^2 x\right|+C$; 5) $2\,\mathrm{arctg}\sqrt{x-1}+C$; 6) $\frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3}+2\sqrt{x-1}+C$; 7) $-\sqrt{1+2\cos x}+C$;

8) $-\frac{1}{a}\arcsin\frac{a}{x}+C$; 9) $\ln\left|\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}\right|+C$; 10) $2e^{\sqrt{x}}+C$; 11) $-\frac{2^{1/x}}{\ln 2}+C$; 12) $\sin(\ln x)+C$;

13) $-\sqrt{2}\ln\left|2-\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\right|+C$; 14) $\frac{1}{\ln 3}\ln\left|\frac{3^x}{3^x+1}\right|+C$; 15) $\frac{4}{3}(x+1)^{3/2}-2(x+1)^{1/2}+C$;

16) $\ln\left|x\ln x\right|+C$; **17)** $-\dfrac{1}{x\sin x}+C$; **18)** $-\ln\left|\dfrac{1}{x}+\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+1}\right|+C$; **19)** $\dfrac{4^{x\ln x}}{\ln 4}+C$;

20) $-2\sqrt{1-x^2}+\arccos^2 x+C$.

8.3 1) $\frac{1}{4}e^{4x-3}+C$; **2)** $\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\sin 2x+C$; **3)** $-\frac{1}{3}e^{-x^3}+C$; **4)** $2\sqrt{\ln 2x}+C$; **5)** $\frac{1}{3}(x^2-4)^{3/2}+C$;

6) $\frac{1}{2}\ln\left|x^2+7\right|+C$; **7)** $\frac{1}{\ln 3}\mathrm{arctg}\,3^x+C$; **8)** $\frac{1}{9}\sin(3x^3+1)+C$.

8.4 **1)** $4\ln\left|4+\sin^2 x\right|+C$; **2)** $\ln\left|1+x\ln x\right|+C$; **3)** $x-\ln\left|1+e^x\right|+C$;

4) $\frac{2}{3}x^{3/2}-x+4\sqrt{x}-4\ln\left|\sqrt{x}+1\right|+C$; **5)** $\ln\left|4+x^2\ln x\right|+C$; **6)** $-\frac{1}{2\ln 2}2^{1/x^2}+C$;

7) $\frac{(4x+5)^5}{80}-\frac{5(4x+5)^4}{64}+C$; **8)** $\frac{1}{2}\arcsin 2\ln x+C$.

Занятие 9. Интегрирование по частям в неопределенном интеграле

Аудиторные задания

9.1 Методом интегрирования по частям найти следующие неопределенные интегралы:

1) $\int(2x+3)e^{4x}dx$; **2)** $\int\sqrt{x}\ln 4x\,dx$; **3)** $\int x\,\mathrm{arctg}\,2x\,dx$; **4)** $\int\left(x^2+1\right)\cos(3x+1)\,dx$;

5) $\int e^{-x}\cos 2x\,dx$; **6)** $\int\ln^2 x\,dx$; **7)** $\int\sin(\ln x)dx$; **8)** $\int\frac{\ln x}{x^3}dx$;

9) $\int\frac{\arcsin x\,dx}{\sqrt{1+x}}$; **10)** $\int x^2 3^x dx$; **11)** $\int\frac{\arcsin\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{1-x}}$; **12)** $\int(3x+1)\cos^2 4x dx$;

13) $\int x^2\ln(1+x)\,dx$; **14)** $\int\sqrt{a^2+x^2}dx$; **15)** $\int\cos\sqrt{x}\,dx$; **16)** $\int x^3\sin x^2 dx$;

17) $\int\frac{x\sin x}{\cos^2 x}dx$; **18)** $\int x\,\mathrm{arcctg}\sqrt{x}\,dx$; **19)** $\int\frac{xdx}{\cos^2 x}$.

Домашние задания

9.2 Найти следующие неопределенные интегралы методом интегрирования по частям:

1) $\int\left(x^2+2x\right)\cos 2x\,dx$; **2)** $\int e^{2x}\sin x\,dx$; **3)** $\int\frac{x\cos x}{\sin^2 x}dx$; **4)** $\int\arccos x\,dx$;

5) $\int e^{\sqrt{x}}dx$; **6)** $\int x\sin x\cos x\,dx$; **7)** $\int\frac{x\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx$; **8)** $\int x^3\cos 3x\,dx$.

Ответы: **9.1** **1)** $\frac{1}{4}(2x+3)e^{4x}-\frac{1}{8}e^{4x}+C$; **2)** $\frac{2}{3}x^{3/2}\ln 4x-\frac{4}{9}x^{3/2}+C$;

3) $\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}2x-\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}\operatorname{arctg}2x+C$; **4)** $\frac{1}{3}\left(x^2+1\right)\sin(3x+1)+\frac{2}{9}x\cos(3x+1)-\frac{2}{27}\sin(3x+1)+C$;

5) $\frac{e^{-x}}{5}(2\sin 2x-\cos 2x)+C$; **6)** $x\ln^2 x-x\ln x+x+C$; **7)** $\frac{x}{2}(\sin\ln x-\cos\ln x)+C$;

8) $-\frac{\ln x}{2x^2}-\frac{1}{4x^2}+C$; **9)** $2\sqrt{x+1}\arcsin x+4\sqrt{1-x}+C$; **10)** $3^x\left(\frac{x^2}{\ln 3}-\frac{2x}{\ln^2 3}+\frac{2}{\ln^3 3}\right)+C$;

11) $-2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{x}+C$; **12)** $\frac{3}{4}x^2+\frac{x}{2}+\frac{3x+1}{16}\sin 8x+\frac{3}{128}\cos 8x+C$;

13) $\frac{x^3}{3}\ln(1+x)-\frac{x^3}{9}+\frac{x^2}{6}-\frac{x}{3}+\frac{1}{3}\ln(1+x)+C$; **14)** $\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+C$;

15) $2\sqrt{x}\sin\sqrt{x}+\cos\sqrt{x}+C$; **16)** $-\frac{x^2}{2}\cos x^2+\frac{1}{2}\sin x^2+C$; **17)** $\frac{x}{\cos x}-\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C$;

18) $\frac{x^2}{2}\operatorname{arcctg}\sqrt{x}+\frac{1}{6}\sqrt{x^3}-\frac{1}{2}\sqrt{x}-\frac{1}{2}\operatorname{arcctg}\sqrt{x}+C$; **19)** $x\operatorname{tg}x+\ln|\cos x|+C$.

9.2 **1)** $\frac{1}{2}\left(x^2+2x\right)\sin 2x+\frac{1}{2}(x+1)\cos 2x-\frac{1}{4}\sin 2x+C$; **2)** $\frac{e^{2x}}{5}(2\sin x-\cos x)+C$;

3) $-\frac{x}{\sin x}+\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C$; **4)** $x\arccos x-\sqrt{1-x^2}+C$; **5)** $2e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}-1\right)+C$;

6) $-\frac{x}{4}\cos 2x+\frac{1}{8}\sin 2x+C$; **7)** $-\sqrt{1-x^2}\arccos x-x+C$;

8) $\frac{x^3}{3}\sin 3x+\frac{x^2}{3}\cos 3x-\frac{2}{9}x\sin 3x-\frac{2}{27}\cos 3x+C$.

Занятие 10. Интегрирование выражений, содержащих квадратный трехчлен в знаменателе

Аудиторные задания

10.1 Найти неопределенные интегралы:

1) $\int\frac{dx}{4x^2+13}$; **2)** $\int\frac{dx}{x^2-81}$; **3)** $\int\frac{dx}{5x^2-18}$; **4)** $\int\frac{dx}{x^2-10x+41}$; **5)** $\int\frac{dx}{x^2+12x+50}$;

6) $\int\frac{dx}{2x^2-4x+3}$; **7)** $\int\frac{dx}{3x^2+6x+5}$; **8)** $\int\frac{dx}{4x^2+8x-3}$; **9)** $\int\frac{x+2}{3x^2+4x-7}dx$; **10)** $\int\frac{6x+5}{3x^2+5x-9}dx$;

11) $\int\frac{x+3}{x^2+2x+5}dx$; **12)** $\int\frac{x-5}{x^2-4x}dx$; **13)** $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+16x+5}}$; **14)** $\int\frac{dx}{\sqrt{12+4x+x^2}}$;

15) $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+5x}}$; **16)** $\int\frac{dx}{\sqrt{7+4x-2x^2}}$; **17)** $\int\frac{(x-6)dx}{\sqrt{x^2+8x+17}}$; **18)** $\int\frac{(x+7)dx}{\sqrt{x^2+4x-7}}$;

19) $\int\frac{(x+3)dx}{\sqrt{6-3x-x^2}}$; **20)** $\int\frac{(4x+5)dx}{\sqrt{7-4x-2x^2}}$; **21)** $\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-x+2}}$; **22)** $\int\frac{dx}{(x+2)\sqrt{x^2+x+1}}$.

Домашние задания

10.2 Найти неопределенные интегралы:

1) $\int\frac{dx}{x^2+64}$; **2)** $\int\frac{dx}{x^2-64}$; **3)** $\int\frac{dx}{x^2-2x-4}$; **4)** $\int\frac{dx}{3x^2-12x-14}$;

5) $\int\frac{dx}{x^2+x+3}$; **6)** $\int\frac{(x+2)dx}{x^2+2x-3}$; **7)** $\int\frac{(x+3)dx}{x^2+8x+25}$; **8)** $\int\frac{dx}{\sqrt{10-6x-3x^2}}$;

9) $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-6x}}$; **10)** $\int\frac{(x-3)dx}{\sqrt{x^2-2x-9}}$; **11)** $\int\frac{(x+1)\,dx}{\sqrt{10-2x-x^2}}$; **12)** $\int\frac{dx}{\sqrt{2x^2-4x+5}}$.

Ответы: 10.1 1) $\frac{1}{2\sqrt{13}}\operatorname{arctg}\frac{2x}{\sqrt{13}}+C$; **2)** $\frac{1}{18}\ln\left|\frac{x-9}{x+9}\right|+C$; **3)** $\frac{1}{2\sqrt{90}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}x-\sqrt{18}}{\sqrt{5}x+\sqrt{18}}\right|+C$;

4) $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x-5}{4}+C$; **5)** $\frac{1}{\sqrt{14}}\operatorname{arctg}\frac{x+6}{\sqrt{14}}+C$; **6)** $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\sqrt{2}(x-1)+C$;

7) $\frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}(x+1)}{\sqrt{2}}+C$; **8)** $\frac{1}{4\sqrt{7}}\ln\left|\frac{2(x+1)-\sqrt{7}}{2(x+1)+\sqrt{7}}\right|+C$; **9)** $\frac{1}{2}\ln\left|x^2+4x-7\right|+C$;

10) $\ln\left|3x^2+5x-9\right|+C$; **11)** $\frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+5\right|+\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+C$; **12)** $\frac{1}{2}\ln\left|x^2-4x\right|-\frac{3}{4}\ln\left|\frac{x-4}{x}\right|+C$;

13) $\ln\left|x+8+\sqrt{x^2+16x+5}\right|+C$; **14)** $\arcsin\frac{x-2}{4}+C$; **15)** $\ln\left|x+\frac{5}{2}+\sqrt{x^2+5x}\right|+C$;

16) $\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{\sqrt{2}(x-1)}{3}+C$; **17)** $\sqrt{x^2+8x+17}-10\ln\left|x+4+\sqrt{x^2+8x+17}\right|+C$;

18) $\sqrt{x^2+4x-7}+5\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x-7}\right|+C$; **19)** $-\sqrt{6-3x-x^2}+\frac{3}{2}\arcsin\frac{2x+3}{\sqrt{33}}+C$;

20) $-2\sqrt{7-4x-2x^2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{\sqrt{2}(x+1)}{3}+C$; **21)** $-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x+3}{4(x-1)}+\frac{\sqrt{x^2-x+2}}{2(x-1)^2}\right|+C$;

22) $-\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{-x}{2(x+2)}+\sqrt{\frac{x^2+x+1}{3(x+2)^2}}\right|+C$. **10.2. 1)** $\frac{1}{8}\operatorname{arctg}\frac{x}{8}+C$; **2)** $\frac{1}{16}\ln\left|\frac{x-8}{x+8}\right|+C$;

3) $\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{x-1-\sqrt{5}}{x-1+\sqrt{5}}\right|+C$; **4)** $\frac{\sqrt{3}}{6\sqrt{26}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}(x-2)-\sqrt{26}}{\sqrt{3}(x-2)+\sqrt{26}}\right|+C$; **5)** $\frac{2}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{11}}+C$;

6) $\frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x-3\right|+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right|+C$; **7)** $\frac{1}{2}\ln\left|x^2+8x+25\right|-\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x+4}{3}+C$;

8) $\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{\sqrt{3}(x-1)}{\sqrt{13}}+C$ **; 9)** $\ln\left|x-3+\sqrt{x^2-6x}\right|+C$ **;**

10) $\sqrt{x^2-2x-9}-2\ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x-9}\right|+C$ **; 11)** $-\sqrt{10-2x-x^2}+C$ **;**

12) $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x+\frac{5}{2}}\right|+C$ **.**

Занятие 11. Интегрирование рациональных функций

Аудиторные задания

11.1 Записать разложение рациональной дроби на простейшие в неопределенных коэффициентах:

1) $\frac{3x-2}{x^3-2x^2}$; **2)** $\frac{4x+5}{\left(x^2+1\right)^2(x-3)^2}$; **3)** $\frac{x^2+2x+2}{\left(x^2+x+1\right)(x-2)^2}$.

11.2 Найти неопределенные интегралы:

1) $\int\frac{x^3-1}{4x^3-x}dx$ **; 2)** $\int\frac{x^2-x+4}{(x+1)(x-2)(x-3)}dx$ **; 3)** $\int\frac{2x^2+3}{x^4-5x^2+6}dx$ **; 4)** $\int\frac{x^6-2x^4+3x^3-9x^2+4}{x^5-5x^3+4x}dx$;

5) $\int\frac{dx}{x^3+2x^2+2x}$ **; 6)** $\int\frac{x^3+3}{x^3-8}dx$ **;** **7)** $\int\frac{dx}{x\left(x^2+1\right)\left(x^2+4\right)}$ **;** **8)** $\int\frac{x^4+3x+1}{x^4-1}dx$ **;**

9) $\int\frac{6x^4-3x^2+30}{\left(x^2-1\right)(x+2)}dx$; **10)** $\int\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2\frac{dx}{x}$ **;** **11)** $\int\frac{dx}{\left(x^2+4\right)^2}$; **12)** $\int\frac{(x+3)dx}{\left(x^2+2\right)^2}$.

Домашние задания

11.3 Найти неопределенные интегралы:

1) $\int\frac{6x^4-21x^2+3x+24}{\left(x^2+x-2\right)(x+1)}dx$; **2)** $\int\frac{dx}{x^3+x^2}$; **3)** $\int\frac{x^2-6x+8}{x^3+8}dx$;

4) $\int\frac{(9x-9)\,dx}{(x+1)\left(x^2-4x+13\right)}$; **5)** $\int\frac{5x\,dx}{x^4+3x^2-4}$; **6)** $\int\frac{2x^4-3x^3-21x^2-26}{(x+3)\left(x^2-5x+4\right)}dx$ **.**

Ответы:

11.1 1) $\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-2}$ **; 2)** $\frac{A}{x-3}+\frac{B}{(x-3)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}+\frac{Ex+F}{\left(x^2+1\right)^2}$ **; 3)** $\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+x+1}$ **.**

11.2 1) $\frac{1}{4}x+\ln|x|-\frac{7}{16}\ln|2x-1|-\frac{9}{16}\ln|2x+1|+C$; **2)** $\frac{1}{2}\ln|x+1|-2\ln|x-2|+\frac{5}{2}\ln|x-3|+C$;

3) $\frac{3\sqrt{3}}{2}\ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right|-\frac{7}{2\sqrt{2}}\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right|+C$ **; 4)** $\frac{x^2}{2}+\ln|x|+\frac{3}{2}\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln|x+1|-\ln|x-2|+\ln|x+2|+C$ **;**

5) $\frac{1}{2}\ln|x|-\frac{1}{4}\ln\left|x^2+2x+2\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x+1)+C$ **;**

6) $x+\frac{11}{12}\ln|x-2|-\frac{11}{24}\ln\left|x^2+2x+4\right|-\frac{11}{4\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{3}}+C$;

7) $\frac{1}{4}\ln|x|-\frac{1}{6}\ln\left|x^2+1\right|+\frac{1}{24}\ln\left|x^2+4\right|+C$ **; 8)** $x+\frac{5}{4}\ln|x-1|+\frac{1}{4}\ln|x+1|-\frac{3}{4}\ln\left|x^2+1\right|-\operatorname{arctg}x+C$ **;**

9) $3x^2-12x+\ln|x-1|-3\ln|x+1|+2\ln|x+2|+C$ **; 10)** $4\ln|x|-3\ln|x-1|-\frac{9}{x-1}+C$;

11) $\frac{1}{16}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+\frac{x}{8\left(x^2+4\right)}+C$; **12)** $\frac{3x-2}{4\left(x^2+2\right)}+\frac{3}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C$.

11.3 1) $3x^2-12x+2\ln|x-1|-3\ln|x+1|+10\ln|x+2|+C$ **; 2)** $\ln|x+1|-\ln|x|-\frac{1}{x}+C$ **;**

3) $2\ln|x+2|-\frac{1}{2}\ln\left|x^2-2x+4\right|-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{3}}+C$ **;**

4) $-\ln|x+1|+\frac{1}{2}\ln\left|x^2-4x+13\right|+2\operatorname{arctg}\frac{x-2}{3}+C$ **;**

5) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x^2-1}{x^2+4}\right|+C$ **; 6)** $x^2+x+4\ln|x-1|+\ln|x+3|-2\ln|x-4|+C$ **.**

Занятие 12. Интегрирование тригонометрических выражений

Аудиторные задания

12.1 Найти неопределенные интегралы:

1) $\int\sin 5x\sin 3x\,dx$ **; 2)** $\int\cos 8x\cos 3x\,dx$ **; 3)** $\int\sin 6x\cos 4x\,dx$ **; 4)** $\int\cos^2 5x\,dx$ **;**

5) $\int\cos^5 3x\,dx$ **; 6)** $\int\sin^4 2x\,dx$ **; 7)** $\int\sin^3 2x\cos^5 2x\,dx$ **; 8)** $\int\sin^3 3x\cos^3 3x\,dx$ **;**

9) $\int\cos^2 x\sin^4 x\,dx$ **; 10)** $\int\operatorname{tg}^3 2x\,dx$ **; 11)** $\int\operatorname{ctg}^4 x\,dx$ **; 12)** $\int\frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}\,dx$ **;**

13) $\int\frac{dx}{1+\sin^2 x}$ **; 14)** $\int\frac{dx}{1+\operatorname{tg}x}$ **; 15)** $\int\frac{dx}{\sin^2 x+8\sin x\cos x+12\cos^2 x}$ **; 16)** $\int\frac{dx}{5+4\sin x}$ **;**

17) $\int\frac{dx}{16\sin^2 x+25\cos^2 x}$ **; 18)** $\int\frac{dx}{2+3\sin x+2\cos x}$ **; 19)** $\int\frac{\sin^3 x\,dx}{\cos^{3/2}x}$ **; 20)** $\int\sqrt{\sin x}\cos^5 x\,dx$ **.**

Домашние задания

12.2 Найти неопределенные интегралы:

1) $\int \sin^3 x \cos^8 x\, dx$; **2)** $\int \sin^4 3x \cos^2 3x\, dx$; **3)** $\int \cos^5 x \sin x\, dx$; **4)** $\int \sqrt[5]{\sin^3 2x}\cos^3 2x\, dx$;

5) $\int \dfrac{dx}{3\cos x - 4\sin x}$; **6)** $\int \dfrac{dx}{16\sin^2 x - 8\sin x\cos x}$; **7)** $\int \dfrac{dx}{2-5\sin x}$; **8)** $\int \dfrac{dx}{1+3\sin^2 x}$;

9) $\int \cos\dfrac{x}{6}\cos\dfrac{5x}{6}\,dx$; **10)** $\int \operatorname{tg}^4 x\, dx$.

Ответы: 12.1 1) $\dfrac{\sin 2x}{4}-\dfrac{\sin 8x}{16}+C$; **2)** $\dfrac{\sin 5x}{10}+\dfrac{\sin 11x}{22}+C$; **3)** $-\dfrac{\cos 2x}{4}-\dfrac{\cos 10x}{20}+C$;

4) $\dfrac{x}{2}+\dfrac{\sin 10x}{20}+C$; **5)** $\dfrac{\sin 3x}{3}-\dfrac{2\sin^3 3x}{9}+\dfrac{\sin^5 3x}{15}+C$; **6)** $\dfrac{3x}{8}-\dfrac{\sin 4x}{8}+\dfrac{\sin 8x}{64}+C$;

7) $-\dfrac{\cos^6 2x}{12}+\dfrac{\cos^8 2x}{16}+C$; **8)** $-\dfrac{\cos 6x}{48}+\dfrac{\cos^3 6x}{144}+C$; **9)** $\dfrac{x}{16}-\dfrac{\sin 4x}{64}-\dfrac{\sin^3 2x}{48}+C$;

10) $\dfrac{1}{4}\operatorname{tg}^2 2x+\dfrac{1}{2}\ln|\cos 2x|+C$; **11)** $-\dfrac{\operatorname{ctg}^3 x}{3}+\operatorname{ctg}x+x+C$; **12)** $\dfrac{\operatorname{tg}^3 x}{3}+C$; **13)** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\sqrt{2}x+C$;

14) $\dfrac{1}{2}\ln|\operatorname{tg}x+1|-\dfrac{1}{4}\ln|\operatorname{tg}^2 x+1|+\dfrac{1}{2}x+C$; **15)** $\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{\operatorname{tg}x+2}{\operatorname{tg}x+6}\right|+C$; **16)** $\dfrac{2}{3}\operatorname{arctg}\dfrac{5\operatorname{tg}\frac{x}{2}+4}{3}+C$;

17) $\dfrac{1}{20}\operatorname{arctg}\dfrac{4\operatorname{tg}x}{5}+C$; **18)** $\dfrac{1}{3}\ln\left|3\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+2\right|+C$; **19)** $\dfrac{2}{\sqrt{\cos x}}+\dfrac{2}{3}\sqrt{\cos^3 x}+C$;

20) $\dfrac{2}{3}\sin^{3/2}x-\dfrac{4}{7}\sin^{7/2}x+\dfrac{2}{11}\sin^{11/2}x+C$.

12.2 1) $-\dfrac{\cos^9 x}{9}+\dfrac{\cos^{11} x}{11}+C$; **2)** $\dfrac{x}{16}-\dfrac{\sin 12x}{192}-\dfrac{\sin^3 6x}{144}+C$; **3)** $-\dfrac{\cos^6 x}{6}+C$;

4) $\dfrac{5}{16}\sqrt[5]{\sin^8 2x}-\dfrac{5}{36}\sqrt[5]{\sin^{18} 2x}+C$; **5)** $\dfrac{1}{5}\ln\left|\dfrac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+3}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\frac{1}{3}}\right|+C$; **6)** $\dfrac{1}{8}\ln\left|\dfrac{2\operatorname{tg}x-1}{2\operatorname{tg}x}\right|+C$;

7) $\dfrac{1}{\sqrt{21}}\ln\left|\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-5-\sqrt{21}}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-5+\sqrt{21}}\right|+C$; **8)** $\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}2\operatorname{tg}x+C$; **9)** $\dfrac{1}{2}\sin x+\dfrac{3}{4}\sin\dfrac{2}{3}x+C$;

10) $\dfrac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x+x-\operatorname{tg}x+C$.

Занятие 13. Интегрирование иррациональных выражений

Аудиторные задания

13.1 Найти неопределенные интегралы:

1) $\int \frac{dx}{(5+x)\sqrt{3+x}}$; **2)** $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,dx$; **3)** $\int \frac{dx}{\left(\sqrt[3]{x}+4\right)\sqrt{x}}$; **4)** $\int \frac{dx}{x\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)}$;

5) $\int \frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}\,dx$; **6)** $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+1}+\sqrt[3]{2x+1}}$; **7)** $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+3}+5}$; **8)** $\int \frac{\left(1-\sqrt[6]{x}\right)^3}{\sqrt[3]{x}}\,dx$.

13.2 С помощью соответствующих подстановок найти неопределенные интегралы:

1) $\int \frac{dx}{x^{11}\sqrt{1+x^4}}$; **2)** $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}\,dx}{\sqrt{x}}$; **3)** $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{x}\,dx$.

13.3 С помощью тригонометрических подстановок найти неопределенные интегралы:

1) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$; **2)** $\int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x}\,dx$; **3)** $\int \frac{\sqrt{x^2-1}\,dx}{x}$; **4)** $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2-4}}$; **5)** $\int x^3\sqrt{1-x^2}\,dx$; **6)** $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^4}\,dx$.

Домашние задания

13.4 С помощью соответствующих постановок найти неопределенные интегралы:

1) $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x+2}}\,dx$; **2)** $\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{\left(1+\sqrt[3]{x+1}\right)\sqrt{x+1}}\,dx$; **3)** $\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}\,dx$; **4)** $\int \frac{x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}\,dx$;

5) $\int \frac{\sqrt{1+x^2}\,dx}{x^6}$; **6)** $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}$; **7)** $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$; **8)** $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx$.

Ответы: 13.1 1) $\sqrt{2}\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{3+x}{2}}+C$; **2)** $\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\right|-2\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+C$;

3) $6\sqrt[6]{x}-6\,\mathrm{arctg}\sqrt[6]{x}+C$; **4)** $6\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x}+1}{\sqrt[6]{x}}\right|-\frac{6}{\sqrt[6]{x}}+\frac{3}{\sqrt[3]{x}}-\frac{2}{\sqrt{x}}+C$;

5) $\frac{3}{8}(1+x)^{8/3}-\frac{6}{5}(1+x)^{5/3}+\frac{3}{2}(1+x)^{2/3}+\frac{6}{7}(1+x)^{7/6}+C$;

6) $\sqrt{2x+1}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{2x+1}+3\sqrt[6]{2x+1}-3\ln\left|\sqrt[6]{2x+1}+1\right|+C$; **7)** $\sqrt{2x+3}-5\ln\left|\sqrt{2x+3}+5\right|+C$;

8) $\frac{3}{2}x^{2/3}-\frac{18}{5}x^{5/6}+3x-\frac{6}{7}x^{7/6}+C$.

13.2 1) $-\frac{1}{10}\sqrt{\left(\frac{1}{x^4}+1\right)^5}+\frac{1}{3}\sqrt{\left(\frac{1}{x^4}+1\right)^3}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{x^4}+1}+C$ **; 2)** $\frac{12}{7}\left(1+x^{1/4}\right)^{7/3}-3\left(1+x^{1/4}\right)^{4/3}+C$ **;**

3) $6\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}+2\ln\left|\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}-1\right|-\ln\left|\sqrt[3]{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}+\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}+1\right|-2\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\frac{2\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}+1}{\sqrt{3}}+C.$

13.3 1) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{\sqrt{1-x^2}+1}\right|+C$ **; 2)** $\sqrt{x^2+4}+\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+4}+2}\right|+C$**; 3)** $\sqrt{x^2-1}-\mathrm{arctg}\sqrt{x^2-1}+C$;

4) $\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{x-\sqrt{x^2-4}}\right|+\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-4}+C$; **5)** $\frac{\left(1-x^2\right)^{5/2}}{5}-\frac{\left(1-x^2\right)^{3/2}}{3}+C$; **6)** $-\frac{1}{3}\left(\frac{1-x^2}{x^2}\right)^{3/2}+C$.

13.4 1) $2\sqrt{x+2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}}\right|+C$ **;**

2) $-\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2}+3\sqrt[3]{x+1}+6\sqrt[6]{x+1}-3\ln\left|\sqrt[3]{x+1}+1\right|-6\,\mathrm{arctg}\sqrt[6]{x+1}+C;$

3) $\frac{3}{2}x^{2/3}+6\,\mathrm{arctg}\sqrt[6]{x}+C$ **; 4)** $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+6\sqrt[6]{x}-6\,\mathrm{arctg}\sqrt[6]{x}+C$ **;**

5) $-\frac{1}{5}\sqrt{\left(\frac{1}{x^2}+1\right)^5}+\frac{1}{3}\sqrt{\left(\frac{1}{x^2}+1\right)^3}+C$ **; 6)** $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C$ **;**

7) $\frac{1}{3}\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}-\sqrt{1+x^2}+C$ **; 8)** $-\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}+\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}+C$ **.**

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Занятие 14. Вычисление определенных интегралов

Аудиторные задания

14.1 Вычислить определенные интегралы:

1) $\int_2^9 \sqrt[3]{x-1}\,dx$; **2)** $\int_0^3 \frac{x^2dx}{4+x^3}$; **3)** $\int_1^2 \frac{1}{x^3}e^{1/x^2}dx$; **4)** $\int_1^e \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}$; **5)** $\int_1^e \frac{\cos\ln x}{x}dx$;

6) $\int_0^{\pi/4}\sqrt{\cos x-\cos^3 x}\,dx$; **7)** $\int_0^2\sqrt{4-x^2}\,dx$; **8)** $\int_0^5 \frac{dx}{2x+\sqrt{3x+1}}$; **9)** $\int_4^9 \frac{y-1}{\sqrt{y}+2}dy$; **10)** $\int_0^9 \frac{\sqrt{x}\,dx}{1+\sqrt{x}}$;

11) $\int_1^e \ln x\,dx$; **12)** $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}$; **13)** $\int_0^\pi (2x+1)\cos x\,dx$; **14)** $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{dx}{1+\cos x}$; **15)** $\int_0^{\pi/2}\cos^5 x\sin 2x\,dx$;

16) $\int_0^{\pi/2} e^{2x}\cos x\,dx$; **17)** $\int_0^1 \operatorname{arctg} x\,dx$; **18)** $\int_2^3 \frac{7x-15}{x^3-2x^2+5x}dx$; **19)** $\int_0^1 \frac{t^5+1}{16-t^4}dt$; **20)** $\int_0^2 \frac{2x-1}{2x+1}dx$.

Домашние задания

14.2 Вычислить определенные интегралы:

1) $\int_0^{\pi/2} x\cos x\,dx$; **2)** $\int_1^e x\ln^2 x\,dx$; **3)** $\int_3^8 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x}}$; **4)** $\int_1^{e^3}\frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$; **5)** $\int_0^5 \frac{dx}{2x+\sqrt{3x+1}}$;

6) $\int_1^e \ln^3 x\,dx$; **7)** $\int_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{x\,dx}{\sin^2 x}$; **8)** $\int_{-2}^{2}\frac{3x^7-2x^5+x^3-x}{x^4+3x^2+1}dx$; **9)** $\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{3+2\cos x}$; **10)** $\int_0^{\pi/4}\frac{dx}{1+2\sin^2 x}$.

Ответы: 14.1 1) $\frac{45}{4}$; **2)** $\frac{1}{3}\ln\frac{31}{4}$; **3)** $\frac{e-e^{1/4}}{2}$; **4)** $\pi/4$; **5)** $\sin 1$; **6)** $-\frac{2}{3}\frac{\sqrt[4]{2}}{2}+1$; **7)** π; **8)** $\frac{4}{3}\ln\left(2/\sqrt[4]{7}\right)$; **9)** $2\left(\frac{13}{3}-6\ln\frac{5}{3}\right)$; **10)** $\int_0^9 2\left(\frac{3}{2}+\ln 4\right)$; **11)** 1; **12)** $\operatorname{arctg}3-\operatorname{arctg}2$; **13)** – 4; **14)** 2; **15)** 2/7; **16)** $\left(e^{\pi}-2\right)/5$; **17)** $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2$; **18)** $\int_2^3 -3\ln 3+\frac{3}{2}\ln 8-\frac{7\pi}{16}+6\ln 2-\frac{3}{2}\ln 5+\frac{7}{4}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$; **19)** $-\frac{1}{32}\left(31\ln 3-64\ln 2\right)-\ln\frac{4}{5}-\frac{1}{2}$; **20)** $2-\ln 5$. **14.2 1)** $\frac{\pi}{2}-1$; **2)** $\frac{1}{4}(e^2-1)$; **3)** $\frac{32}{3}$; **4)** 2; **5)** $\frac{1}{5}\ln 112$; **6)** $6-2e$; **7)** $\frac{\pi(9-4\sqrt{3})}{36}+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$; **8)** 0; **9)** $\frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{5}}$; **10)** $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

Занятие 15. Приложения определенных интегралов

Аудиторные задания

15.1 Найти площади криволинейных фигур, ограниченных линиями:

1) $y=\ln x,\quad x=e,\quad x=e^3,\quad y=0$; **2)** $y=x^2+2x,\quad y=x+2$; **3)** $y^2=x^3,\quad y=1,\quad x=0$;

4) $y=x^2-64x,\quad y=0$; **5)** $y^2=2px,\quad x^2=2py$; **6)** $x=a\cos^3 t,\quad y=a\sin^3 t$;

7) $x=2\cos t,\quad y=2\sin t$; **8)** $r=a\varphi,\quad 0\le\varphi\le 2\pi$; **9)** $r=a\cos\varphi$; **10)** $x^3+y^3-3axy=0$.

15.2 Найти длину дуги кривой:

1) $y^2=x^3,\quad x=5$; **2)** $y=\ln x,\quad \sqrt{3}\le x\le\sqrt{8}$; **3)** $y=\ln\cos x,\quad 0\le x\le\pi/4$;

4) $x=R\cos t,\ y=R\sin t.$; **5)** $x=a(2\cos t-\cos 2t),\ y=a(2\sin t-\sin 2t)$; **6)** $x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t$;

7) $r=a(1+\cos\varphi)$; **8)** $\rho=ae^{\varphi}$ в круге радиуса $r=a$; **9)** $x=t^2,\quad y=t-\dfrac{1}{3}t^3$.

15.3 Найти объем тела, полученного вращением криволинейной трапеции, ограниченной кривыми, около указанной оси:

1) $y^2=4x,\quad x=1,\quad Ox$; **2)** $y=\mathrm{e}^x, x=0, x=1, y=x;\quad Ox$; **3)** $y=x^2,\quad y^2=x,\quad Oy$;

4) $y=2x-x^2,\quad y=0,\quad Oy$; **5)** $x=a(t-\sin t),\quad y=a(1-\cos t),\quad Oy$.

Домашние задания

15.4 Найти площади криволинейных фигур, ограниченных линиями:

1) $y=\sin x,\quad y=\cos x,\quad y=0,\quad x\in\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$; **2)** $y=(x^2+2x)\mathrm{e}^{-x},\quad y=0$;

3) $x=3t^2,\quad y=3t-t^3$; **4)** $x=t^2-1,\quad y=t^3-1$; **5)** $r=a\sin 2\varphi$.

15.5 Найти длину дуги кривой:

1) $y=\ln(1-x^2),\quad x\in[0;1/2]$; **2)** $x=R(\cos t+t\sin t),\quad y=R(\sin t-t\cos t),\quad t\in[0,\pi]$;

3) $\rho=1/\varphi,\quad \varphi\in[3/4;4/3]$.

15.6 Найти объем тела вращения:

1) $x^2-y^2=a^2,\quad x=a+h\quad (h>0),\quad Ox$;

2) $y=\arcsin x,\quad x\in[0,1],\quad Ox$; **3)** $x=a\cos t,\quad y=a\sin 2t,\quad Ox$.

Ответы:

15.1 1) $2e^3$; **2)** 4,5; **3)** 3/5; **4)** 4/3; **5)** $\dfrac{4}{3}p^2$; **6)** $3\pi a^2/8$; **7)** 6π; **8)** $4/3\cdot\pi^3 a^2$; **9)** $\pi a^2/8$; **10)** $3a^2/2$.

15.2 1) $24\frac{27}{27}$; **2)** $1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$; **3)** $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}\right)$; **4)** $2\pi R$**; 5)** $16a$; **6)** 8a; **7)** $4\sqrt{2}a$; **8)** $a\sqrt{2}$ **;**

9) $4\sqrt{3}$. **15.3 1)** 2π; **2)** $\frac{\pi}{2}\left(e^2-1\right)$; **3)** 0,3π; **4)** 16π/15**; 5)** $6\pi^3a^3$. **15.4 1)** $2-\sqrt{2}$; **2)** $72\sqrt{3}/5$;

3) 8/15; **4)** $\frac{\pi a^2}{4}$**; 5)** $\frac{\pi a^2}{4}$. **15.5 1)** $\ln 3-\frac{1}{2}$; **2)** $\frac{\pi^2 R}{2}$; **3)** $\ln\frac{3}{2}+\frac{5}{12}$. **9.6 1)** $\frac{\pi h^2}{3}(3a+h)$;

2) $\pi\left(\frac{\pi^2}{4}-2\right)$; **3)** $\frac{8}{15}\pi a^3$.

Занятие 16. Несобственные интегралы

Аудиторные задания

16.1 Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

1) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}dx$; **2)** $\int\limits_{e}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}$; **3)** $\int\limits_{e}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^3 x}$; **4)** $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+6x+11}$; **5)** $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{4+x}}$; **6)** $\int\limits_{0}^{+\infty}x\cos x\,dx$;

7) $\int\limits_{1}^{3}\frac{dx}{(x-1)^2}$; **8)** $\int\limits_{-2}^{0}\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$; **9)** $\int\limits_{0}^{\pi/2}\frac{2x+1}{\sin^2 x}dx$; **10)** $\int\limits_{1}^{2}\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$; **11)** $\int\limits_{0}^{2/\pi}\frac{\cos 1/x}{x^2}dx$; **12)** $\int\limits_{0}^{2}\frac{x^3dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

16.2 Исследовать на сходимость интегралы:

1) $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{5x^2+4x+3}$; **2)** $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{4+\sin x}{\sqrt[3]{x}}dx$; **3)** $\int\limits_{2}^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}+\sin^2 x}$; **4)** $\int\limits_{0}^{3}\frac{\cos 1/x}{\sqrt[3]{x}}dx$; **5)** $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{\operatorname{tg}x-x}$; **6)** $\int\limits_{0}^{\pi/2}\frac{\ln\sin x}{\sqrt{x}}dx$.

Домашние задания

16.3 Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

1) $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{x\,dx}{x^2+1}$; **2)** $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}x}{1+x^2}dx$; **3)** $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{x\,dx}{(1+x)^2}$; **4)** $\int\limits_{1}^{2}\frac{x\,dx}{\sqrt{x-1}}$; **5)** $\int\limits_{0}^{1}x\ln x\,dx$; **6)** $\int\limits_{0}^{2}\frac{dx}{x^2-4x+3}$; **7)** $\int\limits_{-1}^{0}\frac{e^{-1/x}}{x^2}$.

Ответы: 16.1 1) 0; **2)** расходится; **3)** 1/2; **4)** $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$; **5)** расходится; **6)** расходится; **7)** расходится; **8)** $\pi/2$; **9)** расходится; **10)** $2\sqrt{\ln 2}$ **; 11)** расходится**; 12)** $\frac{16}{3}$.

16.2 1) сходится; **2)** расходится; **3)** расходится; **4)** сходится**; 5)** сходится; **6)** сходится.

16.3 1) расходится; **2)** $\frac{3\pi^2}{32}$; **3)** расходится; **4)** $\frac{8}{3}$**; 5)** $-\frac{1}{4}$; **6)** расходится; **7)** – *e*.

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Занятие 17. Двойной интеграл. Его вычисление в декартовой системе координат

Аудиторные задания

17.1 Расставить пределы интегрирования в повторных интегралах по указанным областям D:

1) $D: y=x,\ y=0,\ x=2$; **2)** $D: y=1,\ y=4,\ y=2x,\ y=5-3x$; **3)** $D: y=1/x,\ y=4,\ x=5$.

17.2 Изменить порядок интегрирования в повторных интегралах:

1) $\int\limits_1^4 dy \int\limits_{y-1}^{3y-3} f(x,y)\,dx$; **2)** $\int\limits_{-1}^{2} dx \int\limits_{2+x}^{5-(x-1)^2} f(x,y)\,dy$; **3)** $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2/9}^{x} f(x,y)\,dy + \int\limits_1^3 dx \int\limits_{x^2/9}^{1} f(x,y)\,dy$.

17.3 Вычислить повторные интегралы:

1) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_x^3 (x+y)\,dy$; **2)** $\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \cos(x+y)\,dy$; **3)** $\int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{5-y} (x+3y)\,dx$.

17.4 Вычислить двойной интеграл по областям, ограниченным указанными линиями:

1) $\iint\limits_{(D)} x^4 y\,dxdy,\quad D: xy=1,\ y-x=0,\ x=2$;

2) $\iint\limits_{(D)} x\,dxdy,\quad D: x=\dfrac{6}{y},\ y=7-x$;

3) $\iint\limits_{(D)} (x+2y)\,dxdy,\quad D: y-4x-6=0,\ x-2y-2=0,\ x=-1$;

4) $\iint\limits_{(D)} (x+2y)\,dxdy$, D – треугольник ABC, $A(3,4), B(6,2),\ C\left(3,\dfrac{1}{2}\right)$;

5) $\iint\limits_{(D)} \left(x^2+y^2\right)dxdy$, D – треугольник ABC, $A(0,0), B\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right),\ C\left(\sqrt{2},\sqrt{6}\right)$;

6) $\iint\limits_{(D)} (2y+x)\,dxdy$, D – параллелограмм $ABCD$, $A(-1,2), B(3,4),\ C\left(3,\dfrac{1}{2}\right), D\left(-1,-\dfrac{3}{2}\right)$;

7) $\iint\limits_{(D)} \left(xy^2+1\right)dxdy,\quad D: 0\le x\le 2,\ \dfrac{x}{2}\le y\le \sqrt{\dfrac{x}{2}}$;

8) $\iint\limits_{(D)} (\sin x-2y)\,dxdy,\quad D: y=x^2,\ y=2+x^2,\ x=0,\ x=\dfrac{\pi}{2}$;

9) $\iint\limits_{(D)} \left(x^3+y^3\right)dxdy,\quad D: y=\dfrac{x}{2},\ y=x,\ x=4$;

10) $\iint\limits_{(D)} e^{x+y}dxdy$, D – треугольник ABC, $A(-7,-6), B(5,3), C(0,0)$;

11) $\iint\limits_{(D)} xy^2dxdy, \quad D: x^2+y^2 \le 4, x+y \ge 2$;

12) $\iint\limits_{(D)} \left(4y^2\sqrt[3]{x}+\cos y\right)dxdy, \quad D: -2 \le x \le 1, -1 \le y \le 2$.

Домашние задания

17.5 Изменить порядок интегрирования в повторных интегралах:

1) $\int\limits_0^4 dx \int\limits_{4-x/2}^{-x/4+4} f(x,y)\,dy + \int\limits_4^6 dx \int\limits_{4-x/2}^{7-x} f(x,y)\,dy$; **2)** $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{2x}^{6-x} f(x,y)\,dy$.

17.6 Вычислить двойные интегралы по заданным областям:

1) $\iint\limits_D \left(x^2+y\right)dxdy, \ D: \Delta ABC, A(1,1), B(3,4), C(5,2)$; **2)** $\iint\limits_D xydxdy, \ D: y^2=4x, y=x-1$;

3) $\iint\limits_D \frac{x^2}{y}dxdy, \ D: y=\frac{5}{x}, y=4-x$; **4)** $\iint\limits_D \left(x^2+5xy-6\right)dxdy, \ D: y=x, y=0, y=4$;

5) $\iint\limits_D \sin(2x+y)\,dxdy, \ D: x=0, y=\frac{\pi}{2}, y=x$;

6) $\iint\limits_D (x+2y)\,dxdy, \ D: x=-1, x=3, y=\frac{1}{2}x-1, y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$;

7) $\iint\limits_D (4-y)\,dxdy, \ D: y=\frac{x^2}{4}, y=1, x=0$; **8)** $\iint\limits_D y\ln x\,dxdy, \ D: y=\frac{1}{x}, y=\sqrt{x}, x=2$.

Ответы: 17.3 1) 11/2; **2)** – 2; **3)** – 25/6. **17.4 1)** $7\frac{19}{21}$; **2)** $20\frac{5}{6}$; **3)** $-4\frac{1}{12}$; **4)** $43\frac{3}{4}$; **5)** $2\sqrt{3}-\frac{4}{3}$; **6)** $45\frac{1}{2}$; **7)** $\frac{47}{105}$; **8)** $2-2\pi-\frac{\pi^3}{6}$; **9)** $\frac{752}{5}$; **10)** $\frac{3e^8}{56}+\frac{3}{e^{13}\cdot 91}-\frac{9}{104}$; **11)** $\frac{8}{5}$; **12)** $9-18\sqrt[3]{2}+3\sin 2+3\sin 1$. **17.6 1)** $176\frac{2}{3}$; **2)** 48; **3)** $-6\ln 3$; **4)** 848; **5)** $\frac{2}{3}$; **6)** 49; **7)** $\frac{68}{15}$; **8)** $\frac{5\ln 2}{4}-\frac{5}{8}$.

Занятие 18. Замена переменных в двойном интеграле

Аудиторные задания

18.1 С помощью надлежащей замены переменных вычислить двойные интегралы:

1) $\iint\limits_{(D)} \frac{dxdy}{(x+y+1)^2}, \quad D: x+y=1, x-y=-1, x+y=5, x-y=4$;

2) $\iint\limits_{(D)} \frac{dxdy}{(x+y)^3}$, D – трапеция $ABCD$, $A(1,3)$, $B(2,6)$, $C(6,2)$, $D(3,1)$;

3) $\iint\limits_{(D)} x^2 dxdy, \quad D: x^2+y^2=4, x \ge 0, y \ge 0$;

4) $\iint\limits_{(D)} \sqrt{x^2+y^2}\, dxdy, \quad D: \frac{\pi^2}{4} \le x^2+y^2 \le 4\pi^2$;

5) $\iint\limits_{(D)} \frac{dxdy}{\sqrt{25-x^2-y^2}}, \quad D: x^2+y^2 \le 16$;

6) $\iint\limits_{(D)} \left(x^4+y^4+2x^2y^2\right) dxdy, \quad D: 1 \le x^2+y^2 \le 4$;

7) $\iint\limits_{(D)} \sin\pi\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\right) dxdy, \quad D: \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1, \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{36}=1$;

8) $\iint\limits_{(D)} y^2\sqrt{R^2-x^2}\, dxdy, \quad D: x^2+y^2=R^2$;

9) $\iint\limits_{(D)} \left(x^2+y^2\right) \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\, dxdy, \quad D: x^2+y^2=6$; **10)** $\iint\limits_{(D)} \frac{x^2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} dxdy, \quad D: 1 \le x^2+y^2 \le 2$.

Домашние задания

18.2 С помощью замены переменных вычислить двойные интегралы:

1) $\iint\limits_{D} \frac{dxdy}{(x+y)^3}$, где область D ограничена линиями: $y=3x, \quad y=\frac{1}{3}x, \quad y=8-x, \quad y=4-x$;

2) $\iint\limits_{D} (x+y)^3\, dxdy$, где область D ограничена линиями: $x+y=1, x+y=5, y=2x, y=4x$;

3) $\iint\limits_{D} \frac{dxdy}{(x+y)^4}$, где область D ограничена линиями: $x+y=2, x+y=1, y-3x=0, y-4x=0$;

4) $\iint\limits_{D} (x^2-y^2)\sin\pi(x-y)^2\, dxdy$, где область D ограничена линиями: $x+y=2, x+y=4$, $x-y=-1, x-y=2$;

5) $\iint\limits_D e^{x^2+y^2}\,dxdy$, где область D ограничена линиями: $x^2+y^2=1,\quad x^2+y^2=4$;

6) $\iint\limits_D xydxdy$, где область D ограничена линиями: $y=-x,\quad y=\sqrt{3}x,\quad x^2+y^2=4x,$ $x^2+y^2=9x$;

7) $\iint\limits_D \sin\pi\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\right)dxdy$, где область D ограничена эллипсами: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1,\ \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{36}=1$;

8) $\iint\limits_D (x^2-y^2)dxdy$, где область D ограничена лемнискатой $\left(x^2+y^2\right)^2=4\left(x^2-y^2\right)$.

Ответы: 18.1 1) $5/6$; **2)** $1/16$; **3)** π; **4)** $2\pi-\pi^2$; **5)** 4π; **6)** 21π; **7)** -12; **8)** $\frac{32R^5}{45}$; **9)** $18\pi^2$; **10)** $\frac{\pi}{8}$. **18.2 1)** $\frac{1}{16}$; **2)** $83\frac{23}{75}$; **3)** $\frac{3}{160}$; **4)** $-3/\pi$; **5)** $\pi e(e^3-1)$; **6)** 28,73; **7)** – 12; **8)** $16/3$.

Занятие 19. Приложения двойного интеграла

Аудиторные задания

19.1 Вычислить с помощью двойного интеграла площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $y^2=4x,\quad y=x-3$; **2)** $x+y-7=0,\quad xy=6$; **3)** $xy=4,\quad xy=6,\quad y=2x^2,\quad y=3x^2$;

4) $x^2+y^2=2Rx,\quad x^2+y^2=Rx$; **5)** $x^2+y^2=-2y,\quad y=-x,\quad y=-1$;

6) $\left(x^2+y^2\right)^2=8\left(x^2-y^2\right)$; **7)** $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1,\quad \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$.

19.2 Вычислить с помощью двойного интеграла объем тела, ограниченного указанными поверхностями:

1) $z=x^2+y^2+4$;

2) $z=xy,\quad y^2=2x,\quad y^2=4x,\quad y=\frac{1}{2}x,\quad y=x$;

3) $x+2y-z=0, x-2y-2=0, x-2y+5=0, x=-1, x=3, z=0$;

4) $z=25-x^2-y^2,\quad x=\pm2,\quad y=\pm3,\quad z=0$;

5) $x^2+y^2-z=0,\quad x=2,\quad y=3,\quad x=0,\quad y=0$;

6) $x^2+y^2+z^2=R^2$;

7) $x^2+y^2-az=0,\quad \left(x^2+y^2\right)^3=a^2\left(x^2+y^2\right),\quad z=0,\quad a>0$;

8) $z=x^2+y^2, x=y, \sqrt{3}x=y, x^2+y^2=8$; **9)** $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

19.3 Найти массу пластинки, имеющей плотность $\gamma=\gamma(x,y)$ и ограниченной линиями:

1) $x^2+y^2=4, x^2+y^2=16, x\ge 0, y\ge 0, \gamma(x,y)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

2) $\left(x^2+y^2\right)^2=9\left(x^2-y^2\right),\quad x\ge 0,\quad y\ge 0,\quad \gamma(x,y)=x^2+y^2$;

3) $x+y=1,\quad x+y=2,\quad y=2x,\quad y=4x,\quad \gamma(x,y)=(x+y)^2$;

4) $\left(x^2+y^2\right)^2=8xy$, если поверхностная плотность пластинки в каждой точке равна квадрату расстояния от этой точки до начала координат.

19.4 Найти статические моменты относительно осей координат, центр тяжести и моменты инерции однородной пластинки, ограниченной указанными линиями:

1) $x-3y=0,\quad x+y=8,\quad x=3$;

2) $x+y=4,\quad x-3y=0,\quad x+5y-16=0$;

3) $y^3=x^2,\quad y=2-x^2$; **4)** $x^2+y^2\le x$; 5) $r=1+\cos\varphi$.

Домашние задания

19.5 Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $y^2=4ax,\quad y=3a-x,\quad (a>0,\quad y\ge 0)$;

2) $x+y=4,\quad x-3y=0,\quad x+y=8,\quad 3x-y=0$;

3) $4y=x^2-4,\quad 2y=4-x^2\,4$; **4)** $\left(x^2+y^2\right)^2=2a^2xy,\quad x^2+y^2=a^2$.

19.6 С помощью двойного интеграла вычислить объем тела, ограниченного указанными поверхностями:

1) $x^2+y^2+z^2=16$; **2)** $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{16}=1$.

19.7 Найти массу пластинки, ограниченной линиями:

$x+y=1, x+y=3, 2x-y=0, 5x-y=0, \gamma(x,y)=\dfrac{1}{(x+y)^3}$.

Ответы: 19.1 1) $\frac{63}{4}$; **2)** $17{,}5-6\ln 6$; **3)** $-\frac{2}{3}\ln\frac{3}{2}$; **4)** $\frac{3\pi R^2}{4}$; **5)** $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$; **6)** 8; **7)** 6π. **19.2 1)** 4,5 π; **2)** 630; **3)** 49; **4)** 496; **5)** 26; **6)** $\frac{4\pi R^3}{3}$; **7)** $\frac{a}{2}$; **8)** $\frac{4\pi}{3}$; **9)** $\frac{4\pi abc}{3}$. **19.3 1)** 6; **2)** $\frac{81\pi}{32}$; **3)** $\frac{1}{2}$; **4)** 2π. **19.4 1)** $C\left(4,\frac{8}{3}\right)$ – центр тяжести; **2)** $C\left(\frac{10}{3},2\right)$; **3)** $C\left(0,\frac{8}{7}\right)$; **4)** $J_x=\frac{\pi}{64}$; **5)** $C\left(\frac{5}{6},0\right)$. **19.5 1)** $\frac{10a^2}{3}$; **2)** 12; **3)** 8; **4)** $a^2/\pi-1$. **19.6 1)** $\frac{256\pi}{3}$; **2)** $\frac{96\pi}{3}$. **19.7** 1/9.

Занятие 20. Тройной интеграл и его вычисление в декартовой системе координат

Аудиторные задания

20.1 Расставить пределы интегрирования в тройном интеграле по указанной области:

1) $V:\quad 2x+3y+4z-24=0,\ x=0,\ y=0,\ z=0$; **2)** $V:\quad x+y+z=4,\ x=0,\ y=0,\ z=0$;

3) $V:\quad x^2+z^2=4,\ y=0,\ y=2$; **4)** $V:\quad x^2+z^2=z^2,\ z=4$;

5) $V:\quad x=c-y^2-z^2,\ x=a,\ c>a>0$; **6)** $V:\quad x^2+z^2+z^2\le 4x$.

20.2 Вычислить повторные интегралы:

1) $\int\limits_0^1 dx\int\limits_2^0 dy\int\limits_0^3\left(x^2+y^2+z\right)dz$; **2)** $\int\limits_{-1}^0 dx\int\limits_{-1-x}^0 dy\int\limits_{1-x-y}^0\frac{dz}{(4x+3y+z+2)^5}$;

3) $\int\limits_0^3 dz\int\limits_{-\sqrt{2-\frac{z}{3}}}^{\sqrt{2-\frac{z}{3}}}dx\int\limits_{2x^2}^{4-\frac{2z}{3}}dy$; **4)** $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^2 dy\int\limits_{2x^2}^{3-x^2}xy^2dz$.

20.3 Вычислить тройные интегралы:

1) $\iiint\limits_V\left(z^2+x^2+y^2\right)dxdydz\qquad V:\quad 0\le x\le a,\ 0\le y\le b,\ 0\le z\le c$**;**

2) $\iiint\limits_V\frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}\qquad V:\quad x+y+z=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0$**;**

3) $\iiint\limits_V z\,dxdydz\qquad V:\quad 0\le x\le\frac{1}{2},\ x\le y\le 2x,\ 0\le z\le\sqrt{1-x^2-y^2}$**;**

4) $\iiint\limits_V z\,dxdydz\qquad V:\quad \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}+z^2\le 1,\ z\ge 0$**;**

5) $\iiint\limits_V(6x+8y+4z+5)dxdydz\qquad V:\quad 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1,\ 0\le z\le 1$**;**

6) $\iiint\limits_V \left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz \quad V: \quad y^2+z^2=b^2,\ x=0,\ x=a$;

7) $\iiint\limits_V \left(x^2+y^2+z^2\right)^3 dxdydz \quad V: \quad x^2+z^2=1,\ y=0,\ y=1$;

8) $\iiint\limits_V (1-2y)dxdydz \quad V: \quad z=y^2,\ z+2x=6,\ x=0,\ z=4$;

9) $\iiint\limits_V (4x-y+z)dxdydz \ V: z=2-x^2,\ x+y=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0$;

10) $\iiint\limits_V dxdydz \quad V: \quad y=2x^2,\ z=0,\ z=3,\ 3y+2z=12$;

11) $\iiint\limits_V xz^2\, dxdydz \ V: y=0,\ y=2,\ x=2,\ x=\sqrt{2y-y^2},\ z=0, z=3.$

Домашние задания

20.4 Вычислить повторные интегралы:

1) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{x}} dy \int\limits_{1-x}^{2-2x} ydz$; **2)** $\int\limits_0^1 dz \int\limits_0^2 dy \int\limits_0^4 \left(x^2+y^2+z^2\right)dx$.

20.5 Вычислить тройные интегралы по областям, ограниченным указанными поверхностями:

1) $\iiint\limits_V xy^2z^3\, dxdydz \ V: \quad z=xy,\ y=x,\ x=1,\ z=0$;

2) $\iiint\limits_V xdxdydz \quad V: \quad x+z=a,\ y=h,\ x=0,\ y=0,\ z=0$;

3) $\iiint\limits_V xydxdydz \ V: x^2+y^2=1,\ z=0,\ z=1,\ x=0,\ y=0\ (x\ge 0,\ y\ge 0)$;

4) $\iiint\limits_V yzdxdydz \quad V: \quad x^2+y^2+z^2=1,\ z=0$;

5) $\iiint\limits_V xdxdydz \quad V: \quad z=x^2+y^2,\ x+y=a,\ x=0,\ y=0,\ z=0$;

6) $\iiint\limits_V xydxdydz \quad V: \quad z=xy,\ x+y=1,\ z=0\ (z\ge 0)$;

7) $\iiint\limits_V ydxdydz \quad V: \quad x+2z=3,\ y=1,\ y=3,\ x=0,\ z=0$;

8) $\iiint\limits_V zdxdydz \quad V: \quad x+2z=3,\ x=0,\ z=0$;

9) $\iiint\limits_V \dfrac{dxdydz}{(4x+3y+z-2)^3} \ V: \quad x+y+z=4,\ x=0,\ y=0,\ z=0.$

Ответы: 20.2 1) 18,5; **2)** 0; **3)** $\frac{16\left(4\sqrt{2}-1\right)}{5}$; **4)** $\frac{16}{5}$. **20.3 1)** $abc(a+b+c)$; **2)** $\frac{1}{2}\left(\ln 2-\frac{5}{8}\right)$; **3)** $\frac{7}{192}$; **4)** 3π; **5)** 11; **6)** $\pi ab^2\left(\frac{a^2}{3}+\frac{b^2}{2}\right)$; **7)** $431\pi/420$; **8)** $\frac{64}{5}$; **9)** $\frac{6}{35}$; **10)** $\frac{16\left(4\sqrt{2}-1\right)}{5}$; **11)** 30. **20.4. 1)** $\frac{1}{12}$; **2)** 56. **20.5 1)** $\frac{1}{364}$; **2)** a^3h/b; **3)** $\frac{1}{8}$; **4)** 0; **5)** $a^5/15$; **6)** $\frac{1}{180}$; **7)** 9; **8)** $\frac{9}{4}$; **9)** $\frac{1}{24}\ln 14-\frac{1}{12}\ln 10+\frac{1}{24}\ln 2$.

Занятие 21. Замена переменных в тройном интеграле

Аудиторные задания

21.1 Вычислить тройной интеграл, переходя к цилиндрическим координатам:

1) $\iiint\limits_V \left(x^2+y^2+z\right)^4 dxdydz \qquad V:\ z=x^2+y^2,\ z=c\ (c>0)$;

2) $\iiint\limits_V x^2y^2(1-2z)dxdydz \qquad V:\ x^2+y^2=1,\ z=x^2+y^2,\ z=0$;

3) $\iiint\limits_V (5x-3z)dxdydz \qquad V:\ x^2+y^2=1,\ 2x-3y+z=0,\ z=4$;

4) $\iiint\limits_V \left(R^2-x^2-y^2\right)^4 dxdydz \qquad V:\ x^2+y^2=2Ry,\ x^2+y^2=4Ry,\ z=0,\ z=4$;

5) $\iiint\limits_V \left(x^2+z^2\right)dxdydz \qquad V:\ 2y=x^2+z^2,\ y=2$;

6) $\iiint\limits_V (x+y+z)^2 dxdydz \qquad V:\ 2Rz=x^2+y^2,\ z=\sqrt{3R^2-x^2-y^2}$;

7) $\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}\, dxdydz \qquad V:\ x^2+y^2=2x,\ y=0,\ z=0,\ z=a$;

8) $\iiint\limits_V x^2y^2\, dxdydz \qquad V:\ x^2+y^2\le 1,\ z\le x^2+y^2,\ z\ge 0$;

9) $\iiint\limits_V \left(x^2+y^2+z^2\right)^3 dxdydz \qquad V:\ x^2+y^2=1,\ y=0,\ y=1$.

21.2 Вычислить тройной интеграл, переходя к сферическим координатам:

1) $\iiint\limits_V \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^3 dxdydz \qquad V:\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$;

2) $\iiint\limits_V \sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}\, dxdydz \qquad V:\ x^2+y^2+z^2\le R^2,\ z\ge 0$;

3) $\iiint\limits_V \left(x^2+y^2+z^2\right)^n dxdydz$ $\qquad V: \quad x^2+y^2+z^2 \le R^2$;

4) $\iiint\limits_V \left(x^2+y^2+z^2\right)^3 dxdydz$ $\qquad V: \quad x^2+y^2+z^2 \le 1$;

5) $\iiint\limits_V \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^n dxdydz$ $\qquad V: \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$;

6) $\iiint\limits_V \left(3z^2-x^2-y^2\right)^3 dxdydz$ $\qquad V: \quad x^2+y^2+z^2=4$;

7) $\iiint\limits_V \left(3z^2-x^2-y^2\right) dxdydz$ $\qquad V: \quad x^2+y^2+z^2=2Rz$;

8) $\iiint\limits_V dxdydz$ $\qquad V: \quad x^2+y^2+4z^2=1$.

Домашние задания

21.3 Вычислить тройной интеграл, переходя к цилиндрическим координатам:

1) $\iiint\limits_V z\,dxdydz$ $\qquad V: \quad z^2=x^2+y^2,\ z=0$;

2) $\iiint\limits_V \frac{xydxdydz}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}}$ $\qquad V: \quad z=x^2+y^2,\ y\ge 0,\ x\ge y,\ z=4$;

3) $\iiint\limits_V \left(x^2+y^2+z^2\right) dxdydz$ $\qquad V: \quad x^2+y^2=4,\ x=0,\ x=3$.

21.4 Вычислить тройной интеграл, переходя к сферическим координатам:

1) $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dxdydz$ $\qquad V: \quad x^2+y^2+z^2\le 9$;

2) $\iiint\limits_V \left(x^2+y^2+z^2\right)^3 dxdydz$ $\qquad V: \quad x^2+y^2+z^2\le 10,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0$;

3) $\iiint\limits_V xyz^2\, dxdydz$ $\qquad V: \quad x^2+y^2+z^2=1,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0$;

4) $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{x^2+y^2+z^2+1}$ $\qquad V: \quad x^2+y^2+z^2\le R^2,\ y=0\ (y\ge 0)$.

Ответы: 21.1 **1)** $\frac{31}{30}\pi c^6$; **2)** $\pi/160$; **3)** $\frac{-133\pi}{8}$; **4)** $-78R^4$; **5)** $16\pi/3$; **6)** $\pi R^5\left(108\sqrt{3}-97\right)/30$; **7)** $8a^2/9$; **8)** $\pi/32$; **9)** $\frac{431\pi}{420}$. **21.2** **1)** $\frac{4\pi}{9}abc$; **2)** $\frac{\pi R^6}{3}$; **3)** $\frac{4\pi}{2n+3}R^{2n+3}$; **4)** $928\pi/315$;

5) $\frac{4\pi abc}{2n+3}$; **6)** $\frac{128\pi}{15}$; **7)** $\frac{64\pi R^5}{15}$; **8)** $2\pi/3$. **21.3 1)** $a/4\pi$; **2)** $\frac{4}{3}$; **3)** 60π. **21.4 1)** 81π; **2)** $\frac{5000\sqrt{10}\pi}{9}$; **3)** $\frac{1}{105}$; **4)** $2\pi(R-\operatorname{arctg}R+1)$.

Занятие 22. Приложения тройного интеграла

Аудиторные задания

22.1 Вычислить с помощью тройного интеграла объем тела, ограниченного поверхностями:

1) $z=x^2+y^2, \quad z=2x^2+2y^2, \quad y=x^2, \quad y=x$; **2)** $z=\sqrt{x^2+y^2}, \quad z+x^2+y^2=2$;

3) $x^2+y^2=2z, \quad z=\sqrt{8-x^2-y^2}$; **4)** $x^2+y^2\geq 4, \quad 4z\leq 16-x^2-y^2, \quad z\geq 0$;

5) $x^2+y^2+z^2\leq R^2, \quad x^2+y^2\leq \frac{z^2}{3}$; **6)** $\left(x^2+y^2+z^2\right)^3=\left(x^2+y^2\right)^2$;

7) $\left(\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{5}\right)^2=xyz$; **8)** $z=y^2-x^2, z=0, y=0, y=2$; **9)** $y=x^2+z^2, \quad y=2$.

22.2 Вычислить массу тела с плотностью γ, ограниченного поверхностями:

1) $x=0, \quad y=0, \quad z=0, \quad x+y+z-2=0, \quad \gamma=x^2yz$;

2) $x^2+y^2+z^2\leq r^2, \quad z\geq 0, \quad \gamma=x^2+y^2$;

3) $9x^2+2y^2+18z^2=18, \quad \gamma=\left(x^2+y^2\right)\sqrt{x^2/2+y^2/9+z^2}$;

4) $z=x^2+10y^2, \quad z=20-x^2-10y^2$, γ в каждой точке равна квадрату расстояния от точки до оси OZ;

5) $by=x^2+z^2, \quad y=b, \quad \gamma=x^2+z^2$; **6)** $x^2+y^2=1, \quad z=0, \quad z=2, \quad \gamma=\left(x^2+y^2+z^2\right)^2$;

7) $x^2+z^2=y, \quad y=4, \quad \gamma=x^2+y^2+z$; **8)** $x^2+y^2+z^2=9, \quad \gamma=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$;

9) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1, \quad \gamma=\sqrt{\left(\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}\right)^3}$.

22.3 Определить координаты центра масс тела, если:

1) $\gamma=C-\text{const}, \quad z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$; **2)** $z=\sqrt{4-x^2-y^2}, \quad 4-4z=x^2+y^2, \quad \gamma=1$;

3) $4y=x^2+z^2, \quad y=4$; **4)** $x+y+z=4, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0, \quad \gamma=x+y+z$;

5) $x^2+y^2=9, \quad z=0, \quad z=3, \quad \gamma=x^2+y^2$; **6)** $x^2+y^2=4z, \quad z=0, \quad z=4, \quad \gamma=z+x^2+y^2$;

7) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{1}=1, \quad z=0, \quad \gamma=\text{const}$; **8)** $z^2-x^2-y^2=0, \quad z=2, \quad \gamma=\text{const}$.

22.4 Вычислить момент инерции:

1) прямого кругового цилиндра высотой $2h$ радиуса R относительно диаметра среднего сечения, $\gamma=\gamma_0$;

2) однородного тела относительно координатных плоскостей, координатных осей и начала координат, если $V: \quad z^2+y^2=4, \quad x=0, \quad x=2$;

3) $V: \quad x^2+y^2=z^2 \ (z\ge 0), \quad z=C \ (C>0)$.

Домашние задания

22.5 С помощью тройного интеграла найти объем тела, ограниченного поверхностями:

1) $x^2+y^2+z^2=4, \quad x^2+y^2+z^2=9, \quad x^2+z^2=y^2 \ (y\ge 0)$;

2) $x^2+y^2=10x, x^2+y^2=13x, z=\sqrt{x^2+y^2}, z=0, y\ge 0$;

3) $x^2+y^2=2x, \quad z=x^2+y^2, \quad z=0$.

22.6 Найти массу тела, ограниченного заданными поверхностями (плоскостями) с плотностью γ:

1) $x^2+y^2+z^2=16, \quad \gamma=k\sqrt{x^2+y^2+z^2}$;

2) $z=2-x^2-y^2, \quad z^2=x^2+y^2, \quad z\ge 0, \quad \gamma=1$.

22.7 Вычислить момент инерции:

1) круглого конуса относительно диаметра основания;

2) однородного тела, ограниченного указанными поверхностями, относительно координатных плоскостей, координатных осей и начала координат

$V: \quad 2x+3y=6, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0, \quad z=4$;

3) $V: \quad x+y+z=a \ (a>0), \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0$;

4) $V: \quad ax=y^2+z^2, \quad x=a$.

22.8 Вычислить координаты центра масс тела, ограниченного сферой радиуса a и конической поверхностью с углом при вершине 2α, если вершина конуса совпадает с центром сферы (ось конуса принята за ось Oz, вершина помещена в начале координат).

Ответы: 22.1 1) $\frac{3}{35}$; **2)** $5\pi/6$; **3)** $\frac{4}{3}\pi\left(8\sqrt{2}-7\right)$; **4)** 18π; **5)** $\frac{2}{3}\pi R^3\sqrt{3}$; **6)** $64\pi/105$; **7) 10**; **8)** $16/3$; **9)** 256π. **22.2 1)** $16/315$; **2)** $\frac{4}{15}\pi r^2$; **3)** $\frac{22\sqrt{2}}{3}\pi$; **4)** $55\pi/3$; **5)** $\frac{\pi b^5}{2}$; **6)** $\frac{16\pi}{3}$; **7)** 32π; **8)** 81π; **9)** 16π. **22.3 1)** $\left(0;0;\frac{3}{8}R\right)$; **2)** $\left(0;0;\frac{2}{5}\right)$; **3)** $(0;3;0)$; **4)** $\left(\frac{16}{5};\frac{16}{5};\frac{16}{5}\right)$; **5)** $\left(0;0;\frac{3}{2}\right)$; **6)** $(0;0;3)$; **7)** $\left(0;0;\frac{3}{8}\right)$; **8)** $\left(0;0;\frac{3}{2}\right)$.

22.4 1) $I_{ox}=\gamma_0\pi hR^2\left[\frac{2}{3}h^2+\frac{R^2}{2}\right]$; **2)** $I_{xy}=I_{xz}=\frac{8\pi}{3}, I_{yz}=\frac{32\pi}{3}, I_{ox}=32\pi, I_{oy}=I_{oz}=34\pi$;

3) $I_{xy}=\frac{\pi c^5}{5}, I_{xz}=I_{yz}=\frac{\pi c^5}{20}, I_{ox}=I_{oy}=\frac{\pi c^5}{4}, I_{oz}=\frac{\pi c^5}{10}, I_o=\frac{3\pi c^5}{10}$.

22.5 1) $\frac{19\sqrt{2}\pi}{6}$; **2)** 266; **3)** $3\pi/2$. **22.6 1)** $256k\pi$; **2)** $5\pi/6$. **22.7 1)** $\frac{\pi hr^2}{60}\left(2h^2+3r^2\right)$;

2) $I_{xy}=64, I_{xz}=8; I_{yz}=18, I_x=72, I_y=82, I_z=26, I_o=90$;

3) $I_{xy}=I_{xz}=I_{yz}=\frac{a^5}{60}, I_x=I_y=I_z=\frac{a^5}{30}, I_o=\frac{a^5}{20}$;

4) $I_{xy}=I_{xz}=\frac{\pi a^5}{12}, I_{yz}=\frac{\pi a^5}{4}, I_x=\frac{\pi a^5}{6}, I_y=I_z=\frac{\pi a^5}{3}$. **22.8** $x_c=0, y_c=0, z_c=\frac{3}{8}a(1+\cos\alpha)$.

Занятие 23. Криволинейные интегралы I рода

Аудиторные задания

23.1 Вычислить криволинейные интегралы по указанным кривым:

1) $\int\limits_L x\,dl$, где L – парабола $y=x^2$ $(1\le x\le 2)$.

2) $\int\limits_L \frac{dl}{x-y}$, где L – отрезок прямой $y=\frac{1}{2}x-2$, заключенный между точками $A(0;-2)$ и $B(4;0)$.

3) $\int\limits_L \frac{\sin^3 x}{1+\sin^2 x}dl$, где L – дуга косинусоиды $y=\cos x\left(0\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$.

4) $\int\limits_L \sqrt{2y}\,dl$, где L – первая арка циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $a>0$.

5) $\int\limits_L x^2y\,dl$, где L – часть окружности, лежащая в первом квадранте.

6) $\int\limits_L xyzdl$, где L – отрезок прямой между точками $A(1;0;1)$ и $B(2;2;3)$.

7) $\int\limits_L \frac{y}{x+3z}dl$, где L – дуга линии $x=t,\ y=\frac{t^2}{\sqrt{2}},\ z=\frac{t^3}{3}$ от $O(0;0;0)$ до $B\left(\sqrt{2};\sqrt{2};\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$.

8) $\int\limits_L dl$, где L – кардиоида $\rho=a(1-\cos\varphi)$.

9) $\int\limits_L (x+y)dl$, где L – дуга лемнискаты Бернулли $\rho^2=\cos\varphi,\ -\frac{\pi}{4}\le\varphi\le\frac{\pi}{4}$.

10) $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)^2 dl$, где L – дуга кривой $\rho=a\sqrt{\sin 2\varphi},\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$.

Домашние задания

23.2 Вычислить следующие криволинейные интегралы:

1) $\int\limits_L \frac{dl}{x+2y+5}$, где L – отрезок прямой $y=2x-2$, заключенный между точками $A(0;-2)$ и $B(1;0)$.

2) $\int\limits_L \frac{\cos^2 x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}dl$, где L – дуга синусоиды $y=\sin x\ (0\le x\le\pi)$.

3) $\int\limits_L \frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2+4}}$, где L – отрезок прямой, соединяющий точки $O(0;0)$ и $A(1;2)$.

4) $\int\limits_L \frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}$, где L – окружность $x=a\cos t,\ y=a\sin t$ (в положительном направлении).

5) $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\,dl$, где L – кривая $\begin{cases} x=a(\cos t+t\sin t), \\ y=a(\sin t-t\cos t), \end{cases}$ $(0\le t\le 2\pi)$.

6) $\int\limits_L \left(2z-\sqrt{x^2+y^2}\right)dl$, где L – первый виток конической винтовой линии $x=t\cos t,\ y=t\sin t,\ z=t,\ 0\le t\le 2\pi$.

7) $\int\limits_L xyzdl$, где L – дуга кривой: $x=\frac{1}{2}t^2,\ y=t,\ z=\frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{t^3},\ (0\le t\le 1)$.

8) $\int\limits_L xy^2dl$, где L – отрезок прямой между точками $O(0;0)$ и $A(4;3)$.

9) $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\,dl$, где L – верхняя половина кардиоиды $\rho=a(1+\cos\varphi)$.

10) $\int\limits_L (x+y)dl$, где L – лепесток лемнискаты $\rho=\sqrt{\sin 2\varphi}$, расположенной в I координатном углу.

Ответы: 23.1 1) $\frac{1}{24}\left(17\sqrt{17}-5\sqrt{5}\right)$; **2)** $\sqrt{5}\ln 2$; **3)** $\frac{2}{3}$; **4)** $4\pi a\sqrt{a}$; **5)** 27; **6)** 12; **7)** $\frac{1}{\sqrt{2}}$; **8)** $8a$; **9)** $\sqrt{2}$; **10)** $\frac{a^2\pi^3}{24}$. **23.2 1)** $\frac{\sqrt{5}}{5}\ln 6$; **2)** $\frac{\pi}{2}$; **3)** $\ln\frac{3+\sqrt{5}}{2}$; **4)** -2π; **5)** $\frac{a^2}{3}\left(\left(1+4\pi^2\right)^{\frac{3}{2}}-1\right)$; **6)** $\frac{2\sqrt{2}}{3}\left(\left(1+2\pi^2\right)^{\frac{3}{2}}-1\right)$; **7)** $\frac{16\sqrt{2}}{143}$; **8)** 45; **9)** $\frac{16a^2}{3}$; **10)** 2.

Занятие 24. Криволинейные интегралы II рода

Аудиторные задания

24.1 Вычислить криволинейные интегралы по указанным кривым:

1) $\int\limits_L (xy-1)dx+x^2ydy$ от точки $A(1;0)$ до точки $B(0;2)$ по прямой $2x+y=2$.

2) $\int\limits_L xdx+ydy+(x+y-1)dz$, где L – отрезок прямой, соединяющий точки $A(1;1;1)$ и $B(2;3;4)$.

3) $\int\limits_L (xy-1)dx+x^2ydy$, где L – дуга эллипса $x=\cos t,\ y=2\sin t$ от точки $A(1;0)$ до точки $B(0;2)$.

4) $\int\limits_L 2xydx+y^2dy+z^2dz$, где L – дуга одного витка винтовой линии $x=\cos t,\ y=\sin t,\ z=2t;\ A(1;0;0);\ B(1;0;4\pi)$.

24.2 Применяя формулу Грина, вычислить криволинейные интегралы:

1) $\oint\limits_L 2\left(x^2+y^2\right)dx+(x+y)^2dy$, где L – контур треугольника с вершинами в точках $A(1;1),\ B(2;2),\ C(1;3)$, пробегаемый против часовой стрелки.

2) $\oint\limits_L \frac{y}{x}dx+2\ln xdy$, где L –треугольник, сторонами которого являются прямые $y=4-2x;x=1;y=0$.

3) $\oint\limits_L -x^2ydx+xy^2dy$, где L – окружность $x^2+y^2=a^2$ (в положительном направлении).

24.3 Проверить зависимость интегралов от пути интегрирования:

1) $\int\limits_L \left(x+2x^3y^2-y^4\right)dx+\left(y^2-3x^2y^3+4xy\right)dy$. **2)** $\int\limits_L \left(4x^3-12x^2y\right)dx+\left(5y^4-4x^3\right)dy$.

3) $\int\limits_L \left(xy^3+x^2-2y^2\right)dx+\left(y^5-3x^3y^2+x^4\right)dy$.

Домашние задания

24.4 Вычислить следующие криволинейные интегралы по указанным кривым:

1) $\int\limits_L \left(x^2+y^2\right)dx+2xydy$, где L – дуга кубической параболы $y=x^3$, от точки $O(0;0)$ до точки $A(1;1)$.

2) $\int\limits_L (x+y)dx+(x-y)dy$, где L – дуга параболы $y=x^2$, лежащая между точками $A(-1;1)$ и $B(1;1)$.

3) $\int\limits_L xy^2dx+yz^2dy-x^2zdz$, где L – отрезок прямой OB, $O(0;0;0)$, $B(-2;4;5)$.

4) $\int\limits_L y^2dx+x^2dy$, где L – верхняя половина эллипса, пробегаемая по ходу часовой стрелки $x=a\cos t,\ y=b\sin t$.

24.5 Применяя формулу Грина, вычислить следующие криволинейные интегралы:

1) $\oint\limits_L \frac{1}{x}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}dx+\frac{2}{y}\operatorname{arctg}\frac{x}{y}dy$, где L – замкнутый контур, составленный дугами двух окружностей $x^2+y^2=1;\ x^2+y^2=4\ (y>0)$ и отрезками прямых $y=x$ и $y=\sqrt{3}x\ (y>0)$, заключенных между этими окружностями.

2) $\oint\limits_L y^2dx+(x+y)^2dy$, где L – контур треугольника ABC с вершинами $A(a;0),\ B(a;a),\ C(0;a)$.

3) $\oint\limits_L y(1-x)^2dx+\left(1+y^2\right)xdy$, где L – окружность $x^2+y^2=4$, пробегаемая в положительном направлении обхода.

24.6 Найти функцию z по ее полному дифференциалу:

1) $dz=\left(\frac{1}{y}-\frac{y}{x^2}\right)dx+\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{y^2}\right)dy$. **2)** $dz=\sin(x+y)(dx+dy)$. **3)** $e^{xy}\left((1+xy)dx+x^2dy\right)$.

Ответы: 24.1 1) 1; **2)** 13; **3)** $\frac{4}{3}$; **4)** $\frac{64\pi^3}{3}$. **24.2 1)** $-\frac{4}{3}$; **2)** $4\ln 2-2$; **3)** $\frac{\pi a^4}{2}$. **24.3 1)** зависит; **2)** не зависит; **3)** зависит. **24.4 1)** $\frac{4}{3}$; **2)** 2; **3)** 91; **4)** $\frac{4}{3}ab^2$. **24.5 1)** $\frac{\pi}{12}\ln 2$; **2)** $\frac{2}{3}a^3$; **3)** 8π. **24.6 1)** $z=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+C$; **2)** $z=-\cos(x+y)+C$; **3)** $z=xe^{xy}+C$.

Занятие 25. Приложения криволинейных интегралов

Аудиторные задания

25.1 Найти длины дуг кривых:

1) $y^2=x^3$ от точки $O(0;0)$ до $A(4;8)$.

2) первого витка винтовой линии $x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ z=bt$.

3) $\rho=a(1-\cos t)\varphi$.

25.2 Найти площади фигур, ограниченных линиями:

1) $x=a\cos t,\ y=a\sin t$. **2)** $x=a\cos^3 t,\ y=a\sin^3 t$ (астроида).

25.3 Найти массы следующих кривых:

1) $y=\ln x$, заключенной между точками с абсциссами $x=\sqrt{3}$ и $x=\sqrt{8}$, если плотность дуги в каждой точке равна квадрату абсциссы этой точки.

2) четверти эллипса $x=2\cos t,\ y=\sin t$, лежащей в первой четверти, если линейная плотность в каждой ее точке равна произведению координат этой точки.

25.4 Найти работу переменной силы $\vec{F}$ вдоль пути $\overset{\cup}{AB}$:

1) $\vec{F}=y\vec{i}+(x+y)\vec{j}$ при перемещении материальной точки из начала координат в точку $(1;1)$ по параболе $y=x^2$.

2) $\vec{F}=(x+y)\vec{i}-x\vec{j}$ при перемещении материальной точки вдоль окружности $x=2\cos t,\ y=2\sin t$ по ходу часовой стрелки.

25.5 Найти координаты центра тяжести дуги линии:

1) однородной дуги первого витка винтовой линии $x=\cos t,\ y=\sin t,\ z=2t$.

2) однородной дуги окружности $x^2+y^2=R^2$, расположенной в первой четверти.

Домашние задания

25.6 Найти длины дуг кривых:

1) $y=\frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3}$ от точки с абсциссой $x_1=1$ до точки с абсциссой $x_2=9$.

2) $x=\left(t^2-2\right)\sin t+2t\cos t,\ y=\left(2-t^2\right)\cos t+2t\sin t\ (0\le t\le\pi)$.

3) $x=a\cos^3 t,\ y=a\sin^3 t$ (астроида).

25.7 Найти площади фигур, ограниченных линиями:

1) $x=a\cos t,\ y=b\sin t$ (эллипс).

2) первой арки циклоиды $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)$ и осью Ox.

25.8 Найти массы следующих кривых:

1) одной арки циклоиды $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)$, если плотность в каждой точке кривой равна ординате точки.

2) $x=\frac{t^2}{2},\ y=t,\ z=\frac{t^3}{3},\ 0\le t\le 2$, если плотность в каждой ее точке $\gamma=\sqrt{1+4x^2+y^2}$.

25.9 Найти работу переменной силы $\vec{F}$ вдоль пути $\overset{\cup}{AB}$:

1) $\vec{F}=(x+y)\vec{i}+2x\vec{j}$ при перемещении материальной точки по окружности $x=a\cos t,\ y=a\sin t$.

2) $\vec{F}=4x^2\vec{i}+xy\vec{j}$ при перемещении материальной точки вдоль дуги $y=x^3$ от точки $O(0;0)$ до точки $C(1;1)$.

25.10 Найти координаты центра тяжести дуги линии:

1) винтовой линии $x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ z=bt$, линейная плотность в каждой точке пропорциональна аппликате этой точки; $t_A=0,\ t_B=\pi$.

2) плоской материальной дуги $y=\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}},\ 0\le x\le 1$, линейная плотность которой $\gamma(x,y)=y\sqrt{1+x}$.

Ответы: 25.1 1) $\frac{8}{27}\left(10\sqrt{10}-1\right)$; **2)** $2\pi\sqrt{a^2+b^2}$. **3)** $8a$. **25.2 1)** πa^2; **2)** $\frac{3a^2\pi}{8}$. **25.3 1)** $\frac{19}{3}$; **2)** $\frac{14}{9}$. **25.4 1)** $\frac{3}{2}$; **2)** 8π. **25.5 1)** $(0;0;2\pi)$; **2)** $x_C=y_C=\frac{2R}{\pi}$. **25.6 1)** $\frac{52}{3}$; **2)** $\frac{\pi^2}{3}$; **3)** $6a$. **25.7 1)** πab; **2)** $3\pi a^2$. **25.8 1)** $32a^2/3$; **2)** $166/15$. **25.9 1)** πa^2; **2)** $37/21$. **25.10 1)** $\left(-\frac{4a}{\pi^2};\frac{2a}{\pi};\frac{2}{3}b\pi\right)$; **2)** $x_C=\frac{10}{9};\ y_C=\frac{21}{32}$.

Занятие 26. Поверхностные интегралы I рода

Аудиторные задания

26.1 Вычислить поверхностные интегралы I рода по указанным поверхностям:

1) $\iint\limits_S xyzdS$, где S – часть плоскости $x+y+z=1$, лежащая в первом октанте.

2) $\iint\limits_S (3x-2y+6z)dS$, где S – часть плоскости $2x+y+2z=2$, отсеченная координатными плоскостями.

3) $\iint\limits_S \sqrt{x^2+y^2}\,dS$, где S – часть поверхности конуса $x^2+y^2=z^2$, $0\le z\le 1$.

4) $\iint\limits_S xdS$, где S – полусфера $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$.

5) $\iint\limits_S \left(x^2+y^2+z^2\right)dS$, где S – сфера $x^2+y^2+z^2=1$.

6) $\iint\limits_S \left(x^2+y^2\right)dS$, где S –поверхность, отсекаемая от параболоида $x^2+y^2=2z$ плоскостью $z=1$.

7) $\iint\limits_S (6x+4y+3z)dS$, где S – часть плоскости $x+2y+3z=6$, расположенная в первом октанте.

8) $\iint\limits_S \sqrt{x^2+y^2}\,dS$, где S – часть поверхности конуса $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{16}=\frac{z^2}{9}$, расположенная между плоскостями $z=0$ и $z=3$.

9) $\iint\limits_S xyzdS$, где S – часть поверхности параболоида $z=x^2+y^2$, отсекаемая плоскостью $z=1$.

Домашние задания

26.2 Найти поверхностные интегралы I рода по указанным поверхностям:

1) $\iint\limits_S \left(3x^2+3y^2+5z^2\right)dS$, где S – часть поверхности $z=\sqrt{x^2+y^2}$, отсеченная плоскостями $z=0$ и $z=1$.

2) $\iint\limits_S \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dS$, где S –поверхность конуса $z^2=x^2+y^2$, ограниченного плоскостями $z=0$ и $z=h$.

3) $\iint\limits_S z^2 dS$, где S – часть плоскости $x+y+z=1$, расположенной в первом октанте.

4) $\iint\limits_S (3x-y+z)dS$, где S – часть плоскости $x+z+-2y=2$, отсеченная координатными плоскостями.

5) $\iint\limits_S \left(x^2+y+z^2-4\right)dS$, где S – часть поверхности $2y=9-x^2-z^2$, отсеченная плоскостью $y=0\ (y>0)$.

6) $\iint\limits_S (x-3y+2z)dS$, где S – часть плоскости $4x+3y+2z-4=0$, расположенная в первом октанте.

7) $\iint\limits_S x(y+z)dS$, где S – часть цилиндрической поверхности $x=\sqrt{1-y^2}$, отсеченной плоскостями $z=0$ и $z=2$.

8) $\iint\limits_S \left(x^2+y^2+z^2\right)dS$, где S – сфера $x^2+y^2+z^2=1$.

Ответы: 26.1 1) $\dfrac{\sqrt{3}}{120}$; **2)** $\dfrac{5}{2}$; **3)** $\dfrac{2\sqrt{2}\pi}{3}$; **4)** 0; **5)** 4π; **6)** $\dfrac{24\sqrt{3}+4}{15}\pi$; **7)** $54\sqrt{14}$; **8)** $\dfrac{160\pi}{3}$; **9)** 0.

26.2 1) $4\sqrt{2}\pi$; **2)** $\dfrac{4}{3}\pi h^3$; **3)** $\dfrac{\sqrt{3}}{12}$; **4)** $3\sqrt{6}$; **5)** $\dfrac{\pi}{5}\left(10^{\frac{5}{2}}-1\right)$; **6)** $\dfrac{\sqrt{29}}{9}$; **7)** 4; **8)** 4π.

Занятие 27. Поверхностные интегралы II рода

Аудиторные задания

27.1 Вычислить интегралы по указанным поверхностям:

1) $\iint\limits_S y\,dxdz$, где S – верхняя сторона части плоскости $x+y+z=a$, лежащей в первом октанте.

2) $\iint\limits_S x\,dydz+y\,dxdz+z\,dxdy$, где S – верхняя часть поверхности $x+2y+z-6=0$, расположенная в первом октанте.

3) $\iint\limits_S \sqrt[4]{x^2+y^2}\,dxdy$, где S – верхняя сторона круга $x^2+y^2\le a^2$.

4) $\iint\limits_S \left(y^2+z^2\right)dxdy$, где S – верхняя сторона поверхности $z=\sqrt{a^2-x^2}$, отсеченная плоскостями $y=0,\ y=b$.

5) $\iint\limits_S x^2dydz + y^2dxdz + z^2dxdy$, где S – внешняя сторона части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, расположенной в первом октанте.

6) $\iint\limits_S x^2dydz + y^2dxdz + z^2dxdy$, где S – внешняя сторона поверхности конуса $z^2 + y^2 = \dfrac{R^2}{3}x^2; 0 \le x \le \sqrt{3}$.

27.2 Применяя формулу Остроградского, вычислить:

1) $\iint\limits_S xdydz + ydxdz + zdxdy$, где S – положительная сторона куба, составленного плоскостями $x = 0, y = 0, z = 0, x = 1, y = 1, z = 1$.

2) $\iint\limits_S xdydz + ydxdz + zdxdy$, где S – внешняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

3) $\iint\limits_S ydxdz$, где S – поверхность тетраэдра, ограниченного плоскостями $x + y + z = 1, x = 0, y = 0, z = 0$.

4) $\iint\limits_S xdydz + ydxdz + zdxdy$, где S – внешняя сторона цилиндра $x^2 + y^2 = 4$ с основаниями $z = 0$ и $z = 3$.

Домашние задания

27.3 Вычислить интегралы по указанным поверхностям:

1) $\iint\limits_S xdydz + ydxdz + zdxdy$ по верхней поверхности части плоскости $x + y + z = a$, лежащей в первом октанте.

2) $\iint\limits_S zdxdy + xdxdz + ydydz$, где S – внешняя сторона треугольника, образованного пересечением плоскости $x - y + z = 1$ и координатными плоскостями.

3) $\iint\limits_S \left(x^2 + z^2\right)dydz$, где S – верхняя сторона поверхности $x = \sqrt{9 - y^2}$, отсеченной плоскостями $z = 0, z = 2$.

27.4 Вычислить непосредственно, результат проверить по формуле Остроградского:

1) $\iint\limits_S xdydz + ydxdz + zdxdy$, где S – внешняя сторона цилиндра $x^2 + y^2 = R^2$ с основаниями $z = 0$ и $z = H$.

2) $\iint\limits_S xdydz + ydxdz + zdxdy$, где S – положительная сторона поверхности куба, ограниченного плоскостями $x = 0, y = 0, z = 0$, $x = 4, y = 4, z = 4$.

27.5 Применяя формулу Остроградского, вычислить:

1) $\iint\limits_S xdydz + ydxdz + zdxdy$, где S – положительная сторона поверхности, ограниченной плоскостями $x = 0, y = 0, z = 0$, $x + y + 2z = 1$.

2) $\iint\limits_S (x+y)dydz + (y-z)dxdz + zdxdy$ через поверхность шара $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

3) $\iint\limits_S x^2dydz + y^2dxdz + z^2dxdy$, где S – внешняя сторона куба $0 \le x \le a; 0 \le y \le a; 0 \le z \le a$.

4) $\iint\limits_S xdydz + ydxdz + zdxdy$, где S – внешняя сторона поверхности пирамиды, ограниченной плоскостями $x = 0, y = 0, z = 0$, $2x + 3y + 4z = 12$.

5) $\iint\limits_S x^3dydz + y^3dxdz + z^3dxdy$, где S – внешняя сторона поверхности сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Ответы: 27.1 1) $\frac{a^3}{6}$; **2)** 54; **3)** $\frac{4}{5}\pi\sqrt{a^5}$; **4)** $\frac{2ab}{3}\left(b^2 + 2a^2\right)$; **5)** $\frac{3}{8}\pi R^4$; **6)** $\frac{3\pi R^2}{2} + \frac{2R^3}{\sqrt{3}}$.

27.2 1) 1; **2)** 4π; **3)** $\frac{1}{6}$; **4) 36π. 27.3 1)** $\frac{a^3}{2}$; **2)** $-\frac{1}{6}$; **3)** 88. **27.4 1)** $3\pi R^2H$; **2)** 192. **27.5 1)** $\frac{1}{4}$; **2)** 4π; **3)** $3a^4$; **4)** 36; **5)** $\frac{12}{5}\pi a^5$.

Занятие 28. Приложения интегралов по поверхности

Аудиторные задания

28.1 Вычислить площадь поверхности той части плоскости $x + 2y + z = 4$, которая расположена в первом октанте.

28.2 Найти площадь поверхности части конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, заключенного внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 2x$.

28.3 Найти площадь поверхности $z = 2 - \frac{x^2 + y^2}{2}$, расположенной над плоскостью xOy.

28.4 Найти площадь части поверхности $y = x^2 + z^2$, вырезанной цилиндром $z^2 + x^2 = 1$ и расположенной в первом октанте.

28.5 Вычислить массу поверхности $z = x$, ограниченной плоскостями $x + y = 1;\ y = 0;\ x = 0$, если поверхностная плотность в каждой точке равна абсциссе этой точки.

28.6 Найти массу полусферы $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, если поверхностная плотность в каждой ее точке равна z^2.

28.7 Вычислить массу поверхности $z^2 = x^2 + y^2$, заключенной между плоскостями $z = 0;\ z = 1$, если поверхностная плотность пропорциональна $x^2 + y^2$.

28.8 Найти координаты центра тяжести однородной треугольной пластинки $x + y + z = 1(x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0)$.

28.9 Найти момент инерции относительно оси *OX* кругового цилиндра, высота которого *h* и радиус основания *a*.

Домашние задания

28.10 Найти площадь части поверхности $2x + 2y + z = 8$, заключенной внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 1$.

28.11 Найти площадь части поверхности $2x + y + z = 4$, которая расположена в первом октанте.

28.12 Определить суммарный электрический заряд, распределенный на части поверхности двуполостного гиперболоида $z^2 = x^2 + y^2 + 1,\ 1 \leq z \leq \sqrt{2}$, если плотность заряда в каждой точке пропорциональна аппликате этой точки ($\delta = kz$).

28.13 Вычислить поток вектора $\vec{a} = (x + y)\vec{i} + (y - x)\vec{j} + z\vec{k}$ через поверхность шара единичного радиуса с центром в начале координат.

28.14 Найти массу полусферы $x = \sqrt{R^2 - y^2 - z^2}$, если поверхностная плотность в каждой точке пропорциональна квадрату расстояния этой точки до начала координат.

28.15 Найти массу полусферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2\ (z \geq 0)$, если поверхностная плотность в каждой точке $\gamma = \sqrt{x^2 + y^2}$.

28.16 Найти массу, координаты центра тяжести и моменты инерции относительно осей и начала координат пластинки $D = \{y \geq x^2,\ y \leq 1\}$, если плотность $\gamma(x, y) = x^2 y$.

28.17 Найти массу, центр тяжести однородного полушара $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ z \geq 0$ (плотность $\gamma = 1$).

28.18 Найти массу, центр тяжести однородного цилиндрического тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = 1,\ z = 0$.

Ответы: **28.1** $4\sqrt{6}$. **28.2** $\sqrt{2}\pi$. **28.3** $\frac{2}{3}\pi\left(5\sqrt{5}-1\right)$. **28.4** $\frac{\pi}{24}\left(5\sqrt{5}-1\right)$. **28.5** $\frac{\sqrt{2}}{6}$. **28.6** $\frac{2}{3}\pi a^4$.

28.7 $\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$. **28.8** $\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$. **28.9** $\pi h a^2\left(\frac{a^2}{4}+\frac{h^2}{3}\right)$. **28.10** 3π. **28.11** $4\sqrt{6}$. **28.12** $\frac{k\pi}{3}\left(3\sqrt{3}-1\right)$.

28.13 4π. **28.14** $2\pi R^4$. **28.15** $\frac{\pi R^2}{4}$. **28.16** $m=\frac{4}{21};\, x_c=0;\, y_c=\frac{7}{9};\, I_x=\frac{4}{33};\, I_y=\frac{4}{45};\, I_o=\frac{104}{495}$.

28.17 $m=\frac{2\pi}{3};\, x_c=y_c=0;\, z_c=\frac{3}{8}$. **28.18** $m=\frac{3}{2}\pi;\, z_c=\frac{7}{9};\, C\left(0;0;\frac{7}{9}\right)$.

ТЕОРИЯ ПОЛЯ

Занятие 29. Элементы теории поля

Аудиторные задания

29.1 Найти линии уровня скалярного поля:

1) $u=2x+3y$; **2)** $u=2x^2-4x+y^2+2y+z^2$; **3)** $u=x+2y+5z$; **4)** $u=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}+\frac{z^2}{6}$.

29.2 Определить вектор-градиент скалярного поля u:

1) $u=2x+3y$; **2)** $u=3x+5y-6z$; **3)** $u=4x^2+6xy-5z^3$.

29.3 Найти вектор-градиент скалярного поля u в точке M и наибольшую скорость возрастания поля в этой точке, если:

1) $u=\ln\left(x\,\mathrm{tg}\,y\right),\, M\left(1;\frac{\pi}{4}\right)$; **2)** $u=x^2yz-xy^2z+xyz^2,\, M(1;2;1)$.

29.4 Найти производную скалярного поля u в точке M по направлению вектора $\vec{e}$, если:

1) $u=xy+y^2-4z,\, M(1;2;3),\, \vec{e}=2\vec{i}+3\vec{j}-5\vec{k}$; **2)** $u=4xy+y^2,\, M\left(1;\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\, \vec{e}=\vec{i}+2\sqrt{3}\vec{j}$;

3) $u=x^2y+xz^2-2z,\, M(1;1;-1),\, \vec{e}=\overrightarrow{MM_1},\, M_1(2;-1;2)$.

29.5 Для векторного поля $\vec{F}$ найти векторные линии:

1) $\vec{F}=(5x-y)\vec{i}+2y\vec{j}$; **2)** $\vec{F}=\left(3x-y^2\right)\vec{i}+y\vec{j}$; **3)** $\vec{F}=y\vec{i}-x\vec{j}-2\vec{k}$;

4) $\vec{F}=\left(x+y^2+z^2\right)\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$; **5)** $\vec{F}=(x-y+z)\vec{i}+(x+y-z)\vec{j}+(2z-y)\vec{k}$.

29.6 Вычислить дивергенцию поля $\vec{F}$ в точке M, если:

1) $\vec{F}=(2xy+zx)\vec{i}+(xyz+y)\vec{j}+(x+y+2z)\vec{k},\, M(1;1;2)$;

2) $\vec{F}=(x+y+z)\vec{i}+\left(x^2+y^2+z^2\right)\vec{j}+\left(y^3+x^3+z^3\right)\vec{k},\, M(1;2;3)$;

3) $\vec{F}=\left(x^2yz-5y^2z+6xz^2\right)\vec{i}+\left(2y^2xz-4yz^2+3xz\right)\vec{j}+\left(z^2xy-7zy^3+z^3\right)\vec{k},\, M(0;-1;1)$.

29.7 Найти ротор векторного поля $\vec{F}$:

1) $\vec{F} = (2xy - z)\vec{i} + (yx + z)\vec{j} + \left(x^2 - 2xz\right)\vec{k}$;

2) $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$; **3)** $\vec{F} = xyz\vec{i} + (2x + 3y - z)\vec{j} + \left(x^2 + z^2\right)\vec{k}$.

Домашние задания

29.8 Для заданного скалярного поля записать уравнение линии уровня, проходящей через точку *M*. Определить в точке *M* производную поля u по направлению $\vec{l}$, градиент поля и наибольшую скорость возрастания поля в этой точке.

$u = x^2 + y^2 + 4x + 2y - 2, \quad M(-1, 2), \quad \vec{l} = -3\vec{i} + 4\vec{j}$.

29.9 Для заданного скалярного поля *u* определить в точке M_1 производную поля по направлению вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$, градиент, производную по направлению вектора $\vec{l}$, который образует с градиентом в точке M_1 угол φ.

1) $u = xy^2z + yz^2 - 3z, M_1(0, 1, 2), M_2(-2, 3, -1), \ \vec{l} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}, \varphi = 30^\circ$;

2) $u = \dfrac{y}{xz} + \dfrac{x}{yz} + \dfrac{z}{xy}, \quad M_1(1, 2, 3), \quad M_2(-2, 1, -1), \ \vec{l} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + 3\vec{k}, \quad \varphi = 225^\circ$.

29.10 Вычислить производную поля $u = \ln\left(xz^2 + 2yz\right)$ в точке $M(1, 3, 2)$ по положительному направлению окружности $\begin{cases} x = 1 + \cos t \\ y = 2 + \sin t. \\ z = 2 \end{cases}$

29.11 Найти угол φ между градиентами функций $u = x + yz + 2\sqrt{xz}$ и $\vartheta = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ в точке $M(2, 3, 2)$.

29.12 Найти векторные линии поля:

1) $\vec{F} = (2x + y)\vec{i} + 2(y + 2z)\vec{j} + (x - z)\vec{k}$; **2)** $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

29.13 Найти дивергенцию векторного поля $\vec{F}$:

1) $\vec{F} = \left(2x^2y - 3xz^3 + 5x^3yz\right)\vec{i} + \left(4y^3x + xyz + 8z^2\right)\vec{j} + \left(6z^3xy^2 - 7z^2x + 9zy\right)\vec{k}$;

2) $\vec{F} = \left(3y^2 - 2xy + x^2\right)\vec{i} + \left(xy - 5y^2\right)\vec{j}$; **3)** $\vec{F} = x^2\vec{i} - yx\vec{j} + xyz\vec{k}$;

4) $\vec{F} = \left(x^2y + y^2x - xy\right)\vec{i} + \left(y^3 - 4xy + 3y^2\right)\vec{j}$.

29.14 Найти ротор векторного поля $\vec{F}$:

1) $\vec{F} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$; **2)** $\vec{F} = y^2z\vec{i} + xz^2\vec{j} + x^2y\vec{k}$.

Ответы: **29.1** **1)** $c=2x+3y$; **2)** $\frac{(x-1)^2}{3}+\frac{(y+1)^2}{6}+\frac{z^2}{6}=C$; **3)** $c=x+2y+5z$;

4) $C=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}+\frac{z^2}{6}$. **29.2 1)** $\operatorname{grad}u=2\vec{i}+3\vec{j}$; **2)** $\operatorname{grad}u(3;5;-6)$; **3)** $\operatorname{grad}u\left(8x+6y;6x;-15z^2\right)$.

29.3 1) $\operatorname{grad}u=i+2j$; $\max\frac{du}{dl}=\sqrt{5}$; **2)** $\operatorname{grad}u=6\vec{i}-\vec{j}+4\vec{k}$; $\max\frac{du}{dl}=\sqrt{41}$.

29.4 1) $\frac{du}{dl}=\frac{37}{\sqrt{38}}$; **2)** $\frac{du}{dl}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}\left(5+\sqrt{3}\right)$; **3)** $\frac{du}{dl}=-\frac{11}{\sqrt{14}}$.

29.5 **1)** $\frac{\left(\frac{y}{x}-3\right)^{2/3}}{\left(\frac{y}{x}\right)^{5/3}\cdot x}$; **2)** $x=y^2$; **3)** $\begin{cases}x=c\cos t\\ y=c\sin t\\ z=2t+c_1\end{cases}$; **4)** $\begin{cases}x-y^2-z^2=c_1z\\ y=c_2z\end{cases}$;

5) $\begin{cases}x=(c_1+c_2+c_1t)e^t+c_3e^{2t}\\ y=(-c_1+c_2+c_1t)e^t\\ z=(c_2+c_1t)e^t+c_3e^{2t}\end{cases}$. **29.6 1)** $div\vec{F}(M)=9$; **2)** $div\vec{F}(M)=32$; **3)** $div\vec{F}(M)=12$.

29.7 1) $\operatorname{rot}\vec{F}=(-2x+3z-1)\vec{j}+(y-2x)\vec{k}$; **2)** $\operatorname{rot}\vec{F}=0$; **3)** $\operatorname{rot}\vec{F}=i+(xy+2x)\vec{j}+(2-xz)\vec{k}$.

29.8 $(x+2)^2+(y+1)^2=10$; $\frac{du}{d\vec{l}}=\frac{18}{5}$; $\operatorname{grad}u=2\vec{i}+6\vec{j}$; $\max\frac{du}{d\vec{l}}=2\sqrt{10}$.

29.9 1) $\frac{du}{d\vec{e}}=0$; $\frac{du}{d\overline{M_1M_2}}=\frac{1}{\sqrt{17}}$; $\operatorname{grad}u=2\vec{i}+4\vec{j}+\vec{k}$; $\frac{du}{d\vec{l}_1}=\frac{3\sqrt{7}}{2}$;

2) $\frac{du}{d\vec{l}}=-\frac{4}{3\sqrt{29}}$; $\frac{du}{d\overline{M_1M_2}}=\frac{101}{18\sqrt{26}}$; $\operatorname{grad}u=-2\vec{i}-\frac{1}{2}\vec{j}+\frac{2}{9}\vec{k}$;

$\frac{du}{d\vec{l}_1}=-\frac{\sqrt{2786}}{36}$. **29.10** $-\frac{1}{4}$. **29.11** $\varphi=\arccos\left(\frac{9}{\sqrt{102}}\right)$. **29.12** **1)** $\begin{cases}x=c_1+c_2t+4c_3e^{3t}\\ y=c_2-2c_1-2c_2t+4c_3e^{3t}\\ z=c_1-c_2+c_2t+c_3e^{3t}\end{cases}$;

2) $y=c_1x$; $z=c_2$. **29.13 1)** $4xy-3z^3+15x^2yz+12xy^2-13xz+18xy^2z^2+9y$;

2) $3x-12y$; **3)** $x+xy$; **4)** $4y^2-4x+5y+2xy$.

29.14 1) 0; **2)** $\left(x^2-2xz\right)\vec{i}+\left(y^2-2xy\right)\vec{j}+\left(z^2-2yz\right)\vec{k}$.

Занятие 30. Поток векторного поля. Циркуляция. Потенциальное поле

Аудиторные задания

30.1 Вычислить поток векторного поля $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} - z\vec{k}$ через верхнюю сторону части поверхности $z = 4 - x^2 - y^2$, отсеченной плоскостью $z = 0$.

30.2 Вычислить поток векторного поля $\vec{F} = (4x-3)\vec{i} + (2y-6x)\vec{j} - y^2z^3\vec{k}$ через внутреннюю сторону боковой поверхности части цилиндра $x^2 + y^2 = 9$, ограниченной плоскостью $z = 0$, параболоидом $z = x^2 + y^2$ и расположенной в первом октанте.

30.3 Вычислить поток поля $\vec{F} = x^3\vec{i} - y^3\vec{j} + 2z\vec{k}$ через внешнюю сторону части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, вырезанной конической поверхностью $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

30.4 Вычислить поток векторного поля $\vec{F} = 3x\vec{i} - 3y\vec{j} - 5z^2\vec{k}$ через внешнюю сторону замкнутой поверхности *S*, состоящей из части параболоида $2z = x^2 + y^2$ и сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 8$, накрывающей параболоид.

30.5 Вычислить поток векторного поля $\vec{F} = 2xy\vec{i} - y^2\vec{j} + z^3\vec{k}$ через внешнюю сторону замкнутой поверхности, ограниченной поверхностями: $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3} \cdot z$ и $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$.

30.6 Вычислить поток через положительно ориентированную замкнутую поверхность S:

1) $\vec{F} = xy^2\vec{i} + y(z - x)\vec{j} + \left(x^2 - zy^2\right)\vec{k}$, $S: \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{16} = 1$;

2) $\vec{F} = 3xy^2\vec{i} - \left(1 + yz^2\right)\vec{j} + \left(2 - zx^2\right)\vec{k}$, $S: \begin{cases} x^2 + z^2 - y^2 = 0 \\ y = 1, \ \ y \geq 0; \end{cases}$

3) $\vec{F} = \left(x^2 - y^2\right)\vec{i} + \left(yx^2 - z^2\right)\vec{j} + \left(zy^2 - x^2\right)\vec{k}$, $S: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 16 \\ z = \sqrt{x^2 + y^2}. \end{cases}$

30.7 Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{F}$ вдоль линии *L*:

1) $\vec{F} = (2x - y^2 + 1)\vec{i} + (3x + 2y^2 - 10)\vec{j}$, $L: \begin{cases} x = 3 - y^2 \\ y = x - 1 \end{cases}$;

2) $\vec{F} = \left(y^3 - 8yz - z\right)\vec{i} + \left(yz - x^3 + 2x\right)\vec{j} + \left(yx^3 - 2z^3\right)\vec{k}$, $L: \begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = 1, \ z \geq 0 \end{cases}$;

3) $\vec{F}=\left(x^2-y^2\right)\vec{i}+\left(x^2-z^2\right)\vec{j}+\left(y^2-x^2\right)\vec{k}$, L – контур треугольника ABC, где $A(1;0;0)$, $B(0;1;0)$, $C(0;0;1)$.

4) $\vec{F}=(x-y)\vec{i}+(y-z)\vec{j}+(z-x)\vec{k}$, L – часть линии $L:\begin{cases} x=2\cos t, \\ y=2\sin t, \\ z=\dfrac{2t}{\pi} \end{cases}$ от точки $B(2;0;4)$ и отрезка BA.

30.8 Вычислить по формуле Стокса циркуляцию векторного поля $\vec{F}$ по замкнутому контуру L:

1) $\vec{F}=\left(z^3+2y^3+3y\right)\vec{i}+\left(y^3-2x^3-xz^2\right)\vec{j}+\left(z^2-5xy^2\right)\vec{k}$, $L:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ z=\sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$;

2) $\vec{F}=\left(3z^2-y^3\right)\vec{i}+\left(x^3-2y^2z^2\right)\vec{j}+\left(2xyz-x^2y^2\right)\vec{k}$, $L:\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ 2x+z=4 \end{cases}$.

30.9 Выяснить, является ли векторное поле $\vec{F}$ потенциальным. Найти его потенциал и вычислить линейный интеграл w поля $\vec{F}$ от точки M до точки N:

1) $\vec{F}=x\ln x(1+y^2)\vec{i}+yx^2(1+y^2)^{-1}$, $M(2;3)$, $N(-4;7)$;

2) $\vec{F}=\left(3x^2y^3z^{-1}-2x^3\right)\vec{i}+\left(2x^3yz^{-1}+3y^3\right)\vec{j}+\left(z^3-x^3y^2z^{-2}\right)\vec{k}$, $M(1;2;2)$, $N(1;3;1)$;

3) $\vec{F}=(x+z)\vec{i}+(y+z)\vec{j}+5\vec{z}$.

30.10 Выяснить, является ли векторное поле соленоидальным.

1) $\vec{F}=x^2y\vec{i}-2xy^2\vec{j}+2xyz\vec{k}$; **2)** $\vec{F}=5xyz\vec{i}-3xz\vec{j}+4x\vec{k}$.

Домашние задания

30.11 Вычислить поток векторного поля $\vec{F}=(4x-3y)\vec{i}+(2y-6x)\vec{j}-y^2z\vec{k}$ через внутреннюю сторону боковой поверхности части цилиндра $x^2+y^2=4$, ограниченной плоскостью $z=0$, параболоидом $z=x^2+y^2$ и расположенной в первом октанте.

30.12 Вычислить поток поля $\vec{F}=y\vec{i}+z\vec{j}+x\vec{k}$ через нижнюю сторону плоскости треугольника ABC, где $A(2,0,0)$, $B(0,2,0)$, $C(0,0,2)$.

30.13 Вычислить поток поля $\vec{F}=y\vec{i}+x\vec{j}-z^2\cos y\vec{k}$ через внешнюю сторону части цилиндра $x^2+y^2=4$, лежащей в третьем октанте и ограниченной плоскостями $z=0$ и $x+y+z=4$.

30.14 Вычислить поток векторного поля $\vec{F}$ через положительно ориентированную замкнутую поверхность S:

1) $\vec{F} = 3xy^2\vec{i} - \left(1 + yz^2\right)\vec{j} + \left(2 - zx^2\right)\vec{k}$, где $S: \begin{cases} x^2 + z^2 - y^2 = 0 \\ y = 1, \ \ y \geq 0. \end{cases}$;

2) $\vec{F} = \left(x^2 - y^2\right)\vec{i} + \left(yx^2 - z^2\right)\vec{j} + \left(zy^2 - x^2\right)\vec{k}$, где $S: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 16 \\ z = \sqrt{x^2 + y^2}. \end{cases}$

30.15 Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{F} = y^2\vec{i} + z^2\,\vec{j} + \left(x^2 - 2y\right)\vec{k}$ вдоль линии $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, $x^2 + y^2 = 2x$.

30.16 Вычислить по формуле Стокса циркуляцию векторного поля $\vec{F} = \left(y^3 - yx^2\right)\vec{i} + \left(y^2 - x^2 + x\right)\vec{j}$ по контуру L: $(x-1)^2 + 4y^2 = 4$.

30.17 Для заданного векторного поля

$$\vec{F} = \left(2xz + \frac{1}{y}\right)\vec{i} - \left(\frac{x+z}{y^2}\right)\vec{j} + \left(x^2 + \frac{1}{y}\right)\vec{k}, \ \ A(-1,3,-2), \quad B(1,2,3):$$

1) проверить потенциальность поля; **2)** найти потенциал поля.

Ответы: 30.1 8π. **30.2** $-81\left(\frac{3}{2}\pi - 18\right)$. **30.3** $\frac{4\pi}{3}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$. **30.4** $\left(-32\sqrt{2} + \frac{20}{3}\right)\cdot 2\pi$. **30.5** $\frac{153\pi R^5}{32}$.

30.6 1) 64π; **2)** $\frac{\pi}{2}$; **3)** $\frac{8 - 5\sqrt{2}}{1024\pi}$. **30.7 1)** 4,5; **2)** $\frac{17\pi}{2}$; **3)** 2; **4)** $8 + 2\pi$. **30.8 1)** – 2,5π; **2)** 120π.

30.9 1) Поле потенциальное, $w = 8\ln 50 - 2\ln 10$, $u(x,y,z) = \frac{1}{2}x^2 + \ln\left(1 + y^2\right) + C$; **2)** Поле потенциальное, $w = 52; u(x,y,z) = -\frac{1}{2}x^4 + \frac{3}{4}y^4 + \frac{1}{4}z^4 + x^3y^2z^{-1} + C$; 3) Поле не потенциальное.

30.10 1) Да; **2)** нет. **30.11** $72 - 3\pi$. **30.12** – 4. **30.13** $\frac{80}{3}$. **30.14 1)** $\frac{\pi}{2}$; **2)** $\frac{8 - 5\sqrt{2}}{1024\pi}$. **30.15** $-\frac{6\pi + 16}{3}$.

30.16 $\frac{\pi}{2}$. **30.17** Поле потенциальное, $u = x^2z + \frac{x+z}{y} + C$.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Занятие 31. Дифференциальные уравнения первого порядка. Уравнения с разделяющимися переменными и однородные

Аудиторные задания

31.1 Решить уравнения:

1) $(x+5)dy+y^2dx=0$; **2)** $\left(x^2+1\right)ydx=x\left(y^2+1\right)dy$; **3)** $y'=e^{2x-3y}$;

4) $\dfrac{\cos x}{y}dx=\dfrac{\sin y}{x}dy$; **5)** $x^2(y+5)\,dx-xy^2dy=0$, $y(1)=1$; **6)** $\dfrac{2^x}{y}dy+3^{-x}dx=0$, $y\,(0)=1$;

7) $y'=\cos(x+y)$; **8)** $y'=e^{2x+y}$; **9)** $y\operatorname{arctg}x\,dx+\left(1+x^2\right)(y+2)dy=0$**;**

10) $\dfrac{y+2}{x-3}dx+\dfrac{y-7}{y+2}dy=0$; **11)** $xy'=y-xe^{\frac{y}{x}}$**;** **12)** $xy'-5\sqrt{3x^2+y^2}-y=0$**;**

13) $\left(\mathrm{y}^2-4xy\right)dx=-x^2dy$; **14)** $y'-\dfrac{y^2}{x^2}-\dfrac{y}{x}=1$; **15)** $(3x+y)dx-xdy=0$;

16) $xy'=4y\ln\dfrac{y}{x}$; **17)** $y'=\dfrac{y^2}{xy+y^2}$; **18)** $y'=\dfrac{y^2-x^2}{xy}$; **19)** $y'=\dfrac{y^3}{x^3}+\dfrac{y}{x}$;

20) $\left(x^3+xy^2\right)dy-y^3dx=0$; **21)** $(3y+x+2)dy=(2x+1)dx$; **22)** $(x-y)dy=(x-y+3)dx$**.**

Домашние задания

31.2 Решить уравнения:

1) $\sqrt{1-y^2}dx+y\sqrt{1-x^2}dy=0$; **2)** $xyy'=1-x^2$; **3)** $(1-x)dy-y\,dx=0$; **4)** $y'\sqrt{1-x^2}=1+y^2$;

5) $x\,dy-y\,dx=0,\ y(1)=1$; **6)** $ye^{2x}dx-\left(1+e^{2x}\right)dy=0$; **7)** $y'=y\cos x,\ y(0)=1$;

8) $\left(xy^2+x\right)dy+\left(x^2y-y\right)dx=0,\ y(1)=1$; **9)** $y'=e^{x+y}$; **10)** $y'\sin x=y\ln y,\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=e$;

11) $y'=\dfrac{y^2}{x^2}-2$; **12)** $xy'=y(\ln y-\ln x)$; **13)** $y'=\cos(x+y)$; **14)** $xy'=x+\dfrac{1}{2}y,\ y(1)=0$;

15) $y'\,tgx=y,\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$; **16)** $y'=\dfrac{2xy}{x^2-y^2}$; **17)** $y'=\dfrac{y}{x}+e^{-\frac{y}{x}},\ y(1)=0$;

18) $(y-x)dx-(y+x)dy=0$; **19)** $\left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)dx-xdy=0$, **20)** $y'=\left(x^2-x\right)\left(1+y^2\right);\ y(1)=0$;

21) $\left(\sqrt{xy}-x\right)dy+ydx=0,\ y(1)=1$; **22)** $y'=\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}$.

Ответы: **31.1** **1)** $y=\ln^{-1}\left|\frac{x+5}{c}\right|$; **2)** $x^2-y^2=2\ln\left|\frac{Cy}{x}\right|$; **3)** $\frac{1}{3}e^{3y}-\frac{1}{2}e^{2x}=C$;

4) $x\cos x+y\sin y+\cos x-\sin y=C$; **5)** $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}+5y-25\ln|y+5|+25\ln 6-5=0$;

6) $1-e^{-\frac{1}{\ln 6}}=C$; $y=e^{-\frac{1}{\ln 6\cdot 6x}}-e^{-\frac{1}{\ln 6}}+1$; **7)** $\frac{1-\cos(x+y)}{\sin(x+y)}=x+\frac{2}{\sqrt{2}}-1$;

8) $Ce^x=e^{\frac{2x+y}{2}}\left(e^{2x+y}+2\right)^{1/2}$; **9)** $\frac{\operatorname{arctg}^2 x}{2}+y+\ln cy^2=0$; **10)** $x+y+\ln\frac{c(x-3)^{11}}{(y+2)^9}=0$;

11) $e^{-\frac{y}{x}}=\ln|cx|$; **12)** $\frac{y+\sqrt{3x^2+y^2}}{x^6}=c$; **13)** $\left|\frac{y-3x}{y}\right|^{\frac{1}{\sqrt{3}}}=|cx|$; **14)** $\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\ln|cx|$;

15) $y=(3\ln|x|+c)x,\ x=0$; **16)** $\frac{1}{x}\left(4\ln\frac{y}{x}-1\right)^{1/4}=C$; **17)** $x=y\ln|y|-cy,\ y=0$;

18) $y=\pm x\sqrt{c-2\ln|x|}$; **19)** $y=-\frac{1}{2x\ln|cx|}$; **20)** $y=ce^{-\frac{y^2}{2x^2}}$; **21)** $\frac{x+y+2}{(4x-6y-1)(2x+1)^5}=\pm C=C_1$;

22) $y=x\pm\sqrt{2C-6x}$. **31.2** **1)** $1+y^2=c\left(1-x^2\right)$; **2)** $x^2+y^2=2\ln|cx|$; **3)** $y=\frac{c}{1-x}$;

4) $\operatorname{arctg} y-\arcsin x=c$; **5)** $y=x$; **6)** $y=c\sqrt{1+e^{2x}}$; **7)** $y=e^{\sin x}$; **8)** $\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)+\ln\left|\frac{y}{x}\right|=1$;

9) $e^x+e^{-y}+c=0$; **10)** $y=e^{tg\frac{x}{2}}$; **11)** $y=\frac{x\left(2+cx^3\right)}{1-cx^3}$; **12)** $\frac{\ln\left|\frac{y}{x}-1\right|}{|x|}=C$; **13)** $\operatorname{tg}\frac{x+y}{2}-x=C$;

14) $4x=(2x-y)^2$; **15)** $y=\sin x$; **16)** $\left(x^2+y^2\right)^{-1}=c$; **17)** $y=x\ln|1+\ln|x||$; **18)** $\ln c\sqrt{1+e^{2x}}=y$;

19) $y=\sqrt{x^2+y^2}$; **20)** $y=\operatorname{tg}\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+c\right)$; **21)** $\ln|y|+2\sqrt{\frac{x}{y}}=2$; **22)** $y=\pm x\sqrt{2\ln|x|+C}$.

Занятие 32. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка, уравнения Бернулли и в полных дифференциалах

Аудиторные задания

32.1 Решить уравнения:

1) $y'-\frac{y}{x}=x^2,\ y(1)=1$; **2)** $x^2y'=\ln x-2xy;\ y(1)=1$; **3)** $y'=\frac{1}{\cos y}-y\operatorname{tg} y,\ y(0)=0$;

4) $y'-y\operatorname{ctg} x-y^3/\sin x=0$; **5)** $e^x y=1-y'e^x,\ y(0)=1$; **6)** $y'+2xy-xe^{-x^2}=0,\ y(0)=1$;

7) $y'\sin x = y + 1 - \cos x,\ y(\pi/2) = 1$; **8)** $\left(1 - x^2\right)^{1/2} y' = y - \arcsin x$;

9) $xy' - 2y - 2x^2 y^{1/2} = 0,\ y(1) = 1$; **10)** $xy' + y = 2xe^{x^2},\ y(1) = e$; **11)** $\dfrac{y'}{y^3} = x^3 - \dfrac{3}{xy^2}$;

12) $(2x - y + 1)dx = (x + 1 - 2y)dy,\ y(1) = 1$; **13)** $\left(x\left(x^2 - y^2\right)^{-1/2} - 1\right)dx = y(x^2 - y^2)^{-1/2} dy,\ y(1) = 1$;

14) $(y + 2x)dx + (2y + x)dy = 0,\ y(2) = 1$; **15)** $\dfrac{dx}{e^y} - \left(x\dfrac{1}{e^y} + 2y\right)dy = 0$;

16) $2x\cos^2 y\,dx + \left(2y - x^2 \sin 2y\right)dy = 0$; **17)** $yx^{-1}dx + \left(\ln x + y^3\right)dy = 0,\ y(1) = 1$;

18) $\left(y + 2x^{-2}\right)dx + \left(x - 3y^{-2}\right)dy = 0,\ y(2) = 1$; **19)** $y' = \dfrac{2xy}{y^2 - x^2},\ y(0) = 1$; **20)** $y' = \dfrac{2x + 3x^2 y}{3y^2 - x^3}$;

21) $y' = \dfrac{3y^2 - 4x - 3x^2}{4y + 6xy},\ y(0) = 2$; **22)** $\left(1 + x^2\right)^{-2} 2x\left(1 - e^y\right)dx + e^y\left(1 + x^2\right)^{-1} dy = 0,\ \ y(0) = 3$;

23) $y' = \dfrac{e^{\frac{x}{y}} + 1}{e^{\frac{x}{y}}\left(\dfrac{x}{y} - 1\right)}$; **24)** $\left(\dfrac{\sin 2x + xy}{y}\right)dx + \left(\dfrac{y^3 - \sin^2 x}{y^2}\right)dy = 0,\ y(0) = 1$.

Домашние задания

32.2 Решить уравнения:

1) $x^2 y' + (1 - 2x)y = x^2$; **2)** $y' - 2y - e^y + x = 0,\ y(0) = \dfrac{1}{4}$; **3)** $y' + \dfrac{3y}{x} - \dfrac{2}{x^3} = 0,\ y(1) = 1$;

4) $y' + 2xy = xe^{-x^2},\ y(0) = 1$; **5)** $\left(1 + x^2\right)y' - 2xy = \left(1 + x^2\right)^2, y(0) = 1$; **6)** $y' + \dfrac{y}{x} = 2\ln x + 1,\ y(1) = 2$;

7) $y' - \dfrac{2y}{x} = x^3$; **8)** $y' + 4xy = 2xe^{-x^2} y^{1/2}$; **9)** $y' - \dfrac{y}{x\ln x} = x\ln x,\ y(e) = \dfrac{e^2}{2}$;

10) $y' - 4\dfrac{y}{x} = xy^{1/2}$; **11)** $4xy' + 3y + e^x x^4 y^5 = 0$; **12)** $y' + 2xy = 2x^3 y^3,\ y(0) = 1$;

13) $y' + y = \dfrac{1}{2}e^x y^{1/2},\ y(0) = \dfrac{9}{4}$; **14)** $y' - y = xy^2,\ y(0) = 1$; **15)** $y' - y x^{-1/2} = y^2 e^{2\sqrt{x}}$;

16) $(2x + y)dx + (x + 2y)dy = 0$; **17)** $e^y dx + \left(xe^y - 2y\right)dy = 0$; **18)** $ye^x dx + \left(y + e^x\right)dy = 0$;

19) $\dfrac{y}{x}dx + \left(y^3 + \ln x\right)dy = 0,\ y(1) = 1$; **20)** $2x\cos^2 y\,dx + \left(2y - x^2 \sin 2y\right)dy = 0$;

21) $\dfrac{dx}{e^y} - \left(\dfrac{x}{e^y} + 2y\right)dy = 0,\ y(5) = 0$; **22)** $\left(x^2 + y^2 + y\right)dx + \left(2xy + x + e^y\right)dy,\ y(0) = 0$;

23) $\dfrac{xdy}{x^2 + y^2} = \left(\dfrac{y}{x^2 + y^2} - 1\right)dx,\ y(1) = 1$.

Ответы: **32.1** **1)** $y = Cx + \frac{x^3}{2}, y = \frac{1}{2}(x + x^3)$; **2)** $y = \frac{1}{x^2}(x\ln x - x + 2)$; **3)** $y = \sin x$;

4) $y = \sin x(2\cos x + c)^{-1/2}$; **5)** $y = e^{-x}(x+1)$; **6)** $y = \left(\frac{x^2}{2} + 1\right)e^{-x^2}$;

7) $y = (x+c)\operatorname{tg}\frac{x}{2}, y = \left(x + 1 - \frac{\pi}{2}\right)\operatorname{tg}\frac{x}{2}$; **8)** $y = \arcsin x + 1 + ce^{\arcsin x}$; **9)** $y = x^2(x+c)^2, y = x^4$;

10) $y = \frac{c + e^{x^2}}{x}, y = x^{-1}e^{x^2}$; **11)** $y = 0, y^2 = x^{-4}(cx^2 + 1)^{-1}$; **12)** $y^2 + x^2 - xy + x - y - 1 = 0$;

13) $(x^2 - y^2)^{1/2} - x + C = 0, (x^2 - y^2)^{1/2} - x + 1 = 0$; **14)** $x^2 + xy + y^2 - 7 = 0$; **15)** $\frac{x}{e^y} - y^2 = C$;

16) $y^2 + x^2\cos^2 y - C = 0$; **17)** $4y\ln x + y^4 = 1$; **18)** $xy - 2x^{-1} + 3y^{-1} = 4$;

19) $3x^2y - y^3 = C, 3x^2y - y^3 + 1 = 0$; **20)** $x^3y - y^3 + x^2 = C$; **21)** $x^3 + 2x^2 - 2y^2 - 3xy^2 = 8$;

22) $(e^y - 1)(1 + x^2)^{-1} + e^3 - 1 = 0$; **23)** $ye^{\frac{x}{y}} + x + C = 0$; **24)** $2^{-1}(y^2 + x^2) + y^{-1}\sin^2 x - 2^{-1} = 0$.

32.2 **1)** $y = Cx^2e^{1/2} + \frac{1}{x^2}$; **2)** $y = -e^x + \frac{x}{2} + e^{2x} + \frac{1}{4}$; **3)** $y = \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}$; **4)** $y = e^{-x^2}\left(1 + \frac{x^2}{2}\right)$;

5) $y = (1 + x^2)(x+1)$; **6)** $y = x\ln x + \frac{2}{x}$; **7)** $y = \frac{x^4}{6} + \frac{C}{x^2}$; **8)** $y^2 = e^{-2x^2}\left(C + \frac{1}{2}x^2\right)^2$;

9) $y = \frac{x^2\ln x}{2}$; **10)** $y = x^4\left(\frac{1}{2}\ln|x| + C\right)^2$; **11)** $y^{-4} = (e^x + C)x^3$; **12)** $\frac{1}{y^2} = x^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{2x^2}$;

13) $y = e^{-x}\left(\frac{1}{2}e^x + 1\right)^2$; **14)** $y = -e^x + \frac{x}{2} + e^{2x} + \frac{1}{4}$; **15)** $y = e^{2\sqrt{x}}\left(\frac{e^{\sqrt{2x}}}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{8}e^{2\sqrt{x}} + C\right)$;

16) $x^2 + xy + y^2 = C$; **17)** $xe^y - y^2 = C$; **18)** $ye^x + \frac{y^2}{2} = C$; **19)** $y\ln x + \frac{1}{4y^4} = \frac{1}{4}$;

20) $x^2\cos y + y^2 = C$; **21)** $xe^{-y} + y^2 = 5$; **22)** $\frac{x^3}{3} + xy^2 + xy + e^y = 0$; **23)** $\operatorname{arctg}\frac{y}{x} - x = \frac{\pi}{4} - 1$.

Занятие 33. Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижения порядка

Аудиторные задания

33.1 Решить уравнения:

1) $y'' = x^2 - 2x$; **2)** $y''' = e^{2x}, y(0) = \frac{9}{8}, y'(0) = \frac{1}{4}, y''(0) = -\frac{1}{2}$;

3) $y''' = x - \cos 2x, y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 0$;

4) $y'' = 2x \ln x$**;** $y'(0) = 1, y''(0) = 0$; **5)** $y^{IV} = \sin 2x$; **6)** $y''' = x + \cos x$;

7) $y'' = -6x, y(0) = y'(0) = 0$; **8)** $y''' = e^{-x}, y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$; **9)** $xy'' = y'$;

10) $y' = x \ln xy''$; **11)** $y'' = xe^x, y(0) = y'(0) = 0$; **12)** $y''' = -\cos x$; **13)** $y''' = \dfrac{2}{x^3}$;

14) $(1 + \sin x)y''' - \cos x \cdot y'' = 0$; **15)** $x^2 + 2y'x = 6y''$; **16)** $xy'' = y'$; **17)** $xy'' + y' = 0$;

18) $y'' - xy'' + y' = 0$; **19)** $y'' - \dfrac{y'}{x} = 0$; **20)** $(x+1)y''' - y'' = 0$;

21) $x^3 y''' = 6, y(1) = 0, y'(1) = 5, y''(1) = 1$; **22)** $y'' - 2y' \operatorname{ctg} x = \sin^3 x; y'(0) = 5, y''(1) = 1$;

23) $y'' + 50 \sin y \cos^3 y = 0$; **24)** $3y'y'' = e^y, y(-3) = 0, y'(-3) = 1$; **25)** $yy'' = y'(y'+1)$;

26) $y'' = e^{2y}, y(0) = 0, y'(0) = 1$; **27)** $2y'' + 3(y')^2 = 0, y(0) = \dfrac{2}{3}\ln 2, y'(0) = 1$; **28)** $yy'' = y'^2$;

29) $yy'' - y^2 y' - (y')^2 = 0$; **30)** $y'' \cos y = (y')^2 \sin y$; $y(0) = \sqrt{2}, y'(0) = \sqrt{2}$;

31) $y^3 y'' - 1 = 0$; **32)** $y'' = 2yy'$; **33)** $yy'' = -y'^2$; **34)** $y'^2 + 2yy'' = 0$;

35) $yy'' + y'^2 - 1 = 0$; **36)** $y^3 y'' - 1 = 0$; **37)** $y'' + y'^2 - 2e^{-y} = 0$.

Домашние задания

33.2 Решить уравнения:

1) $y'' = \operatorname{arctg} x$; **2)** $y'' = xe^x$; **3)** $y''' = x\sqrt{x}$**;** **4)** $y'' = \ln x + x$**;** **5)** $y^{IV} = x - 1$**;**

6) $xy^{IV} = 1$**;** **7)** $y'' = -\dfrac{x}{y}$**;** **8)** $x(y'' - x) = y'$**;** **9)** $x^2 y'' - (y')^2 = 0$**;** **10)** $y'' = \sin 2x + \sec^2 x$**;**

11) $xy'' = y' \ln y', y(1) = y'(1) = e$**; 12)** $2yy'' + y^2 - (y')^2 = 0, y(0) = y'(0) = 1$**; 13)** $yy'' - (y')^3 = 0$**;**

14) $y''' - 3yy' = 0, y(0) = y'(0) = 1, y''(0) = \dfrac{3}{2}$**;** **15)** $3yy'' - 2y = 0, y(0) = y'(0) = 1$**.**

Ответы: 33.1 1) $y = \dfrac{x^4}{12} - \dfrac{x^3}{3} + C_1 x + C_2$; **2)** $y = \dfrac{1}{8}e^{2x} - \dfrac{x^2}{2} + 1$; **3)** $y = \dfrac{1}{24}x^4 + \dfrac{1}{8}\sin 2x + \dfrac{3}{4}x$;

4) $y = \dfrac{x^3}{3}\ln x - \dfrac{5}{18}x^3 + C_1 x + C_2$; **5)** $y = \dfrac{1}{16}\sin 2x + C_1 \dfrac{x^3}{6} + C_2 \dfrac{x^2}{2} + C_3 x + C4$;

6) $y = \dfrac{x^4}{24} - \sin x + C_1 x^2 + C_2 x + C_3$; **7)** $y = -x^3$**;** **8)** $y = e^{-x} + \dfrac{x^2}{2} - x + 1$**;** **9)** $y = C_1 x^2 + C_2$**;**

10) $y = C_1(x \ln x - x) + C_2$**; 11)** $y = (x-2)e^x + x + C_2$, $y = (x-2)e^x + x + 2$;

12) $y = \sin x + C_1 x^2 + C_2 x + C_3$**; 13)** $y = \ln|x| + C_1 x^2 + C_2 x + C_3$**;**

14) $y=C_1\left(\frac{x^2}{2}-\sin x\right)+C_2x+C_3$ **;** **15)** $y=\frac{x^3}{6}+\frac{1}{4}C_1x^4+C_2$ **;** **16)** $y=C_1x^2+C_2$ **;**

17) $y=C_1\ln|x|+C_2$ **; 18)** $y=C_1\frac{x^2}{2}-C_1x+C_2$ **; 19)** $y=C_1\frac{x^2}{2}+C_2$ **;**

20) $y=\frac{C_1x^3}{6}+\frac{C_1x^2}{2}+C_2x+C_3$ **; 21)** $y=3\ln|x|+2x^2-2x$ **;**

22) $y=\frac{C_1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)+C_2-\frac{\sin^3 x}{3}$ **;** **23)** $y=\mathrm{arctg}\,5x$ **;** **24)** $y=3\ln\frac{3}{|x|},\ x>0$ **;**

25) $C_1y-1=C_2e^{C_1x},\ y=C-x,\ y=0$ **; 26)** $y=\ln|x-1|$ **; 27)** $y=\frac{2}{3}\ln|3x+2|$ **;**

28) $y\ln|y|+x+C_1y+C_2=0,\ y=C$ **;** **29)** $x=\frac{1}{C_1}\ln\left|\frac{y}{x+C_1}\right|+C_2$ **;** **30)** $y=\arcsin(C_1x+C_2)$ **;**

31) $C_1y^2-(C_1x+C_2)^2=1$ **; 32)** $y=C_1\,\mathrm{tg}(C_1x+C_2),\ y=C$ **; 33)** $y^2-C_1x-C_2=0$ **;**

34) $y^3=C_1(x+C_2)^2,\ y=C$ **;** **35)** $y^2-x^2-C_1x-C_2=0$ **;** **36)** $(C_1x+C_2)^2+1+C_1y^2=0$ **;**

37) $(x+C_2)^2-e^y-C_1=0$ **. 33.2 1)** $y=\frac{1}{2}(x^2-1)\mathrm{arctg}\,x-\frac{1}{2}x\ln(1+x^2)+\frac{1}{2}x+C_1x+C_2$;

2) $y=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{3}{4}x^2+\frac{x^3}{6}+C_1x+C_2$; **3)** $y=\frac{8}{315}x^4\sqrt{x}+C_1x^2+C_2x+C_3$;

4) $y=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{3}{4}x^2+\frac{x^3}{6}+C_1x+C_2$; **5)** $y=\frac{(x-1)^5}{120}+C_1x^3+C_2x^2+C_3x+C_4$;

6) $y=\frac{x^3}{6}\ln|x|+C_1x^3+C_2x^2+C_3x+C_4$ **; 7)** $y=\pm\frac{1}{2}\left(x\sqrt{C_1^2-x^2}+C_1^2\arcsin\frac{x}{C_1}\right)+C_2$ **;**

8) $y=\frac{x^3}{3}+C_1x^2+C_2$ **; 9)** $C_1x-C_1^2y=\ln|C_1x+1|+C_2$ **; 10)** $y=-\ln|\cos x|+\sin x-\frac{x^2}{2}+C_1x+C_2$ **;**

11) $y=e^x$ **;** **12)** $y=\sin x+1$ **;** **13)** $y\ln y+x+C_1y+C_2=0,\ y=C$ **;** **14)** $y=4(x\pm 2)^{-2}$ **;**

15) $y=\left(1+\frac{x}{3}\right)^3$ **.**

Занятие 34. Линейные однородные и неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Метод Лагранжа

Аудиторные задания

34.1 Решить уравнения:

1) $y''-2y'=0$; **2)** $y''-6y'+9y=0$; **3)** $y''+y'-2y=0$;

4) $y'' + 4y = 0$; **5)** $y''' + y'' = 0,\ \ y(0) = 1,\ y'(0) = 0,$ **6)** $y'' - 4y' = 0$;

7) $3y'' - 2y' - 8y = 0$; **8)** $y'' - 2y' - 2y = 0$; **9)** $2y'' - 5y' + 2y = 0$;

10) $y'' - 2y' + 3y = 0$; $y(0) = 1,\ y'(0) = 3$; **11)** $y''' - 8y = 0$; **12)** $y'' - 2y' + 2y = 0$, $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$;

34.2 Даны корни характеристического многочлена, записать решение соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения

1) $\kappa_{1,2,3,4} = 3 \pm 2i$, $\kappa_{5,6} = 1$, $\kappa_7 = 0$; **2)** $\kappa_{1,2,3,4} = 5$; $\kappa_{5,6} = \pm i$;

3) $\kappa_{1,2,3,4,5,6} = 0$; $\kappa_{7,8,9,10} = -1 \pm 4i$; **4)** $\kappa_1 = 1, \kappa_{2,3} = 5 \pm 7i, \kappa_{4,5} = -8$; **5)** $\kappa_{1,2,3} = 4$; $\kappa_{5,6} = 7 \pm 2$.

34.3 Решить уравнения методом вариации:

1) $y'' + 4y = \dfrac{1}{\sin^2 x}$; **2)** $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{1}{e^x + 1}$; **3)** $y'' + 2y' + 2y = \dfrac{1}{e^x \sin x}$;

4) $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x$; **5)** $y'' + y = \operatorname{ctg} x$; **6)** $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{\sqrt{4 - x^2}}$; **7)** $y'' + y' = \dfrac{1}{\sin x}$;

8) $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$; **9)** $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{e^{2x}}{e^x + 1}$; **10)** $y'' + 4y' + 4y = \dfrac{e^{-2x}}{x^3}$;

11) $y'' + 2y' + y = \dfrac{1}{e^x \sqrt{4 - x^2}}$; **12)** $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{4 + x^2}$; **13)** $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$;

Домашние задания

34.4 Решить уравнение:

1) $y'' - 2y' + y = 0$; **2)** $y'' + 3y' - 4y = 0$; **3)** $y'' + 6y' + 9y = 0,$

4) $y'' - 2y' + 2y = 0$, $y'(0) = y(0) = 1$; $y(0) = y'(0) = 1$; **5)** $y''' - y' = 0$, $y(0) = 3,$

6) $y^{IV} - 3y'' - 4y = 0$; $y'(0) = -1, y''(0) = 1$; **7)** $y^{IV} + 2y'' + y = 0$; **8)** $y^{IV} + 5y'' + 4y = 0$;

9) $y^{V} + 3y^{IV} + 3y''' + y'' = 0$; **10)** $y'' + 4y' + 5y = 0$; **11)** $y'' + 2y' + y = \dfrac{1}{xe^x}$;

12) $y'' + 4y = \dfrac{1}{\cos 2x}$; **13)** $y'' + 9y = 3\operatorname{tg} 3x$; **14)** $y'' + 4y = \operatorname{ctg} 2x$; **15)** $y'' - 4y' + 5y = \dfrac{e^{2x}}{\cos x}$.

Ответы: **34.1** **1)** $y = C_1 + C_2 e^{2x}$; **2)** $y = e^{3x}(C_1 + C_2 x)$; **3)** $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x$;

4) $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$; **5)** $y = x + e^{-x}$; **6)** $y = C_1 + C_2 e^{4x}$; **7)** $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-\frac{4}{3}x}$;

8) $y = C_1 e^{(1-\sqrt{3})x} + C_2 e^{(1+\sqrt{3}x)}$; **9)** $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{x/2}$; **10)** $y = e^x \cos\sqrt{2}\,x + \sqrt{2} \sin\sqrt{2}\,x$;

11) $y = C_1 e^{2x} + e^{-x}\left(C_2 \cos\sqrt{3}x + C_3 \sin\sqrt{3}x\right)$; **12)** $y = e^x \sin x$.

34.2. 1) $y = e^{3x}\left[(C_1 + C_2 x)\cos 2x + (C_3 + C_4 x)\sin 2x\right] + (C_5 + C_6 x)e^x + C_7$;

2) $y=(C_1+C_2x+C_3x^2+C_4x^3)e^{5x}+C_5\cos x+C_6\sin x$;

3) $y=C_1+C_2x+C_3x^2+C_4x^3+C_5x^4+C_6x^5+e^{-x}[(C_7+C_8x)\cos 4x+(C_9+C_{10}x)\sin 4x]$;

4) $y=\tilde{N}_1e^x+e^{5x}[C_2\cos 7x+C_3\sin 7x]+(C_4+C_5x)e^{-8x}$;

5) $y=(C_1+C_2x+C_3x^2)e^{4x}+e^{7x}(C_4\cos 2x+C_5\sin x)$;

34.3. 1) $y=(C_1-\ln|\sin x|)\cos 2x+\left(C_2-x-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}x\right)\sin 2x$;

2) $y=\left(e^{-x}+e^{-2x}\right)\ln\left(e^x+1\right)+C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}$;

3) $y=(C_1-x)e^{-x}\cos x+(C_2+\ln|\sin x|)e^{-x}\sin x$; **4)** $y=\left(C_1+C_2x+\frac{x^2\ln x}{2}-\frac{3}{4}x^2\right)e^{-2x}$;

5) $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\sin x\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$; **6)** $y=\left(C_1+C_2x+\sqrt{4-x^2}+x\arcsin\frac{x}{2}\right)e^x$;

7) $y=(C_1-x)\cos x+(C_2+\ln|\sin x|)\sin x$; **8)** $y=e^x(x\ln|x|C_1x+C_2)$;

9) $y=\left(C_1+x-\ln\left(e^x+1\right)\right)e^{2x}+\left(C_2+\ln\left(e^x+1\right)\right)e^x$; **10)** $y=e^{-2x}\left(C_1+C_2x+\frac{1}{2x}\right)$;

11) $y=\left(C_1+C_2x+\sqrt{4-x^2}+x\arcsin\frac{x}{2}\right)e^{-x}$; **12)** $y=\left(C_1+C_2x-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+\frac{x}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right)e^x$;

13) $y=(C_1+\ln|\cos x|)\cos x+(C_2+x)\sin x$. **34.4. 1)** $y=e^x(C_1+C_2x)$; **2)** $y=C_1e^x+C_2e^{-4x}$;

3) $y=e^{-3x}(1+4x)$; **4)** $y=e^x(\cos x+\sin x)$; **5)** $y=2+e^{-x}$;

6) $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{2x}+C_3\sin x+C_4\cos x$; **7)** $y=C_1\cos x+C_2\sin x+x(C_3\cos x+C_4\sin x)$;

8) $y=C_1\cos x+C_2\sin x+C_3\cos 2x+C_4\sin 2x$; **9)** $y=C_1+C_2x+e^{-x}\left(C_3+C_4x+C_5x^2\right)$;

10) $y=e^{\frac{1}{2}x}(C_1+C_2x)$; **11)** $y=(C_1+C_2x)e^{-x}+xe^{-x}\ln|x|$;

12) $y=\frac{x}{2}\sin 2x+\frac{\cos 2x}{4}\ln|\cos 2x|+C_1\sin 2x+C_2\cos 2x$;

13) $y=\left(C_1-\frac{1}{3}\ln\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3}{2}x\right)\right)\right)\cos 3x+C_2\sin 3x$; **14)** $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+\frac{1}{4}\sin 2x\ln|\operatorname{tg}2x|$;

15) $y=[(C_1+\ln\cos x)\cos x+(C_2+x)\sin x]e^{2x}$.

Занятие 35. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами с правой частью специального вида

Аудиторные задания

35.1 Решить уравнения:

1) $y''-2y'=2e^x$, $y(1)=-1$, $y'(1)=0$; **2)** $y''+8y'=8x$; **3)** $y''+y=4e^x$, $y(0)=4$, $y'(0)=3$;

4) $y''+y=2\cos x$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$; **5)** $y''-3y'+2y=xe^x$; **6)** $y''+5y'=50\cos 5x$;

7) $y''-5y'+4y=4x^2e^{2x}$; **8)** $y''-4y'+8y=e^{2x}+\sin 2x$;

9) $y''-2y'+2y=4e^x\cos x$; $y(\pi)=\pi e^{\pi}$, $y'(\pi)=e^{\pi}$; **10)** $y''+4y=\sin x$, $y(0)=y'(0)=1$;

11) $y''+3y'+2y=x\sin x$; **12)** $y''-9y=e^{3x}\cos x$; **13)** $y''+y=x^2\sin x$;

14) $y''-3y'+2y=x\cos x$; **15)** $y''-6y'+9y=9x^2-12x+2$, $y(0)=1$, $y'(0)=3$;

16) $y''-4y'+5y=e^{2x}(2\cos x+\sin x)$; **17)** $y''-2y'+y=x^3$; **18)** $y''+2y'+y=x^2e^{-x}\cos x$;

19) $y''-3y'+2y=\left(x^2+x\right)e^{3x}$; **20)** $y''-2y=2xe^x(\cos x-\sin x)$.

35.2 Дана правая часть уравнения и известны характеристические числа соответствующего однородного линейного уравнения, требуется записать общее решение.

1) $f(x)=3e^x-5x\cos x+8$, $k_{1,2,3,4}=\pm i$, $k_{5,6}=1$, $k_7=0$;

2) $f(x)=x^2e^{2x}-3x^3+4\cos 7x$, $k_{1,2}=5$, $\kappa_3=2, k_4=k_5=k_6=0$;

3) $f(x)=(x-1)-e^x-2\cos x$, $k_{1,2}=0$, $k_3=2$, $k_4=1$, $k_{5,6}=1\pm i$;

4) $f(x)=xe^x+\sin 9x$, $k_{1,2}=1\pm i, k_{3,4}=\pm 9i$;

5) $f(x)=2x^2-e^x+5x^3-2$, $k_{1,2}=1$; $\kappa_3=0$, $k_4=\pm i$;

6) $f(x)=-2xe^{7x}-3\cos 7x, k_{1,2}=5$, $k_3=7, k_{4,5}=1\pm 7i, k_{6,7}=\pm 7i$;

7) $f(x)=5-2x\sin 4x$, $k_{1,2,3,4}=0$, $k_{5,6}=1\pm 4i$;

8) $f(x)=e^{3x}\cos 2x-\sin 5x$, $k_{1,2,3}=4$, $k_{5,6}=3\pm 2i$;

9) $f(x)=x^2-5$, $k_{1,2,3}=1$, $k_{4,5}=\pm i$;

10) $f(x)=-4\sin x+\cos x-6x$, $k_1=0$, $k_{2,3}=\pm 2i$.

35.3 Определить к какому виду (I–XI) относятся дифференциальные уравнения (1–33):

I. Уравнение с разделяющимися переменными:

$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0$.

II. Уравнение однородное первого порядка:

$y' = f(x, y) = \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$**, где** $f(x, y)$ **– однородная функция нулевого измерения** $y = ux$.

III. Уравнение в полных дифференциалах:

$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0,\ \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

IV. Линейное уравнение первого порядка:

$y' + P(x)y = q(x)$.

V. Уравнение Бернулли: $y' + P(x)y = q(x)y^{\alpha}$.

VI. Линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами:

$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0$.

VII. Линейное неоднородное уравнение, решаемое только методом Лагранжа:

$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = f(x)$.

VIII. Линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами со специальной правой частью:

$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(x)$, где $f(x) = e^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\right)$.

IX.Уравнение высших порядков вида: $y^{(n)} = f(x)$.

X. Уравнение высших порядков вида:

$F\left(x, y^{(k)}, \ldots, y^{(n)}\right) = 0$, $k < n$.

XI. Уравнение высших порядков вида:

$F\left(y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$.

XII. Уравнение высших порядков вида:

$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$.

1) $y'' + y' = e^x$; **2)** $ye^x dx + (x+1)(y-1)dy = 0$; **3)** $y' + x^2 y = x + 2$; **4)** $(x+2)y''' = y''$;

5) $xydx = \left(x^2 + y^2\right)dy$; **6)** $y' + \dfrac{1}{x}y = xy^3$; **7)** $y'' - y' + 3y = x^2 e^x$; **8)** $\left(x^2 + y^2\right)dx + 2yxdy = 0$;

9) $y'' - 3y' + y = 0$; **10)** $y^{(\mathrm{IV})} = \cos x$; **11)** $y'' - y = \operatorname{tg} x$; **12)** $y''y = 1$;

13) $y'' - 5y' = 0$; **14)** $y' + 3x^4 y = x^2 - 3$; **15)** $y^2 x^2 dx = \left(x^4 + y^4\right)dy$; **16)** $y' - 5xy = e^x y^2$;

17) $y''' = x^3 + 5$; **18)** $y'' + y' = 3yy'$; **19)** $ye^x dx - (1 - e^x)dy = 0$; **20)** $y'' - y' + 2y = x^2 e^x \cos x$;

21) $y' = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2}$; **22)** $(x-3)(y+2)dx + x^2 y^3 dy = 0$; **23)** $y'' - 3y'y = 0$; **24)** $y^{(V)} = xe^x$;

25) $y\cos x dx + (1 + \sin x)dy = 0$; **26)** $y'' + y' - y = \dfrac{e^{5x}}{1 - e^{5x}}$; **27)** $y'' - y' + 4(y + y') = 0$;

28) $y' - 7x^2 y = (x^3 - 1)y^3$; **29)** $y''x - y'y = x$; **30)** $x\cos y dy + \sin x \,\mathrm{tg}\, y dx = 0$;

31) $y'' + 3y' = \dfrac{4}{\cos x}$; **32)** $y^{(IV)} - 3xy^{(III)} = y$; **33)** $y'' - 3y' + 5y = 0$;

34) $(x - y)dx + (x + y)dy = 0$; **35)** $2y'' - 3y'x + 2xy = 0$.

Домашние задания

35.4 Решить уравнения:

1) $y'' + 16y = 32y^{4x}$, $y(0) = 2, y'(0) = 0$; **2)** $y'' - 4y = e^{2x}$, $y(0) = 1, y'(0) = -8$;

3) $y'' - 2y' + y = -12\cos 2x - 9\sin 2x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$; **4)** $y'' - 4y' = 3x + 1$, $y(0) = -2$, $y'(0) = 0$;

5) $y'' + 9y' = 3\cos 3x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$; **6)** $y'' + 3y' = 1 + \sin 3x + 4e^{2x}$;

7) $y'' - 3y' + 2y = (34 - 12x)e^{-x}$; **8)** $y'' + y' = 2x - 1$; **9)** $y'' + y = 2 + \cos 2x$;

10) $y'' + 6y' + 10y = x^2 + 4e^x$; **11)** $y'' + 3y' - 4y = 5\sin x$; **12)** $y'' + 2y' + y = 8e^{-x}$;

13) $y'' + 4y = 2x^2 + 3x + 1$; **14)** $y'' - 4y' + 3y = (2x + 3)e^{2x}$; **15)** $y'' - 4y = 2\sin x + \cos 2x$.

Ответы: 35.1 1) $y = e^{2x-1} - 2e^x + e - 1$; **2)** $y = (C_1 + C_2 x)e^{2x} + \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{8}$;

3) $y = 2\cos x - 5\sin x + 2e^x$; **4)** $y = \cos x + x\sin x$; **5)** $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^x - \left(\dfrac{x^2}{2} + x\right)e^x$;

6) $y = C_1 + C_2 e^{-5x} + \sin 5x - \cos 5x$; **7)** $y = C_1 e^x + C_2 e^{4x} - (2x^2 - 2x + 3)e^{2x}$;

8) $y = e^{2x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + \dfrac{1}{4}e^{2x} + \dfrac{1}{10}\cos 2x + \dfrac{1}{20}\sin 2x$; **9)** $y = e^x[(2x - \pi - 1)\sin x - \pi\cos x]$;

10) $y = \cos 2x + \dfrac{1}{3}(\sin 2x + \sin x)$; **11)** $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + \left(-\dfrac{3}{10}x + \dfrac{17}{50}\right)\cos x + \left(\dfrac{1}{10}x + \dfrac{3}{25}\right)\sin x$;

12) $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x} + e^{3x}\left(\dfrac{6}{37}\sin x - \dfrac{\cos x}{37}\right)$; **13)** $y = \left(C_1 + \dfrac{x}{4} - \dfrac{x^3}{6}\right)\cos x + \left(C_2 + \dfrac{x^2}{4}\right)\sin x$;

14) $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + (0{,}1x - 0{,}12)\cos x - (0{,}3x + 0{,}34)\sin x$;

15) $y = x^2 + e^{3x}$ **; 16)** $y = \left(C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{x}{2} \cos x + x \sin x \right) e^{2x}$ **;**

17) $y = (C_1 + C_2 x)e^x + x^3 + 6x^2 + 18x + 24$ **; 18)** $y = (C_1 + C_2 x)e^{-x} + e^{-x}\left(\left(6 - x^2\right)\cos x + 4x \sin x\right)$**;**

19) $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \left(x^2/2 - x + 1\right)e^{3x}$**; 20)** $y = C_1 e^{-\sqrt{2}x} + C_2 e^{\sqrt{2}x} + xe^x \sin x + e^x \cos x$**.**

35.2 1) $y = (C_1 + C_2 x)\cos x + (C_3 + C_4 x)\sin x + (C_5 + C_6 x)e^x + C_7 +$

$+ x^2 A_1 e^x + x^2 [(A_2 x + A_3)\cos x + (A_4 x + A_5)\sin x] + A_6 x$;

2) $y = (C_1 + C_2 x)e^{5x} + C_3 e^{2x} + C_4 + C_5 x + C_6 x^2 + x\left(A_1 x^2 + A_2 x + A_3\right)e^{2x} +$

$+ x^3\left(A_4 + A_5 x + A_6 x^2 + A_7 x^3\right) + A_8 \cos 7x + A_9 \sin 7x$;

3) $y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{2x} + C_3 e^x + e^x (C_4 \cos x + C_5 \sin x) +$

$+ x^2 (A_1 x + A_2) + x A_3 e^x + + A_4 \cos x + A_5 \sin x$ **;**

4) $y = \mathrm{e}^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x) + C_3 \cos 9x + C_4 \sin 9x + (A_1 x + A_2)e^x + x(A_3 \cos 9x + A_4 \sin 9x)$**;**

5) $y = (C_1 + C_2 x)e^x + C_3 + C_4 \cos x + C_5 \sin x + \left(A_1 x^3 + A_2 x^2 + A_3 x + A_4\right)x + x^2 A_5 e^x$**;**

6) $y = (C_1 + C_2 x)e^{5x} + C_3 e^{7x} + e^x (C_4 \cos 7x + C_5 \sin 7x) +$

$+ C_6 \cos 7x + C_7 \sin 7x + e^{7x} x(A_1 x + A_2) + x(A_3 \cos 7x + A_4 \sin 7x)$;

7) $y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3 + e^x (C_5 \cos 4x + C_6 \sin 4x) + x^4 A_1 +$

$+ (A_2 x + A_3)\cos 4x + + (A_3 x + A_4)\sin 4x$ **;**

8) $y = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2)e^{4x} + e^{3x}(C_5 \cos 2x + C_6 \sin 2x) +$

$+ xe^{3x}(A_1 \cos 2x + A_2 \sin 2x) + + A_3 \cos 5x + A_4 \sin 5x$;

9) $y = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2)e^x + C_4 \cos x + C_5 \sin x + \mathrm{A}_1 x^2 + A_2 x + A_3$**;**

10) $y = C_1 + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x + \mathrm{A}_1 \cos x + A_2 \sin x + x(A_3 x + A_4)$**.**

35.3 1) VIII. **2)** I. **3)** IV. **4)** X. **5)** II. **6)** V. **7)** VIII. **8)** II, III. **9)** VI. **10)** X. **11)** VII. **12)** XI. **13)** VI. **14)** IV. **15)** II. **16)** V. **17)** IX. **18)** XI. **19)** III. **20)** VIII. **21)** II, III. **22)** I. **23)** XI. **24)** IX. **25)** III. **26)** VIII. **27)** XI. **28)** V. **29)** XII. **30)** I. **31)** VII. **32)** X. **33)** VI. **34)** II. **35)** XII.

35.4 1) $y = \cos 4x - \sin 4x + e^{4x}$**.** **2)** $y = 3e^{-2x} - 2e^{2x} + 2xe^{2x}$ **. 3)** $y = -2e^{-x} - 4xe^{-x} + 3\sin 2x$ **.**

4) $y = \frac{1}{64}(25 + 39e^{4x} - 28x - 24x^2)$ **. 5)** $y = -\frac{1}{90}e^{-9x}(7 - 10e^{9x} + 3e^{9x}\cos 3x - 9e^{9x}\sin 3x)$ **.**

6) $y = C_1 e^{-3x} + C_2 + \frac{x}{3} + \frac{2}{5}e^{2x} - \frac{1}{18}(\cos 3x + \sin 3x)$ **. 7)** $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + (4 - 2x)e^{-x}$ **;**

8) $y=C_1+C_2e^{-x}+x^2-3x$ **; 9)** $y=C_1\cos x+C_2\sin x+2-\frac{1}{15}\cos 2x-\frac{4}{15}\sin 2x$ **;**

10) $y=e^{-3x}\left(C_1\cos x+C_2\sin x\right)+\frac{1}{10}x^2-\frac{3}{25}x+\frac{13}{250}+\frac{4}{17}e^x$ **; 11)** $y=C_1e^{-4x}+C_2e^x-\frac{15}{34}\sin x$ **;**

12) $y=C_1e^{-x}+C_2xe^{-x}+4x^2e^{-x}$ **; 13)** $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{4}x$ **;**

14) $y=C_1e^x+C_2e^{3x}+(2x+3)e^{2x}$ **; 15)** $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}-\frac{1}{40}\left(5\cos 2x+16\sin 2x\right)$**.**

Занятие 36. Решение систем дифференциальных уравнений методом Эйлера и методом исключения

Аудиторные задания

36.1 Решить системы:

1) $\begin{cases}x'=y+t,\\ y'=x-t.\end{cases}$ **2)** $\begin{cases}x'=2x-5y,\\ y'=5x-6y.\end{cases}$ **3)** $\begin{cases}x'=y+2e^t,\\ y'=x+t^2.\end{cases}$ **4)** $\begin{cases}y'=x,\\ x'=-x+y.\end{cases}$ **5)** $\begin{cases}x'=2x-y,\\ y'=x+2e^t.\end{cases}$ **6)** $\begin{cases}x'=x-4y,\\ y'=x-3y.\end{cases}$

7) $\begin{cases}x'=x+y-\cos t,\\ y'=-2x-y+\sin t+\cos t.\end{cases}$ **8)** $\begin{cases}x'=x+5y, & x(0)=-2,\\ y'=-x-3y, & y(0)=1.\end{cases}$ **9)** $\begin{cases}x'=2x+y+2e^t,\\ y'=x+2y-3e^{4t}.\end{cases}$

10) $\begin{cases}x'=-x+2y, & x(0)=0,\\ y'=-2x-5y, & y(0)=1.\end{cases}$ **11)** $\begin{cases}x'=4x-3y+\sin t,\\ y'=2x-y-2\cos t.\end{cases}$ **12)** $\begin{cases}x'=y+z,\\ y'=x+z,\\ z'=x+y.\end{cases}$

13) $\begin{cases}x'=-3x-4y, & x(0)=1,\\ y'=-2x-5y, & y(0)=4.\end{cases}$ **14)** $\begin{cases}x'=3x-y,\\ y'=4x-y.\end{cases}$ **15)** $\begin{cases}x'=x+y,\\ y'=3y-2x.\end{cases}$ **16)** $\begin{cases}x'=x-y,\\ y'=x+y+e^t.\end{cases}$

17) $\begin{cases}x'=2y-x+1,\\ y'=3y-2x.\end{cases}$ **18)** $\begin{cases}x'=x-3y,\\ y'=3x+y.\end{cases}$ **19)** $\begin{cases}x'=2x+y,\\ y'=4y-x.\end{cases}$ **20)** $\begin{cases}x'=y+\mathrm{tg}^2\,t-1,\\ y'=-x+\mathrm{tg}\,t.\end{cases}$

21) $\begin{cases}x'=x+3y, & x(0)=3,\\ y'=-x+5y, & y(0)=1.\end{cases}$ **22)** $\begin{cases}x'=-x+8y,\\ y'=x+y.\end{cases}$ **23)** $\begin{cases}x'=x+2y,\\ y'=x-5\sin t.\end{cases}$ **24)** $\begin{cases}x'=\dfrac{1}{y},\\ y'=\dfrac{1}{x}.\end{cases}$

25) $\begin{cases}y'=-2y+z-e^{2x},\\ z'=-3y+2z+6e^{2x}.\end{cases}$ **26)** $\begin{cases}x'=5x-3y+2e^{3t},\\ y'=x+y+5e^{-t}.\end{cases}$ **27)** $\begin{cases}x'=y-5\cos t,\\ y'=2x+y.\end{cases}$

28) $\begin{cases}x'=-y+t^2,\\ y'=x+t.\end{cases}$ **29)** $\begin{cases}x'=2x-y,\\ y'=y-2x+18t.\end{cases}$ **30)** $\begin{cases}x'=-2y+3,\\ y'=2x-2t.\end{cases}$

Домашние задания

36.2 Решить системы:

1) $\begin{cases} x' = 2y - 5x + e^t, \\ y' = x - 6y + e^{-2t}. \end{cases}$ **2)** $\begin{cases} x' = y, & x(0) = 0, \\ y' = -x + 1, & y(0) = 1{,}5. \end{cases}$ **3)** $\begin{cases} x' = x + y, \\ y' = x - y. \end{cases}$ **4)** $\begin{cases} x' = 2x + y + \cos t, \\ y' = -x + 2\sin t. \end{cases}$

5) $\begin{cases} x' = 2x - y, \\ y' = 3x + 4y. \end{cases}$ **6)** $\begin{cases} x' = 3x - 2y, & x(0) = 1, \\ y' = 4x + 7y, & y(0) = 0. \end{cases}$ **7)** $\begin{cases} x' = x + y + t, \\ y' = -4x - 3y + 2t. \end{cases}$

8) $\begin{cases} x' = x + y, & x(0) = 0, \\ y' = -6x + 6y, & y(0) = -1. \end{cases}$ **9)** $\begin{cases} x' = -y + e^{3t}, \\ y' = -x + 2e^{3t}. \end{cases}$ **10)** $\begin{cases} x' = 4x + y - e^{2t}, \\ y' = y - 2x. \end{cases}$ **11)** $\begin{cases} x' = 2x - 4y, \\ y' = x - 3y + 3e^t. \end{cases}$

12) $\begin{cases} x' = 2x - 3y, \\ y' = x - 2y + 2\sin t. \end{cases}$ **13)** $\begin{cases} x' = 3x + y, & x(0) = -1, \\ y' = -3x + 7y, & y(0) = 1. \end{cases}$ **14)** $\begin{cases} x' = 6x - 3y, & x(0) = -2, \\ y' = x + 2y, & y(0) = 0. \end{cases}$

Ответы: 36.1 1) $\begin{cases} x = C_1e^t - C_2e^{-t} + t - 1, \\ y = C_1e^t + C_2e^{-t} - t + 1. \end{cases}$ **2)** $\begin{cases} x = e^{-2t}(C_1\cos 3t + C_2\sin 3t), \\ y = \frac{1}{5}e^{-2t}((4C_1 - 3C_2)\cos 3t + (3C_1 + 4C_2)\sin 3t). \end{cases}$

3) $\begin{cases} x = C_1e^t + C_2e^{-t} + te^t - t^2 - 2, \\ y = C_1e^t - C_2e^{-t} + (t-1)e^t - 2t. \end{cases}$ **4)** $\begin{cases} y = C_1\sin t - C_2\cos t + C_3e^t, \\ x = C_1\cos t + C_2\sin t + C_3e^t. \end{cases}$

5) $\begin{cases} x = \left(C_1 + C_2t - t^2\right)e^t, \\ y = \left[C_1 - C_2 + t(C_2 + 2) - t^2\right]e^t. \end{cases}$ **6)** $\begin{cases} x = (2C_1t + 2C_2 + C_1)e^{-t}, \\ y = (C_1t + C_2)e^{-t}. \end{cases}$

7) $\begin{cases} x = C_1\cos t + C_2\sin t - t\cos t, \\ y = (C_2 - C_1)\cos t - (C_1 + C_2)\sin t + t(\cos t + \sin t). \end{cases}$ **8)** $\begin{cases} x = -2e^{-t} + 3e^{-7t}, \\ y = e^{-t} + 3e^{-7t}. \end{cases}$

9) $\begin{cases} x = C_1e^t + C_2e^{3t} + te^t - e^{4t}, \\ y = -C_1e^t + C_2e^{3t} - (t+1)e^t - 2e^{4t}. \end{cases}$ **10)** $\begin{cases} x = 2te^{-3t}, \\ y = (1 - 2t)e^{-3t}. \end{cases}$

11) $\begin{cases} x = C_1e^t + 3C_2e^{2t} + \cos t - 2\sin t, \\ y = C_1e^t + 2C_2e^{2t} + 2\cos t - 2\sin t. \end{cases}$ **12)** $\begin{cases} x = C_1e^{-t} + C_2e^{2t}, \\ y = C_3e^{-t} + C_2e^{2t}, \\ z = -(C_1 + C_3)e^{-t} + C_2e^{2t}. \end{cases}$ **13)** $\begin{cases} x = -2e^{-t} + 3e^{-7t}, \\ y = e^{-t} + 3e^{-7t}. \end{cases}$

14) $\begin{cases} x = (C_1 + C_2t)e^t, \\ y = (2C_1 - C_2 + 2C_2t)e^t. \end{cases}$ **15)** $\begin{cases} x = e^{2t}(C_1\cos t + C_2\sin t), \\ y = e^{2t}[(C_1 + C_2)\cos t + (C_2 - C_1)\sin t]. \end{cases}$

16) $\begin{cases} x = (C_2\cos t + C_2\sin t - 1)e^t, \\ y = (C_1\sin t - C_2\cos t)e^t. \end{cases}$ **17)** $\begin{cases} x = (C_1 + 2C_2t)e^t - 3, \\ y = (C_1 + C_2 + 2C_2t)e^t - 2. \end{cases}$ **18)** $\begin{cases} x = e^t(C_1\cos 3t + C_2\sin 3t), \\ y = e^t(C_1\sin 3t - C_2\cos 3t). \end{cases}$

19) $\begin{cases} x=(C_1+C_2t)e^{3t}, \\ y=(C_1+C_2+C_2t)e^{3t}. \end{cases}$ **20)** $\begin{cases} x=C_1\cos t+C_2\sin t+tgt, \\ y=-C_1\sin t+C_2\cos t+2. \end{cases}$ **21)** $\begin{cases} x=3e^{2t}, \\ y=e^{2t}. \end{cases}$

22) $\begin{cases} x=2C_1e^{3t}-4C_2e^{-3t}, \\ y=C_1e^{3t}+C_2e^{-3t}. \end{cases}$ **23)** $\begin{cases} x=C_1e^{-t}+2C_2e^{2t}-\cos t+3\sin t, \\ y=-C_1e^{-t}+C_2e^{2t}+2\cos t-\sin t. \end{cases}$ **24)** $\begin{cases} C_1x^2=2t+C_2, \\ y^2=C_1(2t+C_2). \end{cases}$

25) $\begin{cases} y=2e^{2x}+C_1e^{x}+C_2e^{-x}, \\ z=9e^{2x}+3C_1e^{x}+C_2e^{-x}. \end{cases}$ **26)** $\begin{cases} x=C_1e^{2t}+3C_2e^{4t}-e^{-t}-4e^{3t}, \\ y=C_1e^{2t}+C_2e^{4t}-2e^{-t}-2e^{3t}. \end{cases}$

27) $\begin{cases} x=C_1e^{2t}+C_2e^{-t}-2\sin t-\cos t, \\ y=2C_1e^{2t}-C_2e^{-t}+\sin t+3\cos t. \end{cases}$ **28)** $\begin{cases} x=-C_1\sin t+C_2\cos t+t, \\ y=C_1\cos t+C_2\sin t+t^2-1. \end{cases}$

29) $\begin{cases} x=C_1e^{3t}+3t^2+2t+C_2, \\ y=-C_1e^{3t}+6t^2-2t+2C_2-2. \end{cases}$ **30)** $\begin{cases} x=C_1\cos 2t+C_2\sin 2t+t, \\ y=C_1\sin 2t-C_2\cos 2t+1. \end{cases}$

36.2 1) $\begin{cases} x=C_1e^{-4t}+C_2e^{-7t}+\dfrac{1}{5}e^{-2t}+\dfrac{7}{40}e^{t}, \\ y=\dfrac{1}{2}C_1e^{-4t}-C_2e^{-7t}+\dfrac{3}{10}e^{-2t}+\dfrac{1}{40}e^{t}. \end{cases}$ **2)** $\begin{cases} x=1-\cos t+1{,}5\sin t, \\ y=\sin t+1{,}5\cos t. \end{cases}$

3) $\begin{cases} x=C_1e^{-\sqrt{2}t}+C_2e^{-\sqrt{2}t}, \\ y=C_1(\sqrt{2}-1)e^{\sqrt{2}t}-C_2(\sqrt{2}+1)e^{-\sqrt{2}t}. \end{cases}$ **4)** $\begin{cases} x=(C_1+C_2t)e^{t}+\dfrac{1}{2}\cos t, \\ y=(C_2(1-t)-C_1)e^{t}-2\cos t-\dfrac{1}{2}\sin t. \end{cases}$

5) $\begin{cases} x=C_1e^{t}+C_2e^{5t}, \\ y=-C_1e^{t}+15C_2e^{5t}. \end{cases}$ **6)** $\begin{cases} x=e^{5t}(\cos 2t-\sin 2t), \\ y=2e^{5t}\sin 2t. \end{cases}$ **7)** $\begin{cases} x=(C_1+C_2t)e^{-t}+5t-9, \\ y=(C_2-2C_1-2C_2t)e^{-t}-6t+14. \end{cases}$

8) $\begin{cases} x=C_1e^{3t}+C_2e^{4t}, \\ y=2C_1e^{3t}+3C_2e^{4t}. \end{cases}$ **9)** $\begin{cases} x=C_1e^{t}+C_2e^{-t}+\dfrac{1}{8}e^{3t}, \\ y=-C_1e^{t}+C_2e^{-t}+\dfrac{5}{8}e^{3t}. \end{cases}$

10) $\begin{cases} x=C_1e^{2t}+C_2e^{3t}+(t+1)e^{2t}, \\ y=-2C_1e^{2t}-C_2e^{3t}-2te^{2t}. \end{cases}$ **11)** $\begin{cases} x=4C_1e^{t}+C_2e^{-2t}-4te^{t}, \\ y=C_1e^{t}+C_2e^{-2t}-(t-1)e^{t}. \end{cases}$

12) $\begin{cases} x=3C_1e^{t}+C_2e^{-t}+3\sin t, \\ y=C_1e^{t}+C_2e^{-t}-\cos t+2\sin t. \end{cases}$ **13)** $\begin{cases} x=C_1e^{4t}+C_2e^{6t}, \\ y=C_1e^{4t}+3C_2e^{6t}. \end{cases}$ **14)** $\begin{cases} x=C_1e^{3t}+3C_2e^{5t}, \\ y=C_1e^{3t}+C_2e^{5t}. \end{cases}$

ТИПОВОЙ РАСЧЕТ № 1
«ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ»

1. Для данной функции найти:

1) полный дифференциал в точке *M* при $\Delta x = 0{,}05; \Delta y = 0{,}03$;

2) градиент в точке *M*;

3) производную в точке *M* в направлении точки *N*;

4) используя полный дифференциал, вычислить приближенное значение функции в точке *P*;

5) экстремумы;

6) условные экстремумы, если переменные связаны заданным условием;

7) наименьшее и наибольшее значения функции в заданной области.

2. В таблице приведены значения *Y* и *X*. Методом наименьших квадратов найти коэффициенты a_i уравнений, полагая, что между этими величинами существует:

1) линейная зависимость вида $y = ax + b$;

2) квадратичная зависимость вида $y = ax^2 + bx + c$.

Вариант 1

1. $z = xy(4 - x - y)$.

1) $M(1,-1)$; 2) $M(1,-1)$; 3) $M(1,-1); N(2,3)$; 4) $P(1{,}02;-0{,}98)$; 6) $2x - y + 5 = 0$; 7) в треугольнике: $x = 0,\ y = 0,\ x + y = 3$.

2.

X	1	3	4	6	7
Y	2	2,5	3	3,5	5

Вариант 2

1. $z = \dfrac{(x-2)^2}{9} + \dfrac{(y+3)^2}{4} + 3$.

1) $M(2,1)$; 2) $M(2,1)$; 3) $M(2,1); N(2,3)$; 4) $P(1{,}03;1{,}01)$; 6) $2x + y + 5 = 0$; 7) в треугольнике: $x = 0,\ y = 0,\ x + y = 4$.

2.

X	2	2,5	4	4,5	5
Y	1,5	3	3,5	4	3,5

Вариант 3

1. $z = x^3 + y^3 - 12xy$.

1) $M(1,1)$; 2) $M(1,1)$; 3) $M(1,1); N(2,3)$; 4) $P(-0{,}98;1{,}01)$; 6) $2x - y + 1 = 0$; 7) в треугольнике: $x = 0,\ y = 0,\ x + y = 1$.

2.

X	2,5	3	3,5	4,5	6
Y	2	4	3,5	4	4,5

Вариант 4

1. $z = x^2 + y^2 - 12xy + 3$.

1) $M(-1,-1)$; 2) $M(-1,-1)$; 3) $M(-1,-1); N(2,3)$; 4) $P(1{,}03;0{,}98)$; 6) $2x + y + 1 = 0$; 7) в треугольнике: $x = 0,\ y = 0,\ x + y = -1$.

2.

X	1,5	2	2,5	3,5	4
Y	1	2	2,5	3	2,5

Вариант 5

1. $z = 4x^2 - y^2 - 4x + 2y + 5$.

1) $M(1,2)$; 2) $M(1,2)$; 3) $M(1,2); N(2,3)$; 4) $P(0{,}97;-0{,}98)$; 6) $x - y + 5 = 0$; 7) в треугольнике: $x = 0,\ y = 0,\ x + y = 2$.

2.

X	3	3,5	4	4,5	5,5
Y	1	1,5	2	3	3,5

Вариант 6

1. $z = 5x^2 + y^2 - 4xy + 6x - 8y + 1$.

1) $M(2,-1)$; 2) $M(2,-1)$; 3) $M(2,-1); N(2,3)$; 4) $P(0{,}95;1{,}03)$; 6) $3x - y + 5 = 0$; 7) в треугольнике: $x = 0,\ y = 0,\ x + y = 1$.

2.

X	2	2,5	3	3,5	5
Y	2	3	3,5	4	4

Вариант 7

1. $z = 8(x - y) - x^2 - 2y^2$.

1) $M(1{,}0)$; 2) $M(1{,}0)$; 3) $M(1{,}0)$; $N(2{,}3)$; 4) $P(1{,}01;-0{,}98)$; 6) $x - y + 1 = 0$; 7) в треугольнике: $x = 0,\ y = 0,\ x + y = 2$.

2.

X	3,5	4	5	5,5	6
Y	1	1,5	2	2,5	4

Вариант 8

1. $z = x^2 + 2xy + y^2 + 4x - 12y + 1$.

1) $M(0,-1)$; 2) $M(0,-1)$; 3) $M(0,-1)$; $N(2{,}3)$; 4) $P(1{,}02;-0{,}98)$; 6) $3x - y + 1 = 0$; 7) в треугольнике: $x = 0,\ y = 0,\ x + y = 1$.

2.

X	2	2,5	3	3,5	5
Y	4	3	2,5	2	1

Вариант 9

1. $z = \dfrac{(x-3)^2}{4} - \dfrac{(y+2)^2}{9} + 1$.

1) $M(1{,}1)$; 2) $M(1{,}1)$; 3) $M(1{,}1)$; $N(2{,}3)$; 4) $P(1{,}05;1{,}02)$; 6) $x - y + 3 = 0$; 7) в треугольнике: $x = 0,\ y = 0,\ x + y = 2$.

2.

X	1	1,5	3	3,5	4
Y	3,5	2	2,5	3	2,5

Вариант 10

1. $z = (x-2)^2 + \dfrac{(y-1)^2}{4}$.

1) $M(1,-2)$; 2) $M(1,-2)$; 3) $M(1,-2)$; $N(2{,}3)$; 4) $P(0{,}96;-0{,}98)$; 6) $2x - y + 1 = 0$; 7) в треугольнике: $x = 0,\ y = 0,\ x + y = -2$.

2.

X	1,5	2	3	3,5	4,5
Y	2	2,5	4	3	3,5

Вариант 11

1. $z = x^2 + 4xy + 3y^2 - 2x + 4y + 4$.

1) $M(2,-1)$; 2) $M(2,-1)$; 3) $M(2,-1); N(2,3)$; 4) $P(1,02;-1,05)$; 6) $2x - 3y + 6 = 0$; 7) в треугольнике: $x = 0,\ y = 0,\ x + y = 1$.

2.

X	2	2,5	3,5	4	4,5
Y	3	3,5	2,5	2	2,5

Вариант 12

1. $z = 2xy - 3x^2 + 2y^2 + 6$.

1) $M(0,-1)$; 2) $M(0,-1)$; 3) $M(0,-1); N(2,3)$; 4) $P(1,03;-0,95)$; 6) $2x - 3y - 6 = 0$; 7) в треугольнике: $x = 0,\ y = 0,\ x + y = -2$.

2.

X	3	3,5	4	4,5	6
Y	1	1,5	2,5	2	2,5

Вариант 13

1. $z = x^2 - 4xy + 2y^2 + 4x - 4y + 3$.

1) $M(1,-1)$; 2) $M(1,-1)$; 3) $M(1,-1); N(2,3)$; 4) $P(1,02;-0,98)$; 6) $3x - y + 6 = 0$; 7) в треугольнике: $x = 0,\ y = 0,\ x + y = 2$.

2.

X	2	2,5	3	3,5	4,5
Y	2,5	3	4	3,5	4

Вариант 14

1. $z = x^2 + 2y^2 - 6xy + 5$.

1) $M(1,-2)$; 2) $M(1,-2)$; 3) $M(1,-2); N(2,3)$; 4) $P(1,05;-0,98)$; 6) $2x - y + 1 = 0$; 7) в треугольнике: $x = 0,\ y = 0,\ x + y = 5$.

2.

X	2,5	3	3,5	4	5
Y	3	3,5	4	3,5	4,5

Вариант 15

1. $z = x^2 + 3y^2 + 4xy - 3x + 6y + 10$.

1) $M(2,-1)$; 2) $M(2,-1)$; 3) $M(2,-1); N(2,3)$; 4) $P(1{,}03;-0{,}97)$; 6) $x - y + 5 = 0$; 7) в треугольнике: $x = 0,\ y = 0,\ x + y = -1$.

2.

X	2	3	4	4,5	5
Y	4	4,5	5	4,5	5,5

Вариант 16

1. $z = -x^2 + 3y^2 + 6xy - 2x + 3$.

1) $M(1,1)$; 2) $M(1,1)$; 3) $M(1,1); N(2,3)$; 4) $P(1{,}02;-0{,}95)$; 6) $x - y + 1 = 0$; 7) в треугольнике: $x = 0,\ y = 0,\ x + y = 2$.

2.

X	1	1,5	2	2,5	3
Y	3	3,5	4,5	4	4,5

Вариант 17

1. $z = 2xy - x^2 + y^2 - 2x + 3$.

1) $M(3,-1)$; 2) $M(3,-1)$; 3) $M(3,-1); N(2,3)$; 4) $P(1{,}03;-0{,}97)$; 6) $3x - y + 6 = 0$; 7) в треугольнике: $x = 0,\ y = 0,\ x + y = -2$.

2.

X	1,5	2	2,5	3	3,5
Y	2	2,5	3,5	4	4,5

Вариант 18

1. $z = x^2 + 4y^2 + 2xy - 4x + 8y + 5$.

1) $M(1,0)$; 2) $M(1,0)$; 3) $M(1,0); N(2,3)$; 4) $P(1{,}02;-0{,}95)$; 6) $x - 2y + 4 = 0$; 7) в треугольнике: $x = 0,\ y = 0,\ x + y = 3$.

2.

X	1	1,5	2	3	4
Y	3	3,5	4,5	4	5

Вариант 19

1. $z = xy^2(2 - x - y)$.

1) $M(2,-1)$; 2) $M(2,-1)$; 3) $M(2,-1)$; $N(2,3)$; 4) $P(-0{,}98;1{,}02)$; 6) $2x - y + 1 = 0$; 7) в треугольнике: $x = 0,\ y = 0,\ x + y = 2$.

2.

X	3	3,5	4	4,5	5
Y	2	2,5	3	2,5	3

Вариант 20

1. $z = -x^2 + y^2 + 6xy - 2x + 3$.

1) $M(3,-1)$; 2) $M(3,-1)$; 3) $M(3,-1)$; $N(2,3)$; 4) $P(1{,}05;-0{,}95)$; 6) $2x - y + 1 = 0$; 7) в треугольнике: $x = 0,\ y = 0,\ x + y = -1$.

2.

X	3,5	4	4,5	6	6,5
Y	1	1,5	2	3	3,5

Вариант 21

1. $z = xy^2(1 - x - y)$.

1) $M(1,2)$; 2) $M(1,2)$; 3) $M(1,2)$; $N(2,3)$; 4) $P(1{,}01;-0{,}95)$; 6) $2x - y + 4 = 0$; 7) в треугольнике: $x = 0,\ y = 0,\ x + y = 1$.

2.

X	2	2,5	3	3,5	4
Y	2,5	3	4	3,5	3,5

Вариант 22

1. $z = x^2 + 4xy + 3y^2 - 2x + 4y + 4$.

1) $M(1,-1)$; 2) $M(1,-1)$; 3) $M(1,-1)$; $N(2,3)$; 4) $P(1{,}05;-0{,}96)$; 6) $x - y + 3 = 0$; 7) в треугольнике: $x = 0,\ y = 0,\ x + y = -2$.

2.

X	3	3,5	4	4,5	5
Y	2	2,5	3,5	3	4

Вариант 23

1. $z = x^2 - 6xy + 2y^2 + 4x - 4y + 3$.

1) $M(2,-1)$; 2) $M(2,-1)$; 3) $M(2,-1); N(2,3)$; 4) $P(0{,}98;1{,}02)$; 6) $x - 3y + 3 = 0$; 7) в треугольнике: $x = 0,\ y = 0,\ x + y = 1$.

2.

X	1	1,5	2	2,5	3
Y	2	2,5	3	2,5	3,5

Вариант 24

1. $z = x^2 + 2xy + 4y^2 - 4x + 8y + 5$.

1) $M(1,-2)$; 2) $M(1,-2)$; 3) $M(1,-2); N(2,3)$; 4) $P(1{,}03;-0{,}95)$; 6) $2x - y + 4 = 0$; 7) в треугольнике: $x = 0,\ y = 0,\ x + y = 1$.

2.

X	3,5	4	4,5	5	6
Y	1,5	2	2,5	4	3,5

Вариант 25

1. $z = -x^2 + y^2 + 6xy - 2x + 3$.

1) $M(2,-1)$; 2) $M(2,-1)$; 3) $M(2,-1); N(2,3)$; 4) $P(1{,}02;-0{,}98)$; 6) $2x - y + 5 = 0$; 7) в треугольнике: $x = 0,\ y = 0,\ x + y = 3$.

2.

X	2	2,5	3	3,5	4
Y	1,2	1,4	1,4	1,6	1,7

Вариант 26

1. $z = 2x^2 + y^2 - 4xy + 6x - 8y + 1$.

1) $M(-1,-1)$; 2) $M(-1,-1)$; 3) $M(-1,-1); N(2,3)$; 4) $P(1{,}05;-0{,}97)$; 6) $x - y + 3 = 0$; 7) в треугольнике: $x = 0,\ y = 0,\ x + y = -2$.

2.

X	2	3	3,5	5	6
Y	1,3	1,5	1,8	1,6	1,8

Вариант 27

1. $z = xy^2(1 - x - y)$.

1) $M(-2,1)$; 2) $M(-2,1)$; 3) $M(-2,1)$; $N(2,3)$; 4) $P(1{,}01;-0{,}95)$; 6) $x - 2y + 12 = 0$; 7) в треугольнике: $x = 0,\ y = 0,\ x + y = -1$.

2.

X	1	3	4	4,5	5
Y	1,1	1,5	1,6	1,5	1,7

Вариант 28

1. $z = x^2 + 2y^2 - 4xy + 8x - 6y + 1$.

1) $M(2,-1)$; 2) $M(2,-1)$; 3) $M(2,-1)$; $N(2,3)$; 4) $P(1{,}03;-0{,}97)$; 6) $3x - y + 3 = 0$; 7) в треугольнике: $x = 0,\ y = 0,\ x + y = 2$.

2.

X	2	3	3,5	5	6
Y	1,3	1,5	1,8	1,6	1,8

Вариант 29

1. $z = x^2 + 4y^2 - 8xy + x - y + 1$.

1) $M(-1,2)$; 2) $M(-1,2)$; 3) $M(-1,2)$; $N(2,3)$; 4) $P(1{,}05;-0{,}96)$; 6) $x - 3y + 6 = 0$; 7) в треугольнике: $x = 0,\ y = 0,\ x + y = 3$.

2.

X	2	3	3,5	5	6
Y	1,3	1,5	1,8	1,6	1,8

Вариант 30

1. $z = x^2 + 6y^2 - 12xy + 6x - 4y + 1$.

1) $M(-1,-1)$; 2) $M(-1,-1)$; 3) $M(-1,-1)$; $N(2,3)$; 4) $P(0{,}98;-0{,}97)$; 6) $x - y + 1 = 0$; 7) в треугольнике: $x = 0,\ y = 0,\ x + y = 2$.

2.

X	1	1,5	2	2,5	3
Y	1,2	1,5	1,7	1,5	1,8

ТИПОВОЙ РАСЧЕТ № 2

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ И ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛЫ

В заданиях:

1–6 – найти неопределенные интегралы;

7 – вычислить определенный интеграл;

8 – вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость.

Вариант 1

1. $\int \frac{xdx}{2x+1}$; 2. $\int (2x-1)\sin^2 xdx$; 3. $\int \frac{xdx}{2+\sqrt{x+4}}$; 4. $\int \sin^3 2x \cos^2 2x\, dx$;

5. $\int \frac{x^4+2x^2+3}{x^3-8}dx$; 6. $\int \frac{\operatorname{arctg} 2x}{1+4x^2}dx$; 7. $\int_0^1 \frac{e^{2x}\,dx}{\sqrt{e^x+1}}$; 8. $\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{4+x^2}$.

9. Вычислить площадь трапеции, ограниченной линиями $\rho = a\cos\varphi, \rho = 2a\cos\varphi$.

10. Найти длину полукубической параболы $y^2 = \frac{2}{3}(x-1)^2$, заключенную внутри параболы $y^2 = \frac{x}{3}$.

Вариант 2

1. $\int x^2 e^{x^3}\, dx$; 2. $\int \sqrt[3]{x}\ln xdx$; 3. $\int \frac{\sin^2 x + x\sin 2x}{x\sin^2 x}dx$; 4. $\int \sin^4 \frac{3}{2}xdx$;

5. $\int \frac{2x+3}{x(x^2+2x-3)}dx$; 6. $\int \frac{\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt{x}+1}dx$; 7. $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{4+\ln x}}$; 8. $\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^3}$.

9. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = 2 - x$.

10. Найти длину кардиоиды $\rho = 2(1-\sin\varphi)$.

Вариант 3

1. $\int \frac{\sin xdx}{4+\cos^2 x}$; 2. $\int e^x \cos 2xdx$; 3. $\int \sin^2 x \cos xdx$; 4. $\int \frac{dx}{\cos x + 3\sin x}$;

5. $\int \frac{(x^2+1)\,dx}{x^3+4x^2}$; 6. $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x}+1}$; 7. $\int_1^4 \frac{1+\sqrt{y}}{y^2}dy$; 8. $\int_0^{+\infty} x e^{-x^2}\, dx$.

9. Найти площадь криволинейной трапеции ограниченной линией $\rho = a(1-\cos\varphi)$.

10. Найти объем тела, полученного вращением криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = 2 - x$, $y = 0$, вокруг оси Ox.

Вариант 4

1. $\int \frac{x^2dx}{9-x^3}$; 2. $\int \operatorname{arctg} 2x dx$; 3. $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$; 4. $\int \frac{2\sqrt{\ln x}\,dx}{x}$;

5. $\int \frac{x^3dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$; 6. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x}+4}$; 7. $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos^3 x}dx$; 8. $\int\limits_1^e \frac{dx}{x\ln^2 x}$.

9. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $xy = 6$, $x + y = 7$.

10. Найти периметр фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$.

Вариант 5

1. $\int \frac{dx}{\sin^2 x\sqrt{1-ctgx}}$; 2. $\int \ln 4x dx$; 3. $\int \frac{dx}{\arccos x\sqrt{1-x^2}}$; 4. $\int \frac{6\sin x+\cos x}{1+\cos x}dx$;

5. $\int \frac{x^4dx}{x^3+1}$; 6. $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{x^2}+2}dx$; 7. $\int\limits_1^e \frac{\ln x+4x^2}{x}dx$; 8. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{xdx}{(1+x^2)^2}$.

9. Найти длину дуги кривой $y = e^x - 1$ от точки $(0;\,0)$ до точки $(1;\,e-1)$.

10. Найти объем тела, полученного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = 0$, $x = 2$, вокруг оси Oy.

Вариант 6

1. $\int \frac{\cos^2 x\,dx}{\sin^4 x}$; 2. $\int x\arccos 2x dx$; 3. $\int \frac{2\operatorname{tg} x+3}{\sin^2 x+2\cos^2 x}dx$; 4. $\int x\sin(1-3x^2)dx$;

5. $\int \frac{x^5+2x-1}{x^4-1}dx$; 6. $\int \frac{\sqrt{2x+1}dx}{4+\sqrt{2x+1}}$; 7. $\int\limits_0^{\pi/3} \sin^2 x dx$; 8. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1}$.

9. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $x = t - \sin t$, $y = 1 + \cos t$, $0 \le t \le \pi$.

10. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции, ограниченной линиями: $xy = 1$, $x = 3$, $y = 3$.

Вариант № 7

1. $\int \frac{1+\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}dx$; 2. $\int \frac{2x-1}{\cos^2 x}dx$; 3. $\int x^2\sqrt{1-3x^3}\,dx$; 4. $\int \frac{dx}{\cos x-3\sin x}$;

5. $\int \frac{x^2+3x+1}{x^3+2x^2-3x}dx$; 6. $\int \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}}dx$; 7. $\int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx$; 8. $\int\limits_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

9. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $\rho = 2\cos 3\varphi$.

10. Вычислить длину кривой $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$.

Вариант 8

1. $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^4}}$; 2. $\int \ln(1+x^2)dx$; 3. $\int e^{\sqrt{x}}\frac{dx}{\sqrt{x}}$; 4. $\int \frac{dx}{5+2\sin x+3\cos x}$;

5. $\int \frac{x^3+2x^2}{(x-1)(x^2+1)}dx$; 6. $\int \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}(\sqrt[3]{x+1}+1)}dx$; 7. $\int\limits_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$; 8. $\int\limits_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$.

9. Вычислить длину кривой $y=\ln x$ от точки $(1;0)$ до точки $(e;1)$.

10. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линией $x=\cos t,\ y=3\sin t,\ 0\le t\le \pi/2$.

Вариант 9

1. $\int \frac{(1+\sqrt{x})^5dx}{\sqrt{x}}$; 2. $\int (2x-1)e^{4x}dx$; 3. $\int \frac{x^6dx}{10+x^7}$; 4. $\int \sin^4 2x\cos^2 2x dx$;

5. $\int \frac{4-3x}{x^3+8x^2}dx$; 6. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+2}}$; 7. $\int\limits_4^9 \frac{y+1}{\sqrt{y}-1}dx$; 8. $\int\limits_1^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}\frac{dx}{\sqrt{x}}$.

9. Найти площадь фигуры ограниченной линией $\rho=2a\sin\varphi$.

10. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $y^2=x,\ x=4$.

Вариант 10

1. $\int x^2\sin x^3dx$; 2. $\int x^2\sin 3xdx$; 3. $\int (x^2+1)e^{x^3+3x}dx$; 4. $\int \frac{\sqrt{\sin x}\,dx}{\sqrt{\cos^5 x}}$;

5. $\int \frac{x^2+1}{x^3+2x^2+3x}dx$; 6. $\int \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[6]{x}}dx$; 7. $\int\limits_0^{\ln 4} \frac{dx}{e^x+1}$; 8. $\int\limits_0^1 \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

9. Найти длину кривой $\rho=4\sin\varphi$.

10. Найти площадь фигуры, ограниченную линией $x=4\cos t,\ y=3\sin t$.

Вариант 11

1. $\int (1+\operatorname{ctg}^3 x)\frac{dx}{\sin^2 x}$; 2. $\int (x^2+1)\ln xdx$; 3. $\int \sqrt{9-x^2}\,dx$; 4. $\int \frac{dx}{2\cos x+3}$;

5. $\int \frac{x^2+4}{x^3+x}dx$; 6. $\int \frac{\sqrt{2x-1}\,dx}{\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[6]{2x-1}}$; 7. $\int\limits_0^{\pi/2} \cos x 2^{\sin x}dx$; 8. $\int\limits_1^2 \frac{x^3dx}{\sqrt{16-x^4}}$.

9. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: $x^2=16x-4y,\ x=4+y$.

10. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $x^2 - y^2 = a^2$, $x = 2a$.

Вариант № 12

1. $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$; 2. $\int \frac{\ln x}{x^4}dx$; 3. $\int x^3 e^{4x^4} dx$; 4. $\int \operatorname{tg}^4 3x dx$;

5. $\int \frac{2x+9}{x^4 - x^2 - 12}dx$; 6. $\int \frac{\sqrt[6]{x}dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$; 7. $\int\limits_1^{e^2} \frac{\ln^2 x}{x}dx$; 8. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^3+1)^4}$.

9. Найти длину кривой $y = \ln\cos x$ от точки $(0;\, 0)$ до точки $(\frac{\pi}{4}; \ln\frac{\sqrt{2}}{2})$.

10. Найти площадь фигуры, ограниченной одним витком $\rho = 2\varphi$.

Вариант 13

1. $\int \operatorname{tg}3x dx$; 2. $\int (4x-1)\cos^2 2x dx$; 3. $\int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$; 4. $\int \frac{dx}{5\sin^2 x - 3\cos^2 x}$;

5. $\int \frac{3x+4}{x^3+5x^2-6x}dx$; 6. $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{1-\sqrt[4]{x}}$; 7. $\int\limits_0^{\sqrt{3}} x^3\sqrt{1+x^2}\,dx$; 8. $\int\limits_1^2 \frac{x\,dx}{(x-1)^2}$.

9. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: $y^2 = x+5$, $y^2 = 4-x$.

10. Найти длину кривой $x = e^t\cos t$, $y = e^t \sin t$ $(0 \le t \le 1)$.

Вариант № 14

1. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$; 2. $\int \ln^2 2x dx$; 3. $\int e^x \cos e^x\, dx$; 4. $\int \operatorname{ctg}^3 3x dx$;

5. $\int \frac{3x+8}{x^3-x}dx$; 6. $\int \frac{\sqrt[6]{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt{x+1}}dx$; 7. $\int\limits_1^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$; 8. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{x}dx$.

9. Найти площадь фигуры, ограниченной линией $\rho = 4\sin 2\varphi$.

10. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 9 - x$, $x = 0$.

Вариант 15

1. $\int \cos x\sqrt{1-\sin x}\,dx$; 2. $\int \frac{xdx}{\sin^2 2x}$; 3. $\int x4^{x^2} dx$; 4. $\int \frac{dx}{2+\cos x}$;

5. $\int \frac{2x-1}{x^4+5x^2+6}dx$; 6. $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx$; 7. $\int\limits_0^{\pi/3} \sin x\cos^2 x\,dx$; 8. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin\left(1/x^2\right)}{x^3}dx$.

9. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \dfrac{1}{1+x^2}$, $y = \dfrac{x^2}{2}$.

10. Найти длину кривой $x = 2(\cos t + t\sin t)$, $y = 2(\sin t - t\cos t)$, $0 \le t \le \pi$.

Вариант 16

1. $\int \dfrac{\sqrt{1-2\ln x}}{x}dx$; 2. $\int e^{2x}\sin^2 x dx$; 3. $\int \dfrac{2x+3}{x^2+x+2}dx$; 4. $\int \sin^4 2x\cos^4 2x dx$;

5. $\int \dfrac{3x^2+4x-1}{x^4+x^2}dx$; 6. $\int \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[6]{x}}dx$; 7. $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} \operatorname{tg}^2 x dx$; 8. $\int\limits_{+1}^{4} \dfrac{x dx}{x^2-1}$.

9. Найти длину кривой $y^2 = (x-1)^3$ от точки $(1;0)$ до точки $(6;\sqrt{125})$.

10. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - x$, $y = 0$.

Вариант 17

1. $\int 2^x\sqrt{1+2^x}dx$; 2. $\int \dfrac{3x+5}{\cos^2 3x}dx$; 3. $\int \dfrac{4x-3}{\sqrt{2-2x-x^2}}dx$; 4. $\int \dfrac{\sin 2x dx}{4\sin^2 x+\cos^2 x}$;

5. $\int \dfrac{x^4+x^2+1}{x^4-8x^2-9}dx$; 6. $\int \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{x}-1}dx$; 7. $\int\limits_{0}^{\pi/6} \sin^3 2x dx$; 8. $\int\limits_{1}^{2} \dfrac{x^2 dx}{x^3-1}$.

9. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 9x$, $y = 3x$.

10. Вычислить длину кривой $x = 5\cos^2 t,\ y = 5\sin^2 t\ (0 \le t \le \pi/2)$.

Вариант 18

1. $\int \dfrac{4x-1}{\sqrt{2x^2-x+3}}dx$; 2. $\int x\operatorname{arctg}2x dx$; 3. $\int \sin 2x\cos^2 x dx$; 4. $\int \operatorname{tg}^5 2x dx$;

5. $\int \dfrac{x^2+4x-3}{x^4+4x^2}dx$; 6. $\int \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}(\sqrt[3]{x}+1)}dx$; 7. $\int\limits_{0}^{\pi/2} \dfrac{dx}{3+5\cos x}$; 8. $\int\limits_{0}^{1} \dfrac{dx}{\sqrt[3]{2-4x}}$.

9. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: $xy = 4$, $y = 1$, $y = 4$, $x = 0$.

10. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями: $y = 2x$, $y = x$, $x = 3$.

Вариант 19

1. $\int \frac{\operatorname{ctg}^3 x}{\sin^2 x}dx$; 2. $\int \frac{\ln^2 x}{x^2}dx$; 3. $\int \frac{x^2 dx}{2x^2+1}$; 4. $\int \frac{\sin x dx}{1+\cos x}$;

5. $\int \frac{x^4+2x-1}{8-x^3}dx$; 6. $\int \frac{x+2}{1+\sqrt{x+1}}dx$; 7. $\int\limits_0^{\pi/4} \sin^5 x dx$; 8. $\int\limits_1^{+\infty} e^{-x^2} x\, dx$.

9. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y=\sin x$, $y=0$ $(0\le x\le \pi)$.

10. Найти длину кривой $x=8\sin t+6\cos t$, $y=6\sin t-8\cos t$ $(0\le t\le \pi/2)$.

Вариант 20

1. $\int 3^{\operatorname{tg} 3x}\frac{dx}{\cos^2 3x}$; 2. $\int x^2 e^{3x}dx$; 3. $\int \frac{4x+1}{x+2}dx$; 4. $\int \frac{dx}{\sin^2 x+6\sin x\cos x-16\cos^2 x}$;

5. $\int \frac{x^3+x-1}{x^3-2x^2+x}dx$; 6. $\int \frac{x-1}{x\sqrt{x-2}}dx$; 7. $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin 2x}{4+\cos^2 x}dx$; 8. $\int\limits_0^{\pi/4} 4^{\operatorname{ctg} x}\frac{dx}{\sin^2 x}$.

9. Найти площадь фигуры, ограниченной линией: $\rho=3\cos\varphi$.

10. Найти длину кривой $y=\mathrm{e}^{-x}$ от точки $(0;1)$ до точки $(5;\mathrm{e}^{-5})$.

Вариант 21

1. $\int \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x+5}}dx$; 2. $\int \arccos 2x dx$; 3. $\int 2^x tg 2^x dx$; 4. $\int \frac{2-\sin x+3\cos x}{1+\cos x}dx$;

5. $\int \frac{4x^2+38}{(x+1)(x^2-4x+13)}dx$; 6. $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{3x+\sqrt[3]{x^2}}$; 7. $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{x\,dx}{\cos^2 3x}$; 8. $\int\limits_{\mathrm{e}^2}^{+\infty} \frac{dx}{x\ln\ln x\ln x}$.

9. Найти площадь фигуры, ограниченной линией $\rho=4\cos 3\varphi$.

10. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $y=x^2$, $y=2-x$, $x=0\,(x>0)$.

Вариант 22

1. $\int \frac{\sqrt[3]{\ln^2 x}}{x}dx$; 2. $\int (2x+3)2^x dx$; 3. $\int \frac{4x-1}{x^2+2x+2}dx$; 4. $\int \operatorname{ctg}^6 3x\,dx$;

5. $\int \frac{6x\,dx}{x^3-1}$; 6. $\int \frac{\sqrt{x+3}\,dx}{1+\sqrt[3]{x+3}}$; 7. $\int\limits_{\pi/12}^{\pi/9} \operatorname{ctg} 3x\,dx$; 8. $\int\limits_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

9. Найти площадь фигуры, ограниченной линией $x=4\cos t$, $y=9\sin t$.

10. Найти длину кривой $\rho=4(1-\sin\varphi)$.

Вариант 23

1. $\int \sin 2x\sqrt{1+\sin^2 x}\,dx$; 2. $\int \log_2(3x-1)\,dx$; 3. $\int \frac{x-1}{\sqrt{13-6x+x^2}}dx$; 4. $\int \frac{dx}{2\sin x+3\cos x+3}$;

5. $\int \frac{3x-1}{x^4+13x^2+36}dx$; 6. $\int \frac{x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}{x(1+\sqrt[3]{x})}dx$; 7. $\int\limits_{\pi/16}^{\pi/12} \cos^2 4x\,dx$; 8. $\int\limits_1^2 \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{(x^2-1)^3}}$.

9. Найти длину кривой $y=\ln\sin x$ $\left(\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{\pi}{3}\right)$.

10. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями: $xy=4$, $y=x$, $x=1$.

Вариант 24

1. $\int \frac{\sin x}{\mathrm{e}^{\cos x}}dx$; 2. $\int \frac{x\,\mathrm{arctg}\,x}{\sqrt{1+x^2}}dx$; 3. $\int \frac{3x-4}{x^2+6x+13}dx$; 4. $\int \frac{dx}{4\sin^2 x+8\sin x\cos x}$;

5. $\int \frac{x^4dx}{x^4+5x^2+4}$; 6. $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{2+\sqrt[4]{x}}$; 7. $\int\limits_1^{\mathrm{e}/2} \ln 2x\,dx$; 8. $\int\limits_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x}\,dx$.

9. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $xy=9$, $y=x$, $x=5$.

10. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями: $y^2=x$, $x=4$.

Вариант 25

1. $\int \frac{\mathrm{arctg}^2 x}{1+x^2}dx$; 2. $\int (x^2-2x+1)\mathrm{e}^{3x}\,dx$; 3. $\int \frac{8x-5}{\sqrt{x^2+4x+5}}dx$; 4. $\int \mathrm{ctg}^5 4x\,dx$;

5. $\int \frac{x^3+2x+3}{x^4-16}dx$; 6. $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{4x+\sqrt[3]{x^2}}$; 7. $\int\limits_1^{\sqrt{3}} x\sqrt{4-x^2}\,dx$; 8. $\int\limits_0^1 \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}\,dx$.

9. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=x^2$, $y=4-3x^2$.

10. Найти длину кривой $\rho=5(1+\cos\varphi)$.

ТИПОВОЙ РАСЧЕТ № 3
ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Вариант 1

1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $x^2 + y^2 = 4$ и $y^2 = 4(1 - x)$ (вне параболы).

2. Вычислить массу тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 + z^2 = 4;\ x^2 + y^2 = 3z$, если плотность в каждой точке равна аппликате точки.

3. Вычислить $\int\limits_L \frac{dS}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ по отрезку прямой $y = \frac{1}{2}x - 2$ от точки $A(0,-2)$ до точки $B(4,0)$.

4. Вычислить $\int\limits_L xydx$ по дуге синусоиды $y = \sin x$ от $x = \pi$ до $x = 0$.

5. Вычислить площадь части поверхности $x + 6y + 2z = 12$, лежащей в первом октанте.

6. Вычислить поток вектора $\vec{a} = (x + y)\vec{i} + (y - x)\vec{j} + z\vec{k}$ через поверхность шара единичного радиуса с центром в начале координат.

Вариант 2

1. Найти массу фигуры, ограниченной линиями $y = x^2;\ x + y = 2$, если плотность ее в каждой точке равна ординате этой точки.

2. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z = 1 - x^2 - y^2;\ y = x;\ y = x\sqrt{3}$, расположенного в первом октанте.

3. Вычислить $\int\limits_L \sqrt{x^2 + y^2}\,dl$, где L – кривая, $\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t), \\ y = a(\sin t - t\cos t), \end{cases}$ $(0 \le t \le 2\pi)$.

4. Найти функцию z по ее полному дифференциалу $dz = \left(\frac{1}{y} - \frac{y}{x^2}\right)dx + \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{y^2}\right)dy$.

5. Вычислить $\iint\limits_S xdydz + ydxdz + zdxdy$, где S положительная сторона поверхности куба, ограниченного плоскостями $x = 0;\ y = 0;\ z = 0;\ x = 4;\ y = 4;\ z = 4.$ Вычислить непосредственно и с помощью формулы Остроградского.

6. Найти $div\left(\overrightarrow{grad}\,u\right)$, где $u = \sin(x + y + z)$.

Вариант 3

1. Найти массу фигуры, ограниченной параболой $y=1-x^2$ и осью Ox, если плотность $\gamma(x,y)=x^2y^2$.

2. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2=2x$; $z=x^2+y^2$; $z=0$.

3. Вычислить $\int\limits_L x\,dl$ по параболе $y=x^2$ от точки $(1,1)$ до точки $(2,4)$.

4. Вычислить $\oint\limits_C 2\left(x^2+y^2\right)dx+(x+y)^2\,dy$, применяя формулу Грина, где C – контур треугольника с вершинами в точках $A(1,1)$, $B(2,2)$, $C(1,3)$, пробегаемый против часовой стрелки.

5. Вычислить $\iint\limits_S \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dS$, где S – поверхность конуса $z^2=x^2+y^2$, ограниченного плоскостями $z=h; z=0$.

6. Найти $\overrightarrow{rotF}$, если $\vec{F}=y^2\vec{i}-x^2\vec{j}+z^2\vec{k}$.

Вариант 4

1. Найти массу половины круга радиуса R с центром в начале координат, лежащей в области $y\geq 0$, если плотность равна квадрату полярного радиуса.

2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z=4-y^2$; $y=\dfrac{x^2}{2}$; $x=0$; $z=0$.

3. Вычислить $\int\limits_l (3x-5y+z+2)\,dl$, где l – отрезок прямой между точками $A(4,1,6)$ и $B(5,3,8)$.

4. Поле образовано силой $\vec{F}=y\vec{i}+a\vec{j}$. Определить работу при перемещении массы m по контуру, образованному осями координат и эллипсом $\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{cases}$, лежащим в I четверти.

5. Найти площадь поверхности части конуса $z=\sqrt{x^2+y^2}$, заключенного внутри цилиндра $x^2+y^2=2x$.

6. Найти $div[\vec{u},\vec{v}]$, где $\vec{u}=x\vec{i}+2y\vec{j}-z\vec{k}$; $\vec{v}=y\vec{i}-2z\vec{j}+x\vec{k}$.

Вариант 5

1. Вычислить $\iint\limits_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dxdy$, где D – круг: $x^2+y^2=ax$.

2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z=x^2; 3x+2y=12; z=0, y=0$.

3. Вычислить массу одной арки циклоиды $x = a(t - \sin t)$; $y = a(1 - \cos t)$, если плотность в каждой точке кривой равна ординате точки.

4. Вычислить $\int\limits_{l} \left(xy - y^2\right)dx + xdy$ от точки $A(0,0)$ до точки $B(1,2)$ по кривой $y = 2\sqrt{x}$.

5. Вычислить $\iint\limits_{S} xdydz + ydxdz + zdxdy$, где S – внешняя сторона поверхности куба, ограниченного плоскостями $x = 0, x = 1, y = 1$, $z = 0, z = 1$, с помощью формулы Остроградского.

6. Найти $rot(\vec{r}, \vec{a})\vec{r}$, где $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$; $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

Вариант 6

1. Вычислить $\iint\limits_{D} \frac{\ln\left(x^2 + y^2\right)}{x^2 + y^2} dxdy$, где область D – кольцо между окружностями радиусов e и 1 с центром в начале координат.

2. Вычислить массу тела, ограниченного поверхностями $2x + 2y + z - 6 = 0$; $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$, если плотность в каждой его точке равна абсциссе этой точки.

3. Вычислить $\int\limits_{L} \sin^2 x \cos^3 x\, dl$, где L – дуга кривой $y = \ln\cos x$ $\left(0 \le x \le \frac{\pi}{4}\right)$.

4. Найти функцию z по ее полному дифференциалу $dz = \sin(x + y)(dx + dy)$.

5. Вычислить $\iint\limits_{S} \left(y^2 + z^2\right) dxdy$, где S – верхняя сторона поверхности $z = \sqrt{a^2 - x^2}$, отсеченная плоскостями $y = 0, y = b$.

6. Найти циркуляцию поля $\vec{F} = y\vec{i}$ по контуру окружности $x = b\cos t, y = b + b\sin t$.

Вариант 7

1. Вычислить $\iint\limits_{D} e^{x^2 + y^2}\, dxdy$, где область D – круг радиуса r с центром в начале координат.

2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $x^2 + 4y^2 + z = 1$; $z = 0$.

3. Вычислить массу m дуги кривой L, заданной уравнениями $x = \frac{t^2}{2}$, $y = t, z = \frac{t^3}{3}, 0 \le t \le 2$, если плотность в каждой ее точке $\gamma = \sqrt{1 + 4x^2 + y^2}$.

4. Вычислить, $\int\limits_{l} \frac{xdx}{y} + \frac{dy}{y+a}$ по отрезку циклоиды $x = a(t - \sin t)$; $y = a(1 - \cos t)$ от точки $t_1 = \frac{\pi}{6}$ до точки $t_2 = \frac{\pi}{3}$.

5. Вычислить $\iint x\,dydz + y\,dxdz + z\,dxdy$ по верхней поверхности части плоскости $x + y + z = a$, лежащей в первом октанте.

6. Доказать, что поле $\vec{F} = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$ является потенциальным.

Вариант 8

1. С помощью двойного интеграла найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = e^x; y = e^{-x}; y = 2$.

2. Вычислить объем той части шара $x^2 + y^2 + z^2 = 4R^2$, которая лежит внутри цилиндра $x^2 + y^2 = R^2$.

3. Найти массу дуги кривой $x = t; y = \frac{1}{2}t^2 \left(0 \le t \le 1\right)$, если плотность равна $\sqrt{2y}$.

4. Вычислить $\int\limits_{L} xdx + ydy + (x + y - 1)dz$, где L – отрезок прямой, соединяющий точки $A(1,1,1)$ и $B(2,3,4)$.

5. Найти площадь части поверхности $y = x^2 + z^2$, вырезанной цилиндром $z^2 + x^2 = 1$ и расположенной в первом октанте.

6. Найти поток вектора $\vec{a} = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$ через плоскость $x + y + z = a$, расположенную в первом октанте.

Вариант 9

1. С помощью двойного интеграла вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $\rho = 2(1 + \cos\varphi)$; $\rho = 2\cos\varphi$.

2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $y = x^2$; $y + z = 2$; $z = 0$.

3. Найти массу дуги кривой $y = \frac{2x\sqrt{x}}{3}$ от точки $O(0,0)$ до точки $B\left(4, \frac{16}{3}\right)$, если плотность пропорциональна длине дуги.

4. Вычислить $\int\limits_L \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}$, где L – окружность $x = a\cos t$, $y = a\sin t$ (в положительном направлении).

5. С помощью формулы Остроградского вычислить $\iint\limits_S xdydz + ydxdz + zdxdy$, если S – внешняя сторона цилиндра $x^2 + y^2 = 4$ с основаниями $z = 0$ и $z = 3$.

6. Найти $\overrightarrow{rotF}$, если $\vec{F} = y^2 z\vec{i} + z^2 x\vec{j} + x^2 y\vec{k}$.

Вариант 10

1. С помощью двойного интеграла вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 2x - x^2$; $y = x^2$.

2. Найти массу тела, ограниченного поверхностями $x + y + z = a\sqrt{2}$; $x^2 + y^2 = a^2$; $z = 0$, если плотность в каждой его точке равна $x^2 + y^2$.

3. Вычислить $\int\limits_L \left(x^2 + y^2 + z^2\right) dl$, где L – дуга винтовой линии $x = a\cos t;\ y = a\sin t;\ z = bt\ \left(0 \le t \le 2\pi\right)$.

4. Найти функцию z по ее полному дифференциалу $dz = e^{xy}\big((1 + xy)dx + x^2 dy\big)$.

5. Применяя формулу Остроградского, вычислить $\iint\limits_S x^3 dydz + y^3 dxdz + z^3 dxdy$, где S – внешняя сторона поверхности сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

6. Найти циркуляцию вектора $\vec{F} = y^2\vec{i}$ по замкнутой кривой, составленной из верхней половины эллипса $x = a\cos t;\ y = b\sin t$ и отрезка оси Ox.

Вариант 11

1. Найти массу плоской фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{3}{x}; x^2 + y^2 = 10$, если плотность каждой ее точки равна абсциссе этой точки.

2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $hz = x^2 + y^2$; $z = h$.

3. Вычислить $\int\limits_L \sqrt{x^2 + y^2 + a^2}\, dl$, где L – дуга спирали Архимеда $r = a\varphi\ \left(a > 0\right)$ между точками $O(0,0)$; $A\left(a^2, a\right)$.

4. Вычислить с помощью формулы Грина $\oint\limits_C \frac{y}{x}dx + 2\ln x dy$, где C – треугольник, сторонами которого являются прямые $y = 4 - 2x$; $x = 1$; $y = 0$.

5. Вычислить $\iint\limits_S z^2 dS$, где S – часть плоскости $x + y + z = 1$, расположенной в первом октанте.

6. Найти линейный интеграл вектора $\vec{a} = x^3 \cdot \vec{i} - y^3 \vec{j}$ вдоль дуги окружности $x = R\cos t$; $y = R\sin t$, лежащей в первой четверти.

Вариант 12

1. С помощью двойного интеграла вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = e^x$; $y = e^{2x}$; $x = 1$.

2. Найти массу тела, ограниченного поверхностями $2az = x^2 + y^2$; $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$, если плотность в каждой точке равна аппликате этой точки.

3. Вычислить $\int\limits_L x^2 dl$, где L – верхняя половина окружности $x^2 + y^2 = a^2$.

4. Выяснить, будет ли интеграл $\int\limits_{(AB)} \left(2xy - 5y^3\right)dx + \left(x^2 - 15xy^2 + 6y\right)dy$ зависеть от пути интегрирования, и вычислить его по линии AB, соединяющей точки $(0,0)$, $(2,2)$.

5. Вычислить $\iint\limits_S zdxdy + xdxdz + ydydz$, где S – внешняя сторона треугольника, образованного пересечением плоскости $x - y + z = 1$ и координатными плоскостями.

6. Найти $rot\vec{a}$, если $\vec{a} = \left(3x^2y^2z + 3x^2\right)\vec{i} + 2x^3yz \cdot \vec{j} + \left(x^3y^2 + 3z^2\right)\vec{k}$.

Вариант 13

1. Двойным интегрированием найти объем тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = R^2$; $z = 0$; $z = y$.

2. Вычислить $\iiint\limits_V y\cos(x + z)dxdydz$, где V – область, ограниченная цилиндром $y = \sqrt{x}$ и плоскостями $x + z = \frac{\pi}{2}$; $y = 0$; $z = 0$.

3. Вычислить массу отрезка прямой $y = 2 - x$, заключенного между координатными осями, если линейная плотность в каждой его точке пропорциональна квадрату абсциссы в этой точке, а в точке $(2,0)$ равна 4.

4. Применяя формулу Грина, вычислить $\oint\limits_C - x^2 y dx + x y^2 dy$, где C – окружность $x^2 + y^2 = a^2$ (в положительном направлении).

5. Найти площадь поверхности $z = 2 - \dfrac{x^2 + y^2}{2}$, расположенной над плоскостью xOy.

6. Найти поток вектора $\vec{a} = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$ через часть плоскости $x + y + z = a$, расположенной в первом октанте.

Вариант 14

1. Переменив порядок интегрирования, записать данное выражение в виде одного двойного интеграла $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} dy + \int\limits_1^4 dx \int\limits_0^{\frac{1}{3}(4-x)} dy$. Вычислить площадь фигуры.

2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z = 6 - x^2 - y^2$; $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

3. Найти массу дуги кривой $y = \ln x \left(\sqrt{3} \le x \le 2\sqrt{2}\right)$, если плотность в каждой точке равна квадрату ее абсциссы.

4. Вычислить $\int\limits_L y dx - \left(y + x^2\right) dy$, где L – дуга параболы $y = 2x - x^2$, расположенная над осью Ox, пробегаемая по ходу часовой стрелки.

5. Применяя формулу Остроградского, вычислить $\iint\limits_S x dy dz + y dx dz + z dx dy$, где S – положительная сторона поверхности, ограниченной плоскостями $x = 0; y = 0; z = 0; x + y + 2z = 1$.

6. Найти дивергенцию градиента функции $u = x^3 + y^3 + z^3 + 3x^2 y^2 z^2$.

Вариант 15

1. С помощью двойного интеграла вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 16 - 8x; y^2 = 24x + 48$.

2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $2 - z = x^2 + y^2; z = x^2 + y^2$.

3. Вычислить $\int\limits_L \sqrt{x^2 + y^2}\, dl$, где L – окружность $x^2 + y^2 = ax$.

4. С помощью формулы Грина вычислить $\oint\limits_C \frac{1}{x} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} d + \frac{2}{y} \operatorname{arctg} \frac{x}{y} dy$, где C – замкнутый контур, составленный дугами двух окружностей $x^2 + y^2 = 1; x^2 + y^2 = 4 \left(y > 0\right)$ и отрезками прямых $y = x$ и $y = \sqrt{3}x \left(y > 0\right)$, заключенных между этими окружностями.

5. Найти массу полусферы $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$, если поверхностная плотность в каждой ее точке равна z^2.

6. Найти $rot\vec{F}$, если $\vec{F}=\left(x^2+y^2\right)\vec{i}+2xyz\vec{j}+\vec{k}$.

Вариант 16

1. Вычислить $\iint\limits_D \left(x^2+2xy\right)dxdy$, где область D ограничена прямыми $y=x;\ y=2x;\ x+y=6$.

2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2=a^2; x^2+z^2=a^2$.

3. Вычислить массу дуги кривой $x=\ln\left(1+t^2\right);\ y=2\operatorname{arctg} t-t$ от $t=1$, если плотность равна $\dfrac{y}{e^x}$.

4. Поле образовано силой $\vec{F}=(x+y)\vec{i}+2x\vec{j}$. Вычислить работу по перемещению единицы массы по окружности $x=a\cos t;\ y=a\sin t$.

5. Вычислить массу поверхности $z^2=x^2+y^2$, заключенной между плоскостями $z=0; z=1$, если поверхностная плотность пропорциональна x^2+y^2.

6. Найти $rot\vec{F}$, если $\vec{F}=x^2y^2\vec{i}+y^3z\vec{j}+xz^3\vec{k}$.

Вариант 17

1. С помощью двойного интеграла вычислить площадь плоской области, ограниченной линиями $y^2=4x,\ x+y=3,\ y\geq 0$.

2. Определить массу пирамиды, образованной плоскостями $x+y+z=a;\ x=0;\ y=0;\ z=0$, если плотность в каждой точке равна аппликате этой точки.

3. Вычислить $\int\limits_L y^2dl$, где L – дуга кривой $x=\ln y$ между точками $A(0,1)$ и $B(1,e)$.

4. Применяя формулу Грина, вычислить $\oint\limits_C y^2dx+(x+y)^2dy$ по контуру треугольника ABC с вершинами $A(a,0);\ B(a,a);\ C(0,a)$.

5. Пользуясь формулой Остроградского, вычислить $\iint\limits_S x\cdot dydz+ydxdz+zdxdy$, где S – внешняя сторона поверхности пирамиды, ограниченной плоскостями $x=0;\ y=0;\ z=0$; $2x+3y+4z=12$.

6. Найти циркуляции вектора $\vec{F}=-y\vec{i}+x\vec{j}$ по окружности $x^2+(y-1)^2=1$.

Вариант 18

1. Изменив порядок интегрирования, записать данное выражение в виде одного двойного интеграла $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^y dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{2-y} dx$. Вычислить площадь фигуры.

2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $x^2 + 4y^2 + z = 1;\ z = 0$.

3. Вычислить массу дуги кривой $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ лежащей в первой четверти, если плотность в каждой ее точке равна абсциссе этой точки.

4. Доказать, что $\int\limits_{AB} \operatorname{tg} y\,dx + x\sec^2 y\,dy$ не зависит от пути интегрирования. Вычислить его, если $A\left(1,\frac{\pi}{6}\right); B\left(2;\frac{\pi}{4}\right)$.

5. Найти массу полусферы $x = \sqrt{R^2 - y^2 - z^2}$, если поверхностная плотность в каждой точке пропорциональна квадрату расстояния этой точки до начала координат.

6. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{F} = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$ вдоль замкнутого контура, полученного от пересечения сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ координатными плоскостями, расположенными в первом октанте.

Вариант 19

1. Построить область, площадь которой выражается интегралом $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{\frac{1}{2}(1-x)^2}^{\sqrt{1-x^2}} dy$. Вычислить этот интеграл. Поменять порядок интегрирования.

2. Определить массу тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 - z^2 = 0;\ z = h$, если плотность в каждой точке пропорциональна аппликате этой точки.

3. Вычислить $\int\limits_L \frac{\cos^2 x dl}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$, где L – дуга кривой $y = \sin x(0 \le x \le \pi)$.

4. Доказать, что выражение $3x^2 e^y dx + \left(x^3 e^y 1\right)dy$ является полным дифференциалом некоторой функции. Найти эту функцию.

5. Вычислить $\iint\limits_S \left(x^2 + z^2\right)dydz$, где S – внешняя сторона поверхности $x = \sqrt{9 - y^2}$, отсеченной плоскостями $z = 0; z = 2$.

6. Найти $rot(\vec{r}, \vec{a}) \cdot \vec{r}$, где $\vec{r} = x\vec{i} + 2y\vec{j} - z\vec{k}, \vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$.

Вариант 20

1. С помощью двойного интеграла вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $\rho = a(1-\cos\varphi)$; $\rho = a\cos\varphi$.

2. Определить массу сферического слоя между поверхностями $x^2+y^2+z^2=a^2$; $x^2+y^2+z^2=4a^2$, если плотность в каждой точке обратно пропорциональна расстоянию точки от начала координат.

3. Вычислить $\int\limits_L ydl$, где L – дуга параболы $y^2=2x$, отсеченная параболой $x^2=2y$.

4. Показать, что $\oint\limits_C ydx+(x+y)dy$ по любому замкнутому контуру равен нулю. Проверьте, вычислив интеграл по контуру фигуры, ограниченной линиями $y=x^2, y=4$.

5. Вычислить массу поверхности $z=x$, ограниченной плоскостями $x+y=1; y=0; x=0$, если поверхностная плотность в каждой точке равна абсциссе этой точки.

6. Найти циркуляцию вектора $\vec{F}=y^2\vec{i}$ по замкнутой кривой, составленной из верхней половины эллипса $x=4\cos t; y=\sin t$ и отрезка оси Ox.

Вариант 21

1. С помощью двойного интеграла вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $xy=a^2; y=x; y=2a(a>0)$.

2. Определить массу полушара $x^2+y^2+z^2=a^2; z=0$, если плотность его в каждой точке равна аппликате этой точки.

3. Вычислить $\int\limits_L \sin^3 xdl$, где L – дуга кривой $y=\ln\sin x$ от $x_1=\frac{\pi}{4}$ до $x_2=\frac{\pi}{2}$.

4. Вычислить $\oint\limits_C \left(e^{2x}-y^2\right)dx+(1-2xy)dy$, где C – треугольник сторонами которого являются прямые $y=2; x=0; y=x$. Доказать, что данный интеграл по любому замкнутому контуру равен нулю.

5. Найти площадь части поверхности $y=x^2+z^2$, вырезанной цилиндром $z^2+x^2=1$ и расположенной в первом октанте.

6. Найти $div[\vec{u},\vec{v}]$, где $\vec{u}=2x\vec{i}-y\vec{j}+3z\vec{k}; \vec{v}=3y\vec{i}+z\vec{j}-x\vec{k}$.

Вариант 22

1. С помощью двойного интеграла вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 4 + x;\ x + 3y = 0$.

2. Определить объем тела, ограниченного поверхностями $z^2 = 2ax;\ x^2 + y^2 = ax;\ z = 0;\ y = 0$.

3. Найти массу дуги винтовой линии $x = 4a\cos t,\ y = 4a\sin t$, $z = 3at$, если плотность ее в каждой точке пропорциональна аппликате этой точки $(0 \le t \le 2\pi)$.

4. Вычислить $\int\limits_{(1,1)}^{(3,2)} \frac{x}{(x+y)^2}dx + \frac{2x+y}{(x+y)^2}dy$.

5. Используя формулу Остроградского, вычислить $\iint\limits_S (x+y)dydz + (y-x)dxdz + zdxdy$ через поверхность шара $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

6. Найти $rot\vec{F}$, если $\vec{F} = 3x^2y^2\vec{i} + 2y^3z\vec{j} - z^2x^2\vec{k}$.

Вариант 23

1. С помощью двойного интеграла вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $ay = x^2 - 2ax;\ y = x$.

2. Вычислить массу тела, ограниченного поверхностями $y = \sqrt{x^2 + z^2};\ y = b$, если плотность в каждой его точке пропорциональна ординате этой точки.

3. Вычислить $\int\limits_L xyzdl$, где L – дуга кривой $x = \frac{1}{2}t^2;\ y = t;\ z = \frac{1}{3}\sqrt{8t^3}\quad (0 \le t \le 1)$.

4. Найти работу силы $\vec{F} = xy\vec{i} + (x+y)\vec{j}$ при перемещении массы m из начала координат в точку $A(1,1)$ по параболе $y = x^2$.

5. С помощью формулы Стокса показать, что $\oint\limits_C yzdx + xzdy + xydz$ по любому замкнутому контуру равен нулю. Проверить, вычислив интеграл по контуру треугольника с вершинами $O(0,0,0);\ A(1,1,0);\ B(1,1,1)$.

6. Вычислить поток вектора $\vec{a} = x^3\vec{i} + y^3\vec{j} + z\vec{k}$ через поверхность шара $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Вариант 24

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \ln x;\ x - y = 1;\ x = 3$.

2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $y^2 = 4a^2 - 3ax;\ y^2 = ax;\ z = \pm h$.

3. Найти массу дуги полуокружности $x = a\cos t; y = a\sin t$, если плотность ее в каждой точке равна $x^2 y$.

4. Найти работу, производимую силой $\vec{F} = 4x^2\vec{i} + xy\vec{j}$ при перемещении массы m вдоль дуги $y = x^3$ от точки $O(0,0)$ до точки $C(1,1)$.

5. Вычислить $\iint\limits_S x^2 dydz + y^2 dxdz + zddy$, где S - внешняя сторона части сферы, расположенной в первом октанте.

6. Доказать, что поле $\vec{F} = \dfrac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2}}$ является потенциальным.

Вариант 25

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x; x^2 + y^2 = 2x; y = 0$.

2. Определить массу тела, ограниченного поверхностями $2x + z = 2a; x + y = a; y^2 = ax; y = 0(y > 0)$, если плотность в каждой его точке равна ординате его точки.

3. Вычислить $\int\limits_L ydl$, где L - первая арка циклоиды $x = 3(t - \sin t); y = 3(1 - \cos t)$.

4. Вычислить $\oint\limits_C xdy + ydx$, где C – треугольник со сторонами $x = 0; y = 0; \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$. Доказать, что данный интеграл по любому замкнутому контуру равен нулю.

5. Вычислить $\iint\limits_S \left(x^2 + y + z^2 - 4\right)dS$, где S – часть поверхности $2y = 9 - x^2 - z^2$, отсеченная плоскостью $y = 0(y > 0)$.

6. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{F} = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$ вдоль замкнутого контура, полученного от пересечения сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ координатными плоскостями, расположенными в первом октанте.

Вариант 26

1. Построить область, площадь которой выражается интегралом $\int\limits_0^a dy \int\limits_{a-y}^{\sqrt{a^2 - y^2}} dx$. Вычислить этот интеграл. Поменять порядок интегрирования.

2. Вычислить массу тела, ограниченного поверхностями $x+z=a; x=0; y=0; y=a; z=0$, если плотность его в каждой точке равна x^2+y^2.

3. Вычислить $\int\limits_L xdl$, где L – отрезок прямой от точки $(0,0)$ до точки $(1,2)$.

4. Вычислить работу силы $\vec{F}=y\cdot\vec{i}+(y-x)\vec{j}$ при перемещении единицы массы по дуге параболы $y=a-\frac{x^2}{a}$ из точки $A(-a;0)$ к точке $B(0,a)$.

5. Вычислить $\iint\limits_S x^2dydz+y^2dxdz+z^2dxdy$, где S – внешняя сторона поверхности конуса $z^2+y^2=\frac{R^2}{3}x^2; 0\le x\le\sqrt{3}$.

6. Найти линейный интеграл вектора $\vec{a}=x^3\vec{i}-y^3\vec{j}$ вдоль первой четверти окружности $x=3\cos t; y=3\sin t$.

Вариант 27

1. Построить область, площадь которой выражается интегралом $\int\limits_0^a dx\int\limits_x^{\sqrt{2a^2-x^2}}dy$. Вычислить этот интеграл. Поменять порядок интегрирования.

2. Определить объем тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2-z^2=0; x^2+y^2+z^2=a^2$ (внутри конуса).

3. Найти массу дуги параболы $y=\frac{x^2}{2}$, лежащей между точками $\left(1,\frac{1}{2}\right)$ и $(2,2)$, если плотность равна $\frac{y}{x}$.

4. Вычислить $\int\limits_L xy^2dx+yz^2dy-x^2zdz$, где L – отрезок прямой $OB; O(0,0,0); B(-2,4,5)$.

5. С помощью формулы Остроградского, вычислить $\iint\limits_S x^2dydz+y^2dxdz+z^2dxdy$, где S – внешняя сторона куба $0\le x\le a; 0\le y\le a; 0\le z\le a$.

6. Найти $rot\vec{a}$, если $\vec{a}=x^3z\vec{i}+y^3x\vec{j}+z^3x\vec{k}$.

Вариант 28

1. Построить область, площадь которой выражается интегралом $\int\limits_0^1 dx \int\limits_x^{2-x^2} dy$. Изменить порядок интегрирования. Вычислить интеграл.

2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z = \sqrt{x^2 + y^2}; z = x^2 + y^2$.

3. Найти массу винтовой линии $x = a\cos t; y = a\sin t; z = b$ $(0 \le t \le 2\pi)$, если плотность в каждой ее точке пропорциональна квадрату расстояния этой точки до начала координат.

4. Вычислить $\int\limits_L (x-y)dx + (x+y)dy$, где L - отрезок прямой соединяющий точки $A(2,3)$ и $B(3,5)$.

5. Вычислить площадь поверхности той части плоскости $x + 2y + z = 4$, которая расположена в первом октанте.

6. Найти $rot\vec{F}$, если $\vec{F} = y^3z^2\vec{i} + 4xz^2\vec{j} - xy^2\vec{k}$.

Вариант 29

1. Построить область, площадь которой выражается интегралом $\int\limits_{-2}^{0} dy \int\limits_{y-4}^{0} dx$. Изменить порядок интегрирования. Вычислить интеграл.

2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z = x^2 + y^2; x + y = 4; x = 0; y = 0; z = 0$.

3. Вычислить $\int\limits_L \sqrt{x^2 + y^2}\, dl$, где L – верхняя половина кардиоиды $\rho = a(1 + \cos\varphi)$.

4. Поле образовано силой $\vec{F} = (x+y)\vec{i} + (2xy-8)\vec{j}$. Найти работу поля при перемещении материальной точки массы m по дуге окружности от точки $(a,0)$ до точки $(0,a)$.

5. Вычислить массу поверхности $z^2 = x^2 + y^2$, заключенной между плоскостями $z = 0$ и $z = 1$, если поверхностная плотность пропорциональна $x^2 + y^2$.

6. Найти циркуляцию поля $\vec{F} = y\vec{i}$ по контуру окружности $x = 2\cos t; y = 2 + 2\sin t$.

Вариант 30

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями $ax = y^2 - 2ay; x + y = 0$.

2. Определить массу тела, ограниченного поверхностями $az = a^2 - x^2 - y^2; z = 0$, если плотность его в каждой точке пропорциональна аппликате этой точки.

3. Вычислить $\int\limits_L xydl$ по периметру прямоугольника, ограниченного прямыми $x = 0; y = 0; x = 4; y = 2$.

4. Вычислить $\int\limits_L (x - y)dx + dy$, где L – верхняя половина окружности $x^2 + y^2 = R^2$ (в положительном направлении).

5. Найти площадь части поверхности $2x + y + z = 4$, которая расположена в первом октанте.

6. Найти дивергенцию градиента функции $u = \ln(x + 2y + 3z)$.

ТИПОВОЙ РАСЧЕТ № 4

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ ДУ

В заданиях:

№1 – №8, №10, №11 – найти общее решение дифференциальных уравнений. Если даны начальные условия, то решить задачу Коши;

№9 – решить методом Лагранжа;

№12 – решить систему дифференциальных уравнений.

Вариант 1

1. $y'\sin x = y\ln y$; 2. $xy'\cos\dfrac{y}{x} = y\cos\dfrac{y}{x} - x$; 3. $(x^2+1)y' + 4xy = 3$;

4. $y' = \dfrac{4y}{x} + x\sqrt{y}$; 5. $\dfrac{y}{x}dx + (y^3 + \ln x)dx = 0$; 6. $2yy'' = 3(y')^2 + 4y^2$;

7. $y'' = \dfrac{y'}{x}(1 + \ln\dfrac{y'}{x}), \begin{cases} y(1) = 1/2 \\ y'(1) = 1 \end{cases}$; 8. $y^{IV} + 2y''' + y'' = 0$; 9. $y'' + y = \dfrac{1}{\sqrt{\cos 2x}}$;

10. $y'' - 2y' = (2x+3)\mathrm{e}^{2x}$; 11. $y'' + 2y' + 2y = 1 + 4\sin x$; 12. $\begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = x + 3y \end{cases}$.

Вариант 2

1. $y' = (2y+1)\,\mathrm{tg}\,x$; 2. $xy' = y(\ln y - \ln x)$; 3. $x^2y' + xy + 1 = 0$;

4. $2xy' + 2y = xy^2$; 5. $(2x + \mathrm{e}^{x/y})dx + (1 - \dfrac{x}{y})\mathrm{e}^{x/y}dy = 0$; 6. $\mathrm{e}^y(y'' + (y')^2) = 2$;

7. $\mathrm{e}^x(y''\mathrm{e}^x) = 1, \begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$; 8. $y^{IV} - 3y'' - 4y = 0$; 9. $y'' + 4y' + 4y = \dfrac{\mathrm{e}^{-2x}}{x^3}$;

10. $y'' + y' = x^2 + 1$; 11. $y'' + 2y' - 3y = \mathrm{e}^{2x} + 9\cos x$; 12. $\begin{cases} \dot{x} = 2y - x + 1 \\ \dot{y} = 3y - 2x \end{cases}$.

Вариант 3

1. $y' = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{\ln y}$; 2. $y\,dy = (2y - x)\,dx$; 3. $xy' + y + x\mathrm{e}^{-x^2} = 0$;

4. $2y' + 2xy = x\,\mathrm{e}^{-x^2}y^2$; 5. $y'y^2 + yy'' = (y')^2$; 6. $(10xy - 8y + 1)dx + (5x^2 - 8x + 3)dy = 0$;

7. $y'' = \dfrac{y'}{x}\ln\dfrac{y'}{x}, \begin{cases} y(1) = \mathrm{e} \\ y'(1) = \mathrm{e} \end{cases}$; 8. $y''' + 2y'' - 3y' = 0$; 9. $y'' - 4y' + 5y = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{\cos x}$;

10. $4y'' + 4y' + y = 3\cos 2x$; 11. $y'' + 4y' + 5y = 2x + 3 + x\mathrm{e}^x$; 12. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 4y \\ \dot{y} = x - 3y + 3\mathrm{e}^t \end{cases}$.

Вариант 4

1. $3e^{x}(\sin y)\,dx+(1+e^{x})\cos y\,dy=0$; 2. $\dfrac{dx}{xy-x^2}=\dfrac{dy}{2y^2-xy}$; 3. $y'=2x(x^2+y)$;

4. $y'+2xy=2x^3y^3$; 5. $(2x^3-xy^2)\,dx+(2y^3-x^2y)\,dy=0$; 6. $y\,y''=(y')\,e^3$;

7. $y''=\dfrac{y'}{x}+x\cos x, \begin{cases} y(\pi)=\pi+1 \\ y'(\pi)=2\pi \end{cases}$; 8. $y^{IV}-y''=0$; 9. $y''+2y'+y=3e^{-x}\sqrt{x+1}$;

10. $y''+9y=4\cos 3x$; 11. $y''-4y'=2x+1+4e^{2x}$; 12. $\begin{cases} \dot{x}=4x+y-36t \\ \dot{y}=y-2x-2e^{t} \end{cases}$.

Вариант 5

1. $3^{y^2-x^2}=\dfrac{yy'}{x}$; 2. $y'=\dfrac{y}{x}-\dfrac{x}{y}$; 3. $y'\operatorname{ctg} x-y=2\cos^2 x\operatorname{ctg} x$;

4. $xy'+y=y^2\ln x$; 5. $e^{y}\,dx+(xe^{y}-2y)\,dy=0$; 6. $y''y+(y')^2=y'$;

7. $x(y''-x)=y'$, $y(1)=y'(1)=1$; 8. $y^{IV}-y'''=0$; 9. $y''+y=\operatorname{tg} x$;

10. $y''+6y'+13y=3e^{2x}\sin x$; 11. $y''-2y'+y=2e^{x}+x-1$; 12. $\begin{cases} \dot{x}=2x+3y+5t \\ \dot{y}=3x+2y+8e^{t} \end{cases}$.

Вариант 6

1. $y'\sqrt{1-x^2}-\cos^2 y=0$; 2. $4xy\,dy=(x^2-y^2)\,dx$; 3. $y'-3x^2y-x^2e^{x^3}=0$;

4. $y'-9x^2y=(x^5+x^2)y^{2/3}$; 5. $\dfrac{x\,dy}{x^2+y^2}=\left(\dfrac{y}{x^2+y^2}-1\right)dx$; 6. $y''=y'+x$;

7. $y''y^3=1$, $y(0{,}5)=y'(0{,}5)=1$; 8. $y^{IV}+8y''-9y=0$; 9. $y''-y=\dfrac{e^{2x}}{e^{x}-1}$;

10. $y''-4y=5e^{2x}$; 11. $y''-4y'=2x-3+\cos 3x$; 12. $\begin{cases} \dot{x}=4x-3y+\sin t \\ \dot{y}=2x-y+2\cos t \end{cases}$.

Вариант 7

1. $(1+e^{3y})\,x\,dx = \mathrm{e}^{3y}\,dy$;
2. $xy' = y + y\ln\dfrac{y}{x}$;
3. $(x^2-1)y' - xy = x^3 - x$;
4. $xy' + y = xy^2$;
5. $x\,dx + y\,dy = 0$;
6. $y'' + y'(y-1) = (y')^2$;
7. $xy'' = y'$, $y(1) = y'(1) = 2$;
8. $y^{IV} + 2y''' + 2y'' = 0$;
9. $y'' + 4y = 2\,\mathrm{tg}\,x$;
10. $y'' - 4y' + 4y = 3\mathrm{e}^{2x}$;
11. $y'' - 6y' + 13y = 4\sin 2x - \cos x$;
12. $\begin{cases} y' = \dfrac{y^2}{z} \\ z' = \dfrac{1}{2}y \end{cases}$.

Вариант 8

1. $(x + 2xy)\,dx + (1 + x^2)\,dy = 0$;
2. $y\,dx = (2\sqrt{xy} - x)\,dy$;
3. $y' + 2y = \mathrm{e}^{3x}$;
4. $xy' - y = y^2$;
5. $\dfrac{dx}{y} - \dfrac{x}{y^2}\,dy = 0$;
6. $2yy'' + y^2 = (y')^2$;
7. $x(y'' + 1) + y' = 2$, $y(1) = \dfrac{1}{2}$, $y'(1) = \dfrac{5}{2}$;
8. $y^{IV} + 8y'' + 16y = 0$;
9. $y'' - y' = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x + 1}$;
10. $y'' + 10y' + 26y = (3x-1)\mathrm{e}^x$;
11. $y'' + 4y' = 1 + 4\cos^4 x$;
12. $\begin{cases} \dot{x} = y - \cos t \\ \dot{y} = -x + \sin t \end{cases}$.

Вариант 9

1. $(1+y^2)\,dx - (2y + \sqrt{1+y^2})(1+x)^{3/2}\,dy = 0$;
2. $y^2 - 3xy + 3x^2y' = 0$;
3. $y' + \dfrac{y}{x} = 2\ln x + 1$;
4. $y' + \dfrac{2y}{x} = \dfrac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}$;
5. $yy'' = y'(y'+1)$;
6. $(\mathrm{e}^x + y + \sin y)\,dx + (\mathrm{e}^y + x + \cos y \cdot x)\,dy = 0$;
7. $y'' = -\dfrac{x}{y'}$, $y(2) = 0$, $y'(2) = 1$;
8. $y^{IV} + y'' = 0$;
9. $y'' + 4y = \mathrm{ctg}\,2x$;
10. $y'' + y' = 3\cos x$;
11. $4y'' - 4y' + y = x^2 + 4\mathrm{e}^{2x}$;
12. $\begin{cases} y' = -5y + 2z + 40\mathrm{e}^x \\ x' = y - 6z + 9\mathrm{e}^{-x} \end{cases}$.

Вариант 10

1. $(2xy^2 + x)\,dx + (3y - x^2 y)\,dy = 0$; 2. $(x - y)\,dx + (x + y)\,dy = 0$; 3. $y' + \dfrac{2y}{x+1} = \mathrm{e}^x (x+1)^2$;

4. $y' - \dfrac{xy}{x^2 - 1} = x\sqrt{y}$; 5. $xy'' - y'' + \dfrac{1}{x} = 0$; 6. $2x\cos^2 y\,dx + (2y - x^2 \sin 2y)\,dy = 0$;

7. $y'' = 2yy'$, $y(0) = y'(0) = 1$; 8. $y''' - 8y = 0$; 9. $y'' + 4y = \dfrac{1}{\cos 2x}$;

10. $y'' + 4y' + 29y + 26\,\mathrm{e}^{-x}$; 11. $y'' + 4y' = 2x + 5 + x\mathrm{e}^{3x}$; 12. $\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = 3x + 4y \end{cases}$.

Вариант 11

1. $(\sqrt{xy} - \sqrt{x})\,dy + y\,dx = 0$; 2. $xy' - y = x\,\mathrm{tg}\,\dfrac{y}{x}$; 3. $xy' + y = \mathrm{e}^x$;

4. $y' - y + y^2 \cos x = 0$; 5. $2xy\,dy + (x^2 + y^2 + 2x)\,dx = 0$; 6. $y'' + \dfrac{(y')^2}{1 - y} = 0$;

7. $y'' - 2\,\mathrm{ctg}\,x y' = \sin^3 x$, $y(\pi/4) = 0$, $y'(\pi/4) = 1$; 8. $4y^{IV} + 4y''' + y'' = 0$; 9. $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$;

10. $y'' - 12y' + 36y = 32\cos 2x$; 11. $y'' - 2y' + 2y = 3x + (4x - 1)\mathrm{e}^{2x}$; 12. $\begin{cases} \dot{x} = 2y - 3x \\ \dot{y} = y - 2x + t \end{cases}$.

Вариант 12

1. $(x^2 + 2x)\,y' = y + 4$; 2. $xy' - y = (x + y)\ln\dfrac{x + y}{x}$; 3. $xy' - \dfrac{y}{x+1} = x$;

4. $y' = y\,\mathrm{ctg}\,x + \dfrac{y^3}{\sin x}$; 5. $2yy' = y''$; 6. $(x^3 - 3xy^2 + 2)\,dx - (3x^2 y - y^2)\,dy = 0$;

7. $y^{IV} - 5y'' + 4y = 0$; 8. $y''(x^2 + 1) = 2xy'$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$; 9. $y'' + 2y' + y = \dfrac{e^{-x}}{x}$;

10. $y'' + y' = x\mathrm{e}^{-x}$; 11. $y'' + 3y' + 10y = \sin 3x - \cos x$; 12. $\begin{cases} \dot{x} = x - y + 18t \\ \dot{y} = 5x - y \end{cases}$.

Вариант 13

1. $y^2 + y'x^2 = 0$; 2. $xy' = y\cos\ln\frac{y}{x}$; 3. $y' + y = \cos x$; 4. $y' - \frac{y}{x} = \frac{x^2}{y}$;

5. $2(y')^2 = y''(y-1)$; 6. $(x^2 + y^2 + y)\,dx + (2xy + x + \mathrm{e}^y)\,dy = 0$;

7. $y''x + y' = \ln x,\ y(1) = 1,\ y'(1) = 2$; 8. $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$; 9. $y'' - 2y' + y = \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{4-x^2}}$;

10. $y'' + 6y' + 9y = 2x^2 - 1$; 11. $y'' + 4y' + 5y = 4x\mathrm{e}^{2x} + \cos x$; 12. $\begin{cases} \dot{x} = 2y - x \\ \dot{y} = 4y - 3x + \mathrm{e}^{3t} \end{cases}$.

Вариант 14

1. $2\mathrm{e}^y(1+x^2)\,dy - x(\mathrm{e}^y + 1)\,dx = 0$; 2. $x\,dy - y\,dx = \sqrt{x^2 + y^2}\,dx$; 3. $y' - \frac{y}{x} = x$;

4. $y' + 2y = y^2\mathrm{e}^x$; 5. $(y + x\ln y)\,dx + (\frac{x^2}{2y} + x + 1)\,dy = 0$; 6. $2xy'y'' = (y')^2 + 1$;

7. $y'' = y'\mathrm{e}^y,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$; 8. $y^{IV} + 4y''' - 5y'' = 0$; 9. $y'' + y = \mathrm{tg}^2\, x$;

10. $4y'' + 9y = 5\cos 3x$; 11. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y + 2\mathrm{e}^t \\ \dot{y} = x + 2y - 3\mathrm{e}^{4t} \end{cases}$; 12. $y'' + 8y' + 17y = 2x^2 + 3x + 1 + 3\mathrm{e}^{2x}$.

Вариант 15

1. $x\ln xy' = y$; 2. $y' = \frac{x^2 + y^2}{xy}$; 3. $y' - \frac{y}{1-x^2} = 1 + x$;

4. $xy' - 4y - 2x^2\sqrt{y} = 0$; 5. $y'' - \frac{y'}{x-1} = x(x-1)$; 6. $(3x^2 y + \sin x)\,dx + (x^3 - \cos y)\,dy = 0$;

7. $y'' + 2y(y')^3 = 0,\ y(0) = 2,\ y'(0) = \frac{1}{3}$; 8. $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$; 9. $y'' - 3y' + 2y = \frac{\mathrm{e}^x + 2}{\mathrm{e}^x + 1}$;

10. $y'' + 4y' + 5y = 4\mathrm{e}^x\cos 3x$; 11. $y'' - 4y' + 4y = 5\mathrm{e}^{2x} + 3\cos 4x$; 12. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y \\ \dot{y} = x + 2\mathrm{e}^t \end{cases}$.

Вариант 16

1. $(4+x^2)\,dy-\sqrt{1-16y^2}\,dx=0$;
2. $x^2+xy+y^2=x^2y'$;
3. $y'-\dfrac{2y}{x}=x^3$;
4. $xy^2y'=x^2+y^3$;
5. $x^2\sin y\,dx+(1+\dfrac{x^3}{3}\cos y)\,dy=0$;
6. $y''+4y'=2x^2$;
7. $y''=2-y,\ y(0)=2,\ y'(0)=2$;
8. $y^{IV}+y''=0$;
9. $y''+4y=\dfrac{1}{\sin^2 x}$;
10. $y''+9y=3\cos 3x$;
11. $y''-y'=4x+3+4e^{2x}$;
12. $\begin{cases}\dot{x}=x+2y\\ \dot{y}=x-5\sin t\end{cases}$.

Вариант 17

1. $yy'=e^{2x-y}$;
2. $(x^2+xy)\,y'=x\sqrt{x^2-y^2}+xy+y^2$;
3. $y'\operatorname{tg}x-y=1$;
4. $xy'+y=\sqrt{x}$;
5. $e^x\,dy+(ye^x-2x)\,dx=0$;
6. $x^2y''=(y')^2$;
7. $y''=\dfrac{1}{y^3},\ y(0)=1,\ y'(0)=0$;
8. $y^{IV}+2y'''+y''=0$;
9. $y''-2y'+y=\dfrac{e^x}{x}$;
10. $y''+2y'+5y=3xe^{2x}$;
11. $y''+4y'+4y=3x+1+5\cos 3x$;
12. $\begin{cases}\dot{x}=2x-y\\ \dot{y}=y-2x+18t\end{cases}$.

Вариант 18

1. $xy'+y=y^2$;
2. $4y'=\dfrac{y^2+4x^2}{x^2}$;
3. $y'-\dfrac{y}{x}=x\cos 2x$;
4. $y'-\dfrac{y}{\sqrt{x}}=e^{2\sqrt{x}}\,y^2$;
5. $(\ln y-x)\,dx+(\dfrac{x}{y}-y)\,dy=0$;
6. $y''(2y+3)=2(y')^2$;
7. $x^3y''+x^2y'=1,\ y(1)=1,\ y'(1)=2$;
8. $y^{IV}-3y'''+3y''-y'=0$;
9. $y''+y=\operatorname{ctg}x$;
10. $y''-16y=3xe^{4x}$;
11. $y''+5y'=4x+3+\cos 2x$;
12. $\begin{cases}\dot{x}=x-y\\ \dot{y}=y-x+\cos 3t\end{cases}$.

Вариант 19

1. $y'=\dfrac{y-1}{x+1}$; 2. $(xy'-y)\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}=x$; 3. $xy'+y=\mathrm{e}^x$;

4. $y'-\dfrac{2xy}{1+x^2}=\dfrac{4\operatorname{arctg}x}{\sqrt{1+x^2}}\sqrt{y}$; 5. $xy''+y'=\ln x$; 6. $\left(\dfrac{\sin 2x}{y}+x\right)dx+\left(y-\dfrac{\sin^2 x}{y^2}\right)dy=0$;

7. $y''+y(y')^3=0,\ y(0)=1,\ y'(0)=2$; 8. $y^{IV}+18y''+81y=0$; 9. $y''+y=\dfrac{1}{\cos^2 x}$;

10. $y''+5y'-6y=(2x+3)\mathrm{e}^x$; 11. $y''-4y'=(3x+1)^2+5x\,\mathrm{e}^x$; 12. $\begin{cases}\dot{x}=-y+t-1\\ \dot{y}=x+2t\end{cases}$.

Вариант 20

1. $\sin x\sin y\,dx+\cos x\cos y\,dy=0$; 2. $y^2+x^2y'=xy'y$; 3. $x^2y'+2xy-1=0$;

4. $y'+\dfrac{y}{x}=x^2y^4$; 5. $\left(1+\dfrac{y^2}{x^2}\right)dx-\dfrac{2y}{x}dy=0$; 6. $y''=2(y'-1)\operatorname{ctg}x$;

7. $y^{IV}+2y'''=0$; 8. $y'y^2+yy''=(y')^2,\ y(0)=1,\ y'(0)=2$; 9. $y''+4y'+4y=\mathrm{e}^{-2x}\ln x$;

10. $y''-y'-2y=x\cos x-\sin x$; 11. $y''+9y=x^2+5-9\,\mathrm{e}^{4x}$; 12. $\begin{cases}\dot{x}=3x-4y-\mathrm{e}^{-2t}\\ \dot{y}=x-2y-3\mathrm{e}^{-2t}\end{cases}$.

Вариант 21

1. $(y-2)\,dx+x^2dy=0$; 2. $y'=\dfrac{3x}{y}+\dfrac{y}{x}$; 3. $xy'-y=x^2\,\mathrm{e}^x$;

4. $xy'+2y+x^5y^3\,\mathrm{e}^x=0$; 5. $(5x+xy^2)\,dx+(4y+x^2y)\,dy=0$; 6. $3y'y''=2y$;

7. $x(y''+y')=y',\ y(0)=-1,\ y'(0)=0$; 8. $y^V-2y^{IV}+y'''=0$; 9. $y''+5y'+6y=\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{2x}}$;

10. $y''+2y'-3y=(x+3)\mathrm{e}^x$; 11. $y''+4y=1+6\cos 3x$; 12. $\begin{cases}\dot{x}=y-5\cos t\\ \dot{y}=2x+y\end{cases}$.

Вариант 22

1. $\sqrt{3+y^2}\,dx-y\,dy=x^2y\,dy$; 2. $y\,dy=(2y-x)\,dx$; 2. $xy'-\dfrac{y}{x+1}=x$;

4. $2y'-\dfrac{xy}{x^2-1}=\dfrac{x}{y}$; 5. $x(y''-x)=y'$; 6. $(3x\sin y+1)\,dx+(\dfrac{3}{2}x^2\cos y+1)\,dy=0$;

7. $y^{IV}-5y'''=0$; 8. $3y'y''=y+(y')^3+1,\ y(0)=-2,\ y'(0)=0$; 9. $y''+9y=3\operatorname{tg}3x$;

10. $y''+4y'=(x+1)^2$; 11. $y''-3y'+4y=\cos 3x+12\,\mathrm{e}^{2x}$; 12. $\begin{cases}\dot{x}=y+2\mathrm{e}^t\\ \dot{y}=x+t^2\end{cases}$.

Вариант 23

1. $(1+x)\,y' = xy$; 2. $x^2y' = y(x+y)$; 3. $(1-x)(y'+y) = \mathrm{e}^{-x}$; 4. $\dfrac{x}{y^2} = y' + y$;

5. $\dfrac{y}{x^2}dx - \dfrac{xy+1}{x}dy = 0$; 6. $(x+1)\,y'' + x(y')^2 = y'$; 7. $y^{IV} + 13y'' + 36y = 0$;

8. $y'(1+(y')^2) = 3y''$; $y(2)=1, y'(2)=2$; 9. $y'' + 6y' + 9y = 4\,\mathrm{e}^x(\cos x - \sin x)$;

10. $y'' + 4y' + 4y = \dfrac{\mathrm{e}^{-2x}}{x^3}$; 11. $y'' + 4y' = x^2 + 2x - 3 + 5\mathrm{e}^{3x}$; 12. $\begin{cases} y' = \dfrac{y}{x} \\ z' = y + z \end{cases}$.

Вариант 24

1. $y' - 2\sqrt{y}\ln x = 0$; 2. $(4x^2 + 3xy + y^2)\,dx + (4y^2 + 3xy + x^2)\,dy = 0$; 3. $y' + y\cos x = \sin x\cos x$;

4. $y' - 3y = x\sqrt[3]{y}$; 5. $\left(1 + \dfrac{2x}{y^3}\right)dx + \left(\dfrac{1}{y^2} - \dfrac{3x^2}{y^4}\right)dy = 0$; 6. $y''(1+\ln x) + \dfrac{y'}{x} = 2 + \ln x$;

7. $2y'' = 3y^2$, $y(-2)=1, y'(-2)=1$; 8. $y^{IV} + 4y''' + 5y'' = 0$; 9. $y'' + 2y' + y = \mathrm{e}^{-x}\ln x$;

10. $2y'' + 9y' = 4\sin 3x + \cos 3x$; 11. $y'' + 6y' + 9y = 4x + 3 - 5\mathrm{e}^{-3x}$; 12. $\begin{cases} \dot{x} = x + y + t \\ \dot{y} = -4x - 3y + 2t \end{cases}$.

Вариант 25

1. $(4x + xy^2)\,dx + (3y - x^2y)\,dy = 0$; 2. $y = \left(y' - \mathrm{e}^{\frac{y}{x}}\right)x$; 3. $y' - y\,\mathrm{tg}\,x = \dfrac{1}{\cos x}$;

4. $y' - xy = -y^3\,\mathrm{e}^{-x^2}$; 5. $(3x^2y - \dfrac{4}{x^2})\,dx + (\cos y + x^3)\,dy = 0$; 6. $y\,(y''+1) = (y')^2$;

7. $y''x\ln x = 2y'$, $y(\mathrm{e})=1, y'(\mathrm{e})=2$; 8. $y^{IV} - 15y'' - 16y = 0$; 9. $y'' - 4y' + 4y = \dfrac{e^{2x}}{4+x^2}$;

10. $4y'' - 4y' + y = 4x^2 + 5x$; 11. $y'' - 8y' + 20y = 4\sin 2x + x\,\mathrm{e}^{2x}$; 12. $\begin{cases} \dot{x} = -y + \mathrm{e}^{3t} \\ \dot{y} = -x + 2\,\mathrm{e}^{3t} \end{cases}$.

ТЕСТ «ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ»

Вариант 1

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Изобразить область определения функции $z(x,y)=1/\sqrt{y+1}$.	
2.	Найдите частные производные функции $z=xy^2-2x+3y$.	1) $z'_x=y^2-2; z'_y=2xy+3$; 2) $z'_x=y^2-2; z'_y=2xy-3.$; 3) $z'_x=2xy-2; z'_y=2xy+3$; 4) $z'_x=y^2-2; z'_y=2xy-2x$; 5) $z'_x=y^2+3y; z'_y=2xy+3$.
3.	Найдите $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, если $z=ye^{xy}$.	1) $y^2(3+xy)e^{xy}$; 2) $(1+xy)e^{xy}$; 3) $x(2+xy)e^{xy}$; 4) $y(2+xy)e^{xy}$; 5) y^3e^{xy}.
4.	Найдите производную сложной функции $z=xy^2$, если $x=\sin t;\ y=e^t$.	1) $\mathrm{d}z/\mathrm{dt}=(1+2\mathrm{tg}t)e^{2t}\cos t$; 2) $\mathrm{d}z/\mathrm{dt}=(1-\mathrm{tg}t)e^{2t}\cos t$; 3) $\mathrm{d}z/\mathrm{dt}=(1+2\mathrm{ctg}t)e^{2t}\cos t$; 4) $\mathrm{d}z/\mathrm{dt}=(1+\mathrm{tg}t)e^{t}\cos t$; 5) $\mathrm{d}z/\mathrm{dt}=(4-t\mathrm{tg}t)t^3\cos t$.
5.	Для функции $u=x^2yz$ найдите полный дифференциал $\mathrm{d}u$.	1) $2xyz\mathrm{d}x-x^2z\mathrm{d}y+x^2y\mathrm{d}z$; 2) $2xyz\mathrm{d}x+x^2z\mathrm{d}y+x^2y\mathrm{d}z$; 3) $xyz\mathrm{d}x+x^2z\mathrm{d}y+x^2y\mathrm{d}z$; 4) $2xyz\mathrm{d}x+x^2yz\mathrm{d}y+x^2y\mathrm{d}z$; 5) $2xyz\mathrm{d}x+x^2z\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}z$.
6.	В точке $A(1, 1, 2)$ уравнение касательной плоскости к поверхности $x^2+y^2=4-z$ имеет вид.	1) $y+z=0$; 2) $2x+2y+z-6=0$; 3) $4x+y-5=0$; 4) $y-2z+1=0$; 5) $x+y-2=0$.
7.	Функция $z=3x+6y+x^2-xy+y^2$ имеет локальный...	1) Минимум в точке (-4, -5); 2) Минимум в точке (5, 5); 3) Минимум в точке (2, 0); 4) Минимум в точке (-1, -1); 5) Не имеет экстремума.
8.	Найдите производную функции $u=\sqrt{y+x^2}$ в точке A по направлению вектора $\overrightarrow{AB}$, $A(2,0)$, $B(3,1)$.	1) $1/\sqrt{10}$; 2) $\sqrt{2}$; 3) $5\sqrt{2}/8$; 4) -0,5; 5) $2\sqrt{5}/5$.
9.	В точке $A(1, 0)$ градиент скалярного поля $u=x\mathrm{tg}y$ равен…	1) $\vec{k}$; 2) $1/e(-2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k})$; 3) $\vec{j}$; 4) $2\vec{i}+1/e\,\vec{j}$; 5) $1/6\vec{i}+\vec{j}+5/3\vec{k}$.
10.	Функция $z=4x+4y+x^2+y^2$ в области $x\le 0; y\le 0; x+y\ge -3$ имеет наибольшее z_1 и наименьшее z_2 значения…	1) $z_1=0, z_2=-6$; 2) $z_1=3, z_2=-8$; 3) $z_1=0, z_2=-7,5$; 4) $z_1=0, z_2=-8$; 5) $z_1=3, z_2=-9$.

Тест «Дифференцирование функций нескольких переменных»

Вариант 2

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Изобразить область определения функции $z(x,y)=\ln(x+y)$.	
2.	Найдите частные производные функции $z=\operatorname{arctg}(xy)+2x$.	1) $z'_x = y\Big/\left(1+(xy)^2\right)+2$; $z'_y = y\Big/\left(1+(xy)^2\right)$; 2) $z'_x = 1\Big/\left(1+(xy)^2\right)+2$; $z'_y = 1\Big/\left(1+(xy)^2\right)$; 3) $z'_x = y\Big/\left(1+(xy)^2\right)+2$; $z'_y = x\Big/\left(1+(xy)^2\right)$; 4) $z'_x = y\Big/\left(1+x^2\right)+2$; $z'_y = y\Big/\left(1+y^2\right)$; 5) $z'_x = y\Big/\left(1+x^2\right)+2$; $z'_y = x\Big/\left(1+y^2\right)$.
3.	Найдите $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, если $z=ye^{xy}$.	1) $y^2(3+xy)e^{xy}$; 2) $(1+xy)e^{xy}$; 3) $x(2+xy)e^{xy}$; 4) $y(2+xy)e^{xy}$; 5) y^3e^{xy}.
4.	Найдите производную сложной функции $z=xy^2$, если $x=\cos t$; $y=t^2$.	1) $(1+2\operatorname{tg}t)e^{2t}\cos t$; 2) $(1-\operatorname{tg}t)e^{2t}\cos t$; 3) $(1+2\operatorname{ctg}t)e^{2t}\cos t$; 4) $(4-t\operatorname{tg}t)t^3\cos t$; 5) $(4+t\operatorname{tg}t)t^3\cos t$.
5.	Для функции $u=xe^{yz}$ найдите полный дифференциал $\mathrm{d}u$.	1) $e^{yz}\mathrm{d}x+xze^{yz}\mathrm{d}y+xye^{yz}\mathrm{d}z$; 2) $e^{yz}\mathrm{d}x+xye^{yz}\mathrm{d}y+xye^{yz}\mathrm{d}z$; 3) $xe^{yz}\mathrm{d}x+xze^{yz}\mathrm{d}y+xye^{yz}\mathrm{d}z$; 4) $e^{yz}\mathrm{d}x+xze^{yz}\mathrm{d}y+xyze^{yz}\mathrm{d}z$; 5) $e^{yz}\mathrm{d}x+xze^{yz}\mathrm{d}y+e^{yz}\mathrm{d}z$.
6.	В точке $A(0,\ 1,\ 1)$ уравнение касательной плоскости к поверхности $z^2=y$ имеет вид.	1) $y+z=0$; 2) $2x+2y+z-6=0$; 3) $4x+y-5=0$; 4) $y-2z+1=0$; 5) $x+y-2=0$.
7.	Функция $z=1/x+1/y-xy$ имеет локальный...	1) Минимум в точке (-2, 0); 2) Максимум в точке (-1, -1); 3) Минимум в точке (2, 0); 4) Минимум в точке (5, 5); 5) Не имеет экстремума.
8.	Найдите производную функции $u=x\ln y^2$ в точке A по направлению вектора $\overrightarrow{AB}$, $A(1,1)$, $B(3,2)$.	1) $1/\sqrt{10}$; 2) $\sqrt{2}$; 3) $5\sqrt{2}/8$; 4) -0,5; 5) $2\sqrt{5}/5$.
9.	В точке $A(1,\ 1,\ 0)$ градиент скалярного поля $u=xz/y$ равен…	1) $\vec{k}$; 2) $1/e(-2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k})$; 3) $\vec{j}$; 4) $2\vec{i}+1/e\,\vec{j}$; 5) $1/6\vec{i}+\vec{j}+5/3\vec{k}$.
10.	Функция $z=4x+4y+x^2+y^2$ в области $-3\le x\le 0; -3\le y\le 0$ имеет наибольшее z_1 и наименьшее z_2 значения…	1) $z_1=0, z_2=-6$; 2) $z_1=3, z_2=-8$; 3) $z_1=0, z_2=-8$; 4) $z_1=0, z_2=-7{,}5$; 5) $z_1=3, z_2=-9$.

Тест «Дифференцирование функций нескольких переменных»

Вариант 3

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Изобразить область определения функции $z(x,y)=\sqrt{x-y}$.	
2.	Найдите частные производные функции $z=x^2\ln(xy)$.	1) $z'_x=2x\ln(xy)+x;\ z'_y=x/y$; 2) $z'_x=2x\ln(xy);\ z'_y=x^2/y$; 3) $z'_x=2x\ln(xy)+x;\ z'_y=x^2/y$; 4) $z'_x=x\ln(xy)+x;\ z'_y=x/y$; 5) $z'_x=2x\ln(xy)+x;\ z'_y=x^2/y$.
3.	Найдите $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, если $z=ye^{xy}$.	1) $y^2(3+xy)e^{xy}$; 2) $(1+xy)e^{xy}$; 3) $x(2+xy)e^{xy}$; 4) $y(2+xy)e^{xy}$; 5) y^3e^{xy}.
4.	Найдите производную сложной функции $z=xy^2$, если $x=\ln t;\ y=\sqrt{t}$.	1) $(1+2\operatorname{tg}t)e^{2t}\cos t$; 2) $(1-\operatorname{tg}t)e^{2t}\cos t$; 3) $1+\ln t$; 4) $1+\ln\sqrt{t}$; 5) $(4+t\operatorname{tg}t)t^3\cos t$.
5.	Для функции $u=y\ln x^2$ найдите полный дифференциал $\mathrm{d}u$.	1) $\dfrac{2y}{x}\mathrm{d}x+\ln x^2\mathrm{d}y$; 2) $\dfrac{2y}{x}\mathrm{d}x+y\ln x^2\mathrm{d}y$; 3) $\dfrac{2y}{x^2}\mathrm{d}x+\ln x^2\mathrm{d}y$; 4) $\dfrac{y}{x}\mathrm{d}x+\ln x^2\mathrm{d}y$; 5) $\dfrac{2y}{x}\mathrm{d}x+\ln x\mathrm{d}y$.
6.	В точке $A(1,\ 1,\ 0)$ уравнение касательной плоскости к поверхности $x^2+y^2=2-z^2$ имеет вид…	1) $y+z=0$; 2) $2x+2y+z-6=0$; 3) $4x+y-5=0$; 4) $y-2z+1=0$; 5) $x+y-2=0$.
7.	Функция $z=e^{x/2}(x+y^2)$ имеет локальный...	1) Минимум в точке (-2, 0); 2) Минимум в точке (5, 5); 3) Минимум в точке (2, 0); 4) Максимум в точке (-1, -1); 5) Не имеет экстремума.
8.	Найдите производную функции $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ в точке A по направлению вектора $\overrightarrow{AB}$, $A(1,1,0)$, $B(0,1,1)$.	1) $1/\sqrt{10}$; 2) $\sqrt{2}$; 3) $5\sqrt{2}/8$; 4) -0,5; 5) $2\sqrt{5}/5$.
9.	В точке $A(1,\ e)$ градиент скалярного поля $u=x^2\ln y$ равен…	1) $\vec{k}$; 2) $1/e(-2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k})$; 3) $\vec{j}$; 4) $2\vec{i}+1/e\,\vec{j}$; 5) $1/6\vec{i}+\vec{j}+5/3\vec{k}$.
10.	Функция $z=4x+4y+x^2+y^2$ в области $-4\le x\le 0;-4\le y\le 0$ имеет наибольшее z_1 и наименьшее z_2 значения…	1) $z_1=0, z_2=-6$; 2) $z_1=3, z_2=-8$; 3) $z_1=0, z_2=-8$; 4) $z_1=0, z_2=-7{,}5$; 5) $z_1=3, z_2=-9$.

Тест «Дифференцирование фунций нескольких переменных»

Вариант 4

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Изобразить область определения функции $z(x,y)=\sqrt{2x-y}$.	
2.	Найдите частные производные функции $z=e^{-y/x}$.	1) $z'_x = ye^{-y/x}\big/x^2$; $z'_y=-e^{-y/x}\big/x$; 2) $z'_x = ye^{-y/x}\big/x^2$; $z'_y=-e^{-y/x}$; 3) $z'_x = ye^{-y/x}\big/x^2$; $z'_y=e^{-y/x}\big/x$; 4) $z'_x = -ye^{-y/x}\big/x^2$; $z'_y=-e^{-y/x}\big/x$; 5) $z'_x = -ye^{-y/x}\big/x^2$; $z'_y=e^{-y/x}\big/x$.
3.	Найдите $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, если $z=ye^{xy}$.	1) $y^2(3+xy)e^{xy}$; 2) $(1+xy)e^{xy}$; 3) $x(2+xy)e^{xy}$; 4) $y(2+xy)e^{xy}$; 5) y^3e^{xy}.
4.	Найдите частные производные сложной функции $z=xy^2$, если $x=uv$; $y=u/v$.	1) $z'_u=3u^2\big/v$; $z'_v=-u^3\big/v^2$; 2) $z'_u=u^2\big/v$; $z'_v=-u^3\big/v^2$; 3) $z'_u=3u^2\big/v$; $z'_v=u^3\big/v^2$; 4) $z'_u=3u^2\big/v$; $z'_v=-u^3\big/v$; 5) $z'_u=u^2\big/v$; $z'_v=-u^2\big/v^2$.
5.	Для функции $u=yz\sin x$ найдите полный дифференциал $\mathrm{d}u$.	1) $yz\cos x\mathrm{d}x+\sin x\mathrm{d}y+y\sin x\mathrm{d}z$; 2) $yz\cos x\mathrm{d}x+z\sin x\mathrm{d}y+y\sin x\mathrm{d}z$; 3) $yz\cos x\mathrm{d}x+z\cos x\mathrm{d}y+y\sin x\mathrm{d}z$; 4) $-yz\cos x\mathrm{d}x+z\sin x\mathrm{d}y+y\sin x\mathrm{d}z$; 5) $yz\sin x\mathrm{d}x+z\sin x\mathrm{d}y+y\sin x\mathrm{d}z$;.
6.	В точке $A(2, -3, 0)$ уравнение касательной плоскости к поверхности $x^2+z^2=1-y$ имеет вид…	1) $y+z=0$; 2) $2x+2y+z-6=0$; 3) $4x+y-5=0$; 4) $y-2z+1=0$; 5) $x+y-2=0$.
7.	Функция $z=x^3+y^3-15xy$ имеет локальный...	1) Минимум в точке (-2, 0); 2) Минимум в точке (5, 5); 3) Минимум в точке (2, 0); 4) Минимум в точке (-1, -1); 5) Не имеет экстремума.
8.	Найдите производную функции $u=xyz$ в точке A по направлению вектора $\overrightarrow{AB}$, $A(1,1,1)$, $B(1,2,2)$.	1) $\sqrt{2}$; 2) $1\big/\sqrt{10}$;; 3) $5\sqrt{2}\big/8$; 4) -0,5; 5) $2\sqrt{5}\big/5$.
9.	В точке $A(1, 2,-1)$ градиент скалярного поля $u=ye^z\big/x$ равен…	1) $\vec{k}$; 2) $1/6\vec{i}+\vec{j}+5/3\vec{k}$; 3) $\vec{j}$; 4) $2\vec{i}+1/e\,\vec{j}$; 5) $1/e(-2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k})$.
10.	Функция $z=4x+4y+x^2+y^2$ в области $x\le 0; y\le 0; x+y\ge -4$ имеет наибольшее z_1 и наименьшее z_2 значения…	1) $z_1=0, z_2=-6$; 2) $z_1=3, z_2=-8$; 3) $z_1=0, z_2=-8$; 4) $z_1=0, z_2=-7{,}5$; 5) $z_1=3, z_2=-9$.

Тест «Дифференцирование функций нескольких переменных»
Вариант 5

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Изобразить область определения функции $z(x,y)=\ln(2x-y)$.	
2.	Найдите частные производные функции $z=\arcsin\sqrt{1-xy}$.	1) $z'_x=0,5\sqrt{y/(x(1-xy))}$; $z'_y=0,5\sqrt{x/(y(1-xy))}$; 2) $z'_x=-\sqrt{y/(x(1-xy))}$; $z'_y=-\sqrt{x/(y(1-xy))}$; 3) $z'_x=-0,5\sqrt{y/(x(1-xy))}$; $z'_y=-0,5\sqrt{x/(y(1-xy))}$; 4) $z'_x=\sqrt{y/(x(1-xy))}$; $z'_y=\sqrt{x/(y(1-xy))}$; 5) $z'_x=-0,5\sqrt{y/(x(1-xy))}$; $z'_y=-0,5\sqrt{x/(y(1-xy))}$.
3.	Найдите $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$, если $z=ye^{2xy}$.	1) $y^2(3+xy)e^{2xy}$; 2) $2y(1+2xy)e^{xy}$; 3) $2x(1+2xy)e^{2xy}$; 4) $4y(1+xy)e^{2xy}$; 5) y^3e^{2xy}.
4.	Найдите частные производные сложной функции $z=xy^2$, если $x=u\sin v$; $y=v\ln u$.	1) $z'_u=v^2\ln u\sin v(\ln u+2)$; $z'_v=u\ln^2 vu(v\cos v+2)$; 2) $z'_u=v^2\ln u\sin v(\ln u+2)$; $z'_v=u\ln^2 vu(v+2\sin v)$; 3) $z'_u=v^2\ln u\sin v(\ln u+2)$; $z'_v=uv\ln u(v\cos v+2\sin v)$; 4) $z'_u=v\ln u\sin v(\ln u+2)$; $z'_v=uv\ln^2 u(v\cos v+2\sin v)$; 5) $z'_u=v^2\ln u\sin v(\ln u+2)$; $z'_v=u\ln^2 vu(v\cos v+2\sin v)$.
5.	Для функции $u=x\ln(xy)$ найдите полный дифференциал $\mathrm{d}u$.	1) $(1+\ln(xy))\mathrm{d}x+x/y\,\mathrm{d}y$; 2) $\ln(xy)\mathrm{d}x+x/y\,\mathrm{d}y$; 3) $(1+\ln(xy))\mathrm{d}x+1/y\,\mathrm{d}y$; 4) $x\mathrm{d}x+x/y\,\mathrm{d}y$; 5) $\ln(xy)\mathrm{d}x+1/y\,\mathrm{d}y$;.
6.	В точке $A(1, 1, -1)$ уравнение касательной плоскости к поверхности $z^2=(x-1)^2+y^2$ имеет вид…	1) $y+z=0$; 2) $2x+2y+z-6=0$; 3) $4x+y-5=0$; 4) $y-2z+1=0$; 5) $x+y-2=0$.
7.	Функция $z=x^2+y^2$ имеет локальный...	1) Минимум в точке (-2, 0); 2) Минимум в точке (5, 5); 3) Минимум в точке (0, 0); 4) Минимум в точке (-1, -1); 5) Не имеет экстремума.
8.	Найдите производную функции $u=\mathrm{arctg}(xy)$ в точке A по направлению вектора $\overrightarrow{AB}$, $A(1,2)$, $B(2,5)$.	1) $1/\sqrt{10}$; 2) $\sqrt{2}$; 3) $5\sqrt{2}/8$; 4) -0,5; 5) $2\sqrt{5}/5$.
9.	В точке $A(1, 1, 1)$ градиент скалярного поля $u=\sqrt{1/2+x^2/2+3y^2+5z^2}$ равен…	1) $\vec{k}$; 2) $1/e(-2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k})$; 3) $\vec{j}$; 4) $2\vec{i}+1/e\,\vec{j}$; 5) $1/6\vec{i}+\vec{j}+5/3\vec{k}$.
10.	Функция $z=4x+4y+x^2+y^2$ в области $x\ge 0; y\ge 0; x+y\le 3$ имеет наибольшее z_1 и наименьшее z_2 значения…	1) $z_1=0, z_2=-6$; 2) $z_1=3, z_2=-8$; 3) $z_1=0, z_2=-8$; 4) $z_1=21, z_2=0$; 5) $z_1=3, z_2=-9$.

Тест «Дифференцирование функций нескольких переменных»

Вариант 6

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Изобразить область определения функции $z(x,y)=\ln(x-2y)$.	
2.	Найдите частные производные функции $z=\arccos\sqrt{1-xy}$.	1) $z'_x=0,5\sqrt{y/(x(1-xy))}$; $z'_y=0,5\sqrt{x/(y(1-xy))}$; 2) $z'_x=-\sqrt{y/(x(1-xy))}$; $z'_y=-\sqrt{x/(y(1-xy))}$; 3) $z'_x=-0,5\sqrt{y/(x(1-xy))}$; $z'_y=-0,5\sqrt{x/(y(1-xy))}$; 4) $z'_x=\sqrt{y/(x(1-xy))}$; $z'_y=\sqrt{x/(y(1-xy))}$; 5) $z'_x=-0,5\sqrt{y^2/(x(1-xy))}$; $z'_y=-0,5\sqrt{x/(y(1-xy))}$.
3.	Найдите $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, если $z=ye^{2xy}$.	1) $y^2(3+xy)e^{2xy}$; 2) $(1+xy)e^{2xy}$; 3) $4x(1+xy)e^{2xy}$; 4) $y(2+xy)e^{2xy}$; 5) y^3e^{2xy}.
4.	Найдите производную сложной функции $z=xy^3$, если $x=\sin t;\ y=e^t$	1) $(1+3\mathrm{tg}t)e^{3t}\cos t$; 2) $(1+\mathrm{tg}t)e^{3t}\cos t$; 3) $(1+\sin t)e^{3t}\cos t$; 4) $(1-3\mathrm{tg}t)e^{3t}\cos t$; 5) $(1+3\mathrm{tg}t)e^{3t}\sin t$;.
5.	Для функции $u=y\ln(xy)$ найдите полный дифференциал $\mathrm{d}u$.	1) $\ln(xy)\mathrm{d}x+1/y\,\mathrm{d}y$; 2) $\ln(xy)\mathrm{d}x+y/x\,\mathrm{d}y$; 3) $(1+\ln(xy))\mathrm{d}x+1/x\,\mathrm{d}y$; 4) $x\mathrm{d}x+x/y\,\mathrm{d}y$; 5) $y/x\,\mathrm{d}x+(1+\ln(xy))\mathrm{d}y$.
6.	В точке $A(1, 1, -1)$ уравнение касательной плоскости к поверхности $z^2=(x+1)^2+y^2$ имеет вид…	1) $y+z=0$; 2) $2x+y+z-2=0$; 3) $4x+y-5=0$; 4) $y-2z+1=0$; 5) $x+y-2=0$.
7.	Функция $z=-x^2-y^2+1$ имеет локальный...	1) Минимум в точке (-2, 0); 2) Минимум в точке (5, 5); 3) Минимум в точке (2, 0); 4) Максимум в точке (0, 0); 5) Не имеет экстремума.
8.	Найдите производную функции $u=\mathrm{arcctg}(xy)$ в точке A по направлению вектора $\overrightarrow{AB}$, $A(1,2)$, $B(2,5)$.	1) $-1/\sqrt{10}$; 2) $-\sqrt{2}$; 3) $5\sqrt{2}/8$; 4) -0,5; 5) $2\sqrt{5}/5$.
9.	В точке $A(1, 1, 1)$ градиент скалярного поля $u=\sqrt{x^2+3y^2+5z^2}$ равен…	1) $\vec{k}$; 2) $1/e(-2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k})$; 3) $\vec{j}$; 4) $2\vec{i}+1/e\,\vec{j}$; 5) $1/3\vec{i}+\vec{j}+5/3\vec{k}$.
10.	Функция $z=4x+4y-x^2-y^2$ в области $x\ge 0; y\ge 0; x+y\le 4$ имеет наибольшее z_1 и наименьшее z_2 значения…	1) $z_1=0, z_2=-6$; 2) $z_1=3, z_2=-8$; 3) $z_1=0, z_2=-8$; 4) $z_1=0, z_2=-7,5$; 5) $z_1=8, z_2=0$.

Тест «Дифференцирование функций нескольких переменных»

Вариант 7

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Изобразить область определения функции $z(x,y)=\ln(2x+y)$.	
2.	Найдите частные производные функции $z=x^2\ln(xy)+2x$.	1) $z'_x=2x\ln(xy)+x+2;\ z'_y=x/y$; 2) $z'_x=2x\ln(xy);\ z'_y=x^2/y$; 3) $z'_x=2x\ln(xy)+x+2;\ z'_y=x^2/y$; 4) $z'_x=x\ln(xy)+x;\ z'_y=x/y$; 5) $z'_x=2x\ln(xy)+x+2;\ z'_y=x^3/y$.
3.	Найдите $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, если $z=ye^{2xy}$.	1) $y^2(3+xy)e^{xy}$; 2) $4y(1+xy)e^{2xy}$; 3) $4x(1+xy)e^{2xy}$; 4) $y(2+xy)e^{2xy}$; 5) y^3e^{xy}.
4.	Найдите производную сложной функции $z=xy^3$, если $x=\cos t;\ y=e^t$	1) $(1+3\mathrm{tg}t)e^{3t}\cos t$; 2) $(1+\mathrm{tg}t)e^{3t}\cos t$; 3) $(1+\sin t)e^{3t}\cos t$; 4) $(3-\mathrm{tg}t)e^{3t}\cos t$; 5) $(1+3\mathrm{tg}t)e^{3t}\sin t$;.
5.	Для функции $u=yz\cos x$ найдите полный дифференциал $\mathrm{d}u$.	1) $yz\cos x\mathrm{d}x+\sin x\mathrm{d}y+y\sin x\mathrm{d}z$; 2) $yz\cos x\mathrm{d}x+z\sin x\mathrm{d}y+y\sin x\mathrm{d}z$; 3) $yz\cos x\mathrm{d}x+z\cos x\mathrm{d}y+y\sin x\mathrm{d}z$; 4) $-yz\sin x\mathrm{d}x+z\cos x\mathrm{d}y+y\cos x\mathrm{d}z$; 5) $yz\sin x\mathrm{d}x+z\sin x\mathrm{d}y+y\sin x\mathrm{d}z$;.
6.	В точке $A(0,\ 1,\ 1)$ уравнение касательной плоскости к поверхности $z^2=y+x$ имеет вид.	1) $x+y-2z+1=0$; 2) $2x+2y+z-6=0$; 3) $4x+y-5=0$; 4) $y-2z+1=0$; 5) $x+y-2=0$.
7.	Функция $z=x^3+y^3-8xy$ имеет локальный...	1) Не имеет экстремума; 2) Минимум в точке (5, 5); 3) Минимум в точке (2, 0); 4) Минимум в точке (-1, -1); 5) Минимум в точке (8/3, 8/3).
8.	Найдите производную функции $u=\sqrt{y+x^2+2}$ в точке A по направлению вектора $\overrightarrow{AB}$, $A(2,0)$, $B(3,1)$.	1) $1/\sqrt{10}$; 2) $\sqrt{2}$; 3) $5\sqrt{3}/12$; 4) -0,5; 5) $\sqrt{3}/4$.
9.	В точке $A(1,\ \pi/2)$ градиент скалярного поля $u=x\mathrm{ctg}y$ равен…	1) $-\vec{j}$; 2) $1/e(-2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k})$; 3) $\vec{k}$; 4) $2\vec{i}+1/e\,\vec{j}$; 5) $1/6\,\vec{i}+\vec{j}+5/3\,\vec{k}$.
10.	Функция $z=2x+2y+x^2+y^2$ в области $x\ge 0; y\ge 0; x+y\le 3$ имеет наибольшее z_1 и наименьшее z_2 значения…	1) $z_1=0, z_2=-6$; 2) $z_1=3, z_2=-8$; 3) $z_1=16, z_2=0$; 4) $z_1=15, z_2=0$; 5) $z_1=3, z_2=-9$.

Тест «Дифференцирование функций нескольких переменных»

Вариант 8

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Изобразить область определения функции $z(x,y)=\dfrac{2}{\sqrt{3x-y}}$.	
2.	Найдите частные производные функции $z=\operatorname{arctg}\sqrt{xy}$.	1) $z'_x=\sqrt{y}\Big/\left(2\sqrt{x}\,(1-xy)\right)$; $z'_y=\sqrt{x}\Big/\left(2\sqrt{y}\,(1+xy)\right)$; 2) $z'_x=\sqrt{y}\Big/\left(2\sqrt{x}\,(1+xy)\right)$; $z'_y=\sqrt{x}\Big/\left(2\sqrt{y}\,(1+x^2y)\right)$; 3) $z'_x=\sqrt{y}\Big/\left(2\sqrt{x}\,(1+xy)\right)$; $z'_y=\sqrt{x}\Big/\left(2\sqrt{y}\,(1+xy)\right)$; 4) $z'_x=\sqrt{y}\Big/\left(2x(1+xy)\right)$; $z'_y=\sqrt{x}\Big/\left(2y(1+xy)\right)$; 5) $z'_x=1\Big/\left(2\sqrt{x}\,(1+xy)\right)$; $z'_y=1\Big/\left(2\sqrt{y}\,(1+xy)\right)$.
3.	Найдите $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$, если $z=ye^{-2xy}$.	1) $y^2(3+xy)e^{-2xy}$; 2) $(1+xy)e^{-2xy}$; 3) $-4x(1+x)e^{-2xy}$; 4) $-4y(1-xy)e^{-2xy}$; 5) $4y^3e^{-2xy}$.
4.	Найдите производную сложной функции $z=xy^3$, если $x=\ln t$; $y=2t$.	1) $(1+2\operatorname{tg}t)e^{2t}\cos t$; 2) $(1-\operatorname{tg}t)e^{2t}\cos t$; 3) $8t^2(1+3\ln t)$; 4) $1+\ln\sqrt{t}$; 5) $(4+t\operatorname{tg}t)t^3\cos t$.
5.	Для функции $u=2x\ln(xy)$ найдите полный дифференциал $\mathrm{d}u$.	1) $(2+2\ln(xy))\mathrm{d}x+2x/y\,\mathrm{d}y$; 2) $2\ln(xy)\mathrm{d}x+2x/y\,\mathrm{d}y$; 3) $(1+\ln(xy))\mathrm{d}x+1/y\,\mathrm{d}y$; 4) $2x\mathrm{d}x+2x/y\,\mathrm{d}y$; 5) $\ln(xy)\mathrm{d}x+1/y\,\mathrm{d}y$;.
6.	В точке $A(1, 1, -1)$ уравнение касательной плоскости к поверхности $z^2=x^2+(y-3)^2$ имеет вид…	1) $y+z=0$; 2) $2x+2y+z-6=0$; 3) $4x+y-5=0$; 4) $y-2z+1=0$; 5) $x-2y+z+2=0$.
7.	Функция $z=x^3+y^3-8xy+6$ имеет локальный...	1) Минимум в точке (8/3, 8/3); 2) Минимум в точке (5, 5); 3) Минимум в точке (2, 0); 4) Минимум в точке (-1, -1); 5) Не имеет экстремума.
8.	Найдите производную функции $u=2\operatorname{arctg}(xy)$ в точке A по направлению вектора $\overrightarrow{AB}$, $A(1,2)$, $B(2,5)$.	1) $1/\sqrt{10}$; 2) $\sqrt{2}$; 3) $5\sqrt{2}/8$; 4) -0,5; 5) $2\sqrt{5}/5$.
9.	В точке $A(1, 2,-1)$ градиент скалярного поля $u=ye^{2z}\big/x$ равен…	1) $\vec{k}$; 2) $e^2(-2\vec{i}+\vec{j}+4\vec{k})$; 3) $\vec{j}$; 4) $2\vec{i}+1/e\,\vec{j}$; 5) $1/6\,\vec{i}+\vec{j}+5/3\,\vec{k}$.
10.	Функция $z=2x+2y+x^2+y^2$ в области $x\le 0; y\le 0; x+y\ge -3$ имеет наибольшее z_1 и наименьшее z_2 значения…	1) $z_1=0, z_2=-6$; 2) $z_1=3, z_2=-8$; 3) $z_1=16, z_2=0$; 4) $z_1=15, z_2=-1{,}5$; 5) $z_1=3, z_2=-9$.

Тест «Дифференцирование функций нескольких переменных»

Вариант 9

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Изобразить область определения функции $z(x,y)=\log_3(2x-y)$.	
2.	Найдите частные производные функции: $z=\arcsin\left(x^2y\right)$.	1) $z'_x=1\big/\sqrt{1-x^4y^2}$; $z'_y=x\big/\sqrt{1-x^4y^2}$; 2) $z'_x=y\big/\sqrt{1-x^4y^2}$; $z'_y=x\big/\sqrt{1-x^4y^2}$; 3) $z'_x=y\big/\sqrt{1-x^4y^2}$; $z'_y=x^2\big/\sqrt{1-x^4y^2}$; 4) $z'_x=1\big/\sqrt{1-x^4y^2}$; $z'_y=1\big/\sqrt{1-x^4y^2}$; 5) $z'_x=y\big/\sqrt{1-y^2}$; $z'_y=x^2\big/\sqrt{1-y^2}$.
3.	Найдите $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, если $z=(y+2)e^{-2xy}$.	1) $-4x(1-xy-2x)e^{-2xy}$; 2) $-4x(1-2x)e^{-2xy}$; 3) $(1-xy-2x)e^{-2xy}$;; 4) $-4x(1-xy)e^{-2xy}$; 5) $-4xe^{-2xy}$;.
4.	Найдите частные производные сложной функции: $z=\ln(xy)$, если $x=\sin u;\ y=e^{uv}$.	1) $z'_u=\cos u+v;\ z'_v=u;$ 2) $z'_u=\mathrm{ctg}u+v;\ z'_v=u;$ 3) $z'_u=\mathrm{ctg}v+v;\ z'_v=u;$ 4) $z'_u=\mathrm{ctg}u+v;\ z'_v=v;$ 5) $z'_u=\sin u+v;\ z'_v=u;$.
5.	Для функции $u=xe^{2xy}+2$ найдите полный дифференциал $\mathrm{d}u$.	1) $e^{2xy}((1+xy)\mathrm{d}x+2x^2\mathrm{d}y)$; 2) $e^{2xy}((1+2xy)\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y)$; 3) $e^{2xy}(xy\mathrm{d}x+2x^2\mathrm{d}y)$; 4) $e^{2xy}((1+2y)\mathrm{d}x+2x^2\mathrm{d}y)$; 5) $e^{2xy}((1+2xy)\mathrm{d}x+2x^2\mathrm{d}y)$;.
6.	В точке A(1, 1, -1) уравнение касательной плоскости к поверхности $(z+3)^2=(x-1)^2+y^2$ имеет вид…	1) $y+z=0$; 2) $2x+2y+z-6=0$; 3) $4x+y-5=0$; 4) $y-2z-3=0$; 5) $x+y-2=0$.
7.	Функция $z=e^{x/2}(x-y^2)$ имеет локальный...	1) Минимум в точке (-2, 0); 2) Минимум в точке (5, 5); 3) Минимум в точке (2, 0); 4) Максимум в точке (-1, -1); 5) Не имеет экстремума.
8.	Найдите производную функции $u=3xyz$ в точке A по направлению вектора $\overrightarrow{AB}$, $A(1,1,1)$, $B(1,2,2)$.	1) $1\big/\sqrt{10}$; 2) $3\sqrt{2}$; 3) $5\sqrt{2}\big/8$; 4) -0,5; 5) $2\sqrt{5}\big/5$.
9.	В точке A(1, 1, 1) градиент скалярного поля $u=\sqrt{1/2+x^2/2+3y^2-z^2}$ равен…	1) $\vec{k}$; 2) $1/e(-2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k})$; 3) $\vec{j}$; 4) $2\vec{i}+1/e\,\vec{j}$; 5) $\sqrt{3}/6\,\vec{i}+\sqrt{3}\,\vec{j}-\sqrt{3}/3\,\vec{k}$.
10.	Функция $z=2x+2y+x^2+y^2$ в области $x\ge 0; y\ge 0; x+y\le 2$ имеет наибольшее z_1 и наименьшее z_2 значения…	1) $z_1=0, z_2=-6$; 2) $z_1=3, z_2=-8$; 3) $z_1=8, z_2=0$; 4) $z_1=15, z_2=-1{,}5$; 5) $z_1=6, z_2=0$.

Тест «Дифференцирование функций нескольких переменных»
Вариант 10

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Изобразить область определения функции $z(x,y)=\log_3(2x-y)$.	
2.	Найдите частные производные функции $z=\cos^2(x^3+y^3)$.	1) $z'_x=-3x^2\sin(2x^3+2y^3);\ z'_y=-3y^2\sin(2x^3+2y^3)$; 2) $z'_x=3x^2\sin(2x^3+2y^3);\ z'_y=3y^2\sin(2x^3+2y^3)$; 3) $z'_x=-3x^2\sin^2(x^3+y^3);\ z'_y=-3y^2\sin^2(x^3+y^3)$; 4) $z'_x=3x^2\sin(x^3+y^3);\ z'_y=3y^2\sin(x^3+y^3)$; 5) $z'_x=-3x^2\sin^2(x^3+y^3);\ z'_y=-3y^2\sin^2(x^3+y^3)$.
3.	Найдите $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, если $z=e^{-x^2y}$.	1) $2(2x^2y-1)e^{-x^2y}$; 2) $-2(2x^2y-1)e^{-x^2y}$; 3) $(x^2y^2-1)e^{-y}$; 4) $2y(2x^2y-1)e^{-x^2y}$; 5) $2x^2ye^{-x^2y}$.
4.	Найдите производную сложной функции $z=x^2y$, если $x=e^{2t};\ y=2\ln t$.	1) $e^{4t}(4\ln t+1/t)$; 2) $2e^{4t}(2\ln t+1/t)$; 3) $2e^{4t}(4\ln t+1/t)$; 4) $2e^{2t}(4\ln t+1/t)$; 5) $2e^{4t}\ln t$.
5.	Для функции $u=x^2\cos(xy)$ найдите полный дифференциал $\mathrm{d}u$.	1) $(2x\cos(xy)-y\sin(xy))\mathrm{d}x-x^3\sin(xy)\mathrm{d}y$; 2) $(2x\cos(xy))\mathrm{d}x$; 3) $-x^3\sin(xy)\mathrm{d}y$; 4) $(2x\cos(xy)-y\sin(xy))\mathrm{d}x+x^3\sin(xy)\mathrm{d}y$; 5) $(2x\cos(xy)-y\sin(xy))\mathrm{d}x-\sin(xy)\mathrm{d}y$; .
6.	В точке $A(1, 1, -1)$ уравнение касательной плоскости к поверхности $z^2=(x-1)^2+(y+1)^2$ имеет вид…	1) $y+z=0$; 2) $2x+2y+z-6=0$; 3) $4x+y-5=0$; 4) $y-2z+1=0$; 5) $2y+z-1=0$.
7.	Функция $z=\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{y}-2xy$ имеет локальный...	1) Минимум в точке (-2, 0); 2) Минимум в точке (5, 5); 3) Минимум в точке (2, 0); 4) Максимум в точке (-1, -1); 5) Не имеет экстремума.
8.	Найдите производную функции $u=\sqrt{y^2+x^2}$ в точке A по направлению вектора $\overrightarrow{AB},\ A(2,0),\ B(3,1)$.	1) $1/\sqrt{10}$; 2) $\sqrt{2}/2$; 3) $5\sqrt{2}/8$; 4) -0,5; 5) $2\sqrt{5}/5$.
9.	В точке $A(-1, 1, 1)$ градиент скалярного поля $u=\sqrt{1/2+x^2/2+3y^2+5z^2}$ равен…	1) $\vec{k}$; 2) $1/e(-2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k})$; 3) $\vec{j}$; 4) $2\vec{i}+1/e\,\vec{j}$; 5) $-1/6\vec{i}+\vec{j}+5/3\vec{k}$.
10.	Функция $z=x+y-x^2-y^2$ в области $x\ge 0; y\ge 0; x+y\le 3$ имеет наибольшее z_1 и наименьшее z_2 значения…	1) $z_1=0, z_2=-6$; 2) $z_1=3, z_2=-8$; 3) $z_1=0, z_2=-8$; 4) $z_1=0{,}5,\ \ z_2=-6$; 5) $z_1=3, z_2=-9$.

Тест «Дифференцирование функций нескольких переменных»

Вариант 11

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Изобразить область определения функции $z(x, y) = 1/\sqrt{y+1}$.	
2.	Найдите частные производные функции $z = xy^2 - 2x + 3y$.	1) $z'_x = y^2 - 2; z'_y = 2xy + 3$; 2) $z'_x = y^2 - 2; z'_y = 2xy - 3.$; 3) $z'_x = 2xy - 2; z'_y = 2xy + 3$; 4) $z'_x = y^2 - 2; z'_y = 2xy - 2x$; 5) $z'_x = y^2 + 3y; z'_y = 2xy + 3$.
3.	Найдите $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, если $z = ye^{xy}$.	1) $y^2(3+xy)e^{xy}$; 2) $(1+xy)e^{xy}$; 3) $x(2+xy)e^{xy}$; 4) $y(2+xy)e^{xy}$; 5) $y^3 e^{xy}$.
4.	Найдите производную сложной функции $z = xy^2$, если $x = \sin t;\ y = e^t$.	1) $\mathrm{d}z/\mathrm{dt} = (1 + 2\mathrm{tg}t)e^{2t}\cos t;$ 2) $\mathrm{d}z/\mathrm{dt} = (1 - \mathrm{tg}t)e^{2t}\cos t;$ 3) $\mathrm{d}z/\mathrm{dt} = (1 + 2\mathrm{ctg}t)e^{2t}\cos t;$ 4) $\mathrm{d}z/\mathrm{dt} = (1 + \mathrm{tg}t)e^{t}\cos t;$ 5) $\mathrm{d}z/\mathrm{dt} = (4 - t\mathrm{tg}t)t^3\cos t$.
5.	Для функции $u = x^2yz$ найдите полный дифференциал $\mathrm{d}u$.	1) $2xyz\mathrm{d}x - x^2z\mathrm{d}y + x^2y\mathrm{d}z;$ 2) $2xyz\mathrm{d}x + x^2z\mathrm{d}y + x^2y\mathrm{d}z;$ 3) $xyz\mathrm{d}x + x^2z\mathrm{d}y + x^2y\mathrm{d}z;$ 4) $2xyz\mathrm{d}x + x^2yz\mathrm{d}y + x^2y\mathrm{d}z;$ 5) $2xyz\mathrm{d}x + x^2z\mathrm{d}y + xy\mathrm{d}z$.
6.	В точке $A(1, 1, 2)$ уравнение касательной плоскости к поверхности $x^2 + y^2 = 4 - z$ имеет вид.	1) $y + z = 0$; 2) $2x + 2y + z - 6 = 0$; 3) $4x + y - 5 = 0$; 4) $y - 2z + 1 = 0$; 5) $x + y - 2 = 0$.
7.	Функция $z = 3x + 6y + x^2 - xy + y^2$ имеет локальный...	1) Минимум в точке (-4, -5); 2) Минимум в точке (5, 5); 3) Минимум в точке (2, 0); 4) Минимум в точке (-1, -1); 5) Не имеет экстремума.
8.	Найдите производную функции $u = \sqrt{y + x^2}$ в точке A по направлению вектора $\overrightarrow{AB},\ A(2,0),\ B(3,1)$.	1) $1/\sqrt{10}$; 2) $\sqrt{2}$; 3) $5\sqrt{2}/8$; 4) -0,5; 5) $2\sqrt{5}/5$.
9.	В точке $A(1, 0)$ градиент скалярного поля $u = x\mathrm{tg}y$ равен…	1) $\vec{k}$; 2) $1/e(-2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k})$; 3) $\vec{j}$; 4) $2\vec{i} + 1/e\,\vec{j}$; 5) $1/6\vec{i} + \vec{j} + 5/3\vec{k}$.
10.	Функция $z = 4x + 4y + x^2 + y^2$ в области $x \le 0; y \le 0; x + y \ge -3$ имеет наибольшее z_1 и наименьшее z_2 значения…	1) $z_1 = 0, z_2 = -6$; 2) $z_1 = 3, z_2 = -8$; 3) $z_1 = 0, z_2 = -7{,}5$; 4) $z_1 = 0, z_2 = -8$; 5) $z_1 = 3, z_2 = -9$.

Тест «Дифференцирование функций нескольких переменных»

Вариант 12

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Изобразить область определения функции $z(x,y)=\ln(x+y)$.	
2.	Найдите частные производные функции $z=\operatorname{arctg}(xy)+2x$.	1) $z'_x = y\Big/\left(1+(xy)^2\right)+2$; $z'_y = y\Big/\left(1+(xy)^2\right)$; 2) $z'_x = 1\Big/\left(1+(xy)^2\right)+2$; $z'_y = 1\Big/\left(1+(xy)^2\right)$; 3) $z'_x = y\Big/\left(1+(xy)^2\right)+2$; $z'_y = x\Big/\left(1+(xy)^2\right)$; 4) $z'_x = y\Big/\left(1+x^2\right)+2$; $z'_y = y\Big/\left(1+y^2\right)$; 5) $z'_x = y\Big/\left(1+x^2\right)+2$; $z'_y = x\Big/\left(1+y^2\right)$.
3.	Найдите $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, если $z = ye^{xy}$.	1) $y^2(3+xy)e^{xy}$; 2) $(1+xy)e^{xy}$; 3) $x(2+xy)e^{xy}$; 4) $y(2+xy)e^{xy}$; 5) y^3e^{xy}.
4.	Найдите производную сложной функции $z=xy^2$, если $x=\cos t$; $y=t^2$.	1) $(1+2\operatorname{tg}t)e^{2t}\cos t$; 2) $(1-\operatorname{tg}t)e^{2t}\cos t$; 3) $(1+2\operatorname{ctg}t)e^{2t}\cos t$; 4) $(4-t\operatorname{tg}t)t^3\cos t$; 5) $(4+t\operatorname{tg}t)t^3\cos t$.
5.	Для функции $u=xe^{yz}$ найдите полный дифференциал $\mathrm{d}u$.	1) $e^{yz}\mathrm{d}x+xze^{yz}\mathrm{d}y+xye^{yz}\mathrm{d}z$; 2) $e^{yz}\mathrm{d}x+xye^{yz}\mathrm{d}y+xye^{yz}\mathrm{d}z$; 3) $xe^{yz}\mathrm{d}x+xze^{yz}\mathrm{d}y+xye^{yz}\mathrm{d}z$; 4) $e^{yz}\mathrm{d}x+xze^{yz}\mathrm{d}y+xyze^{yz}\mathrm{d}z$; 5) $e^{yz}\mathrm{d}x+xze^{yz}\mathrm{d}y+e^{yz}\mathrm{d}z$.
6.	В точке $A(0,\ 1,\ 1)$ уравнение касательной плоскости к поверхности $z^2=y$ имеет вид.	1) $y+z=0$; 2) $2x+2y+z-6=0$; 3) $4x+y-5=0$; 4) $y-2z+1=0$; 5) $x+y-2=0$.
7.	Функция $z=1/x+1/y-xy$ имеет локальный...	1) Минимум в точке (-2, 0); 2) Максимум в точке (-1, -1); 3) Минимум в точке (2, 0); 4) Минимум в точке (5, 5); 5) Не имеет экстремума.
8.	Найдите производную функции $u=x\ln y^2$ в точке A по направлению вектора $\overrightarrow{AB}$, $A(1,1)$, $B(3,2)$.	1) $1\big/\sqrt{10}$; 2) $\sqrt{2}$; 3) $5\sqrt{2}\big/8$; 4) -0,5; 5) $2\sqrt{5}\big/5$.
9.	В точке $A(1,\ 1,\ 0)$ градиент скалярного поля $u=xz/y$ равен…	1) $\vec{k}$; 2) $1/e(-2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k})$; 3) $\vec{j}$; 4) $2\vec{i}+1/e\,\vec{j}$; 5) $1/6\vec{i}+\vec{j}+5/3\vec{k}$.
10.	Функция $z=4x+4y+x^2+y^2$ в области $-3\le x\le 0; -3\le y\le 0$ имеет наибольшее z_1 и наименьшее z_2 значения…	1) $z_1=0, z_2=-6$; 2) $z_1=3, z_2=-8$; 3) $z_1=0, z_2=-8$; 4) $z_1=0, z_2=-7{,}5$; 5) $z_1=3, z_2=-9$.

Тест «Дифференцирование функций нескольких переменных»

Вариант 13

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Изобразить область определения функции $z(x,y)=\sqrt{x-y}$.	
2.	Найдите частные производные функции $z=x^2\ln(xy)$.	1) $z'_x=2x\ln(xy)+x;\ z'_y=x/y$; 2) $z'_x=2x\ln(xy);\ z'_y=x^2/y$; 3) $z'_x=2x\ln(xy)+x;\ z'_y=x^2/y$; 4) $z'_x=x\ln(xy)+x;\ z'_y=x/y$; 5) $z'_x=2x\ln(xy)+x;\ z'_y=x^2/y$.
3.	Найдите $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, если $z=ye^{xy}$.	1) $y^2(3+xy)e^{xy}$; 2) $(1+xy)e^{xy}$; 3) $x(2+xy)e^{xy}$; 4) $y(2+xy)e^{xy}$; 5) y^3e^{xy}.
4.	Найдите производную сложной функции $z=xy^2$, если $x=\ln t;\ y=\sqrt{t}$.	1) $(1+2\mathrm{tg}t)e^{2t}\cos t$; 2) $(1-\mathrm{tg}t)e^{2t}\cos t$; 3) $1+\ln t$; 4) $1+\ln\sqrt{t}$; 5) $(4+t\mathrm{tg}t)t^3\cos t$.
5.	Для функции $u=y\ln x^2$ найдите полный дифференциал $\mathrm{d}u$.	1) $\dfrac{2y}{x}\mathrm{d}x+\ln x^2\mathrm{d}y$; 2) $\dfrac{2y}{x}\mathrm{d}x+y\ln x^2\mathrm{d}y$; 3) $\dfrac{2y}{x^2}\mathrm{d}x+\ln x^2\mathrm{d}y$; 4) $\dfrac{y}{x}\mathrm{d}x+\ln x^2\mathrm{d}y$; 5) $\dfrac{2y}{x}\mathrm{d}x+\ln x\mathrm{d}y$.
6.	В точке $A(1,\,1,\,0)$ уравнение касательной плоскости к поверхности $x^2+y^2=2-z^2$ имеет вид…	1) $y+z=0$; 2) $2x+2y+z-6=0$; 3) $4x+y-5=0$; 4) $y-2z+1=0$; 5) $x+y-2=0$.
7.	Функция $z=e^{x/2}(x+y^2)$ имеет локальный...	1) Минимум в точке (-2, 0); 2) Минимум в точке (5, 5); 3) Минимум в точке (2, 0); 4) Максимум в точке (-1, -1); 5) Не имеет экстремума.
8.	Найдите производную функции $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ в точке A по направлению вектора $\overrightarrow{AB}$, $A(1,1,0)$, $B(0,1,1)$.	1) $1/\sqrt{10}$; 2) $\sqrt{2}$; 3) $5\sqrt{2}/8$; 4) -0,5; 5) $2\sqrt{5}/5$.
9.	В точке $A(1,\,e)$ градиент скалярного поля $u=x^2\ln y$ равен…	1) $\vec{k}$; 2) $1/e(-2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k})$; 3) $\vec{j}$; 4) $2\vec{i}+1/e\,\vec{j}$; 5) $1/6\vec{i}+\vec{j}+5/3\vec{k}$.
10.	Функция $z=4x+4y+x^2+y^2$ в области $-4\le x\le 0; -4\le y\le 0$ имеет наибольшее z_1 и наименьшее z_2 значения…	1) $z_1=0, z_2=-6$; 2) $z_1=3, z_2=-8$; 3) $z_1=0, z_2=-8$; 4) $z_1=0, z_2=-7{,}5$; 5) $z_1=3, z_2=-9$.

Тест «Дифференцирование функций нескольких переменных»

Вариант 14

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Изобразить область определения функции $z(x,y)=\sqrt{2x-y}$.	
2.	Найдите частные производные функции $z=e^{-y/x}$.	1) $z'_x = ye^{-y/x}\big/x^2$; $z'_y=-e^{-y/x}\big/x$; 2) $z'_x = ye^{-y/x}\big/x^2$; $z'_y=-e^{-y/x}$; 3) $z'_x = ye^{-y/x}\big/x^2$; $z'_y=e^{-y/x}\big/x$; 4) $z'_x = -ye^{-y/x}\big/x^2$; $z'_y=-e^{-y/x}\big/x$; 5) $z'_x = -ye^{-y/x}\big/x^2$; $z'_y=e^{-y/x}\big/x$.
3.	Найдите $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$, если $z=ye^{xy}$.	1) $y^2(3+xy)e^{xy}$; 2) $(1+xy)e^{xy}$; 3) $x(2+xy)e^{xy}$; 4) $y(2+xy)e^{xy}$; 5) y^3e^{xy}.
4.	Найдите частные производные сложной функции $z=xy^2$, если $x=uv$; $y=u/v$.	1) $z'_u=3u^2\big/v$; $z'_v=-u^3\big/v^2$; 2) $z'_u=u^2\big/v$; $z'_v=-u^3\big/v^2$; 3) $z'_u=3u^2\big/v$; $z'_v=u^3\big/v^2$; 4) $z'_u=3u^2\big/v$; $z'_v=-u^3\big/v$; 5) $z'_u=u^2\big/v$; $z'_v=-u^2\big/v^2$.
5.	Для функции $u=yz\sin x$ найдите полный дифференциал $\mathrm{d}u$.	1) $yz\cos x\mathrm{d}x+\sin x\mathrm{d}y+y\sin x\mathrm{d}z$; 2) $yz\cos x\mathrm{d}x+z\sin x\mathrm{d}y+y\sin x\mathrm{d}z$; 3) $yz\cos x\mathrm{d}x+z\cos x\mathrm{d}y+y\sin x\mathrm{d}z$; 4) $-yz\cos x\mathrm{d}x+z\sin x\mathrm{d}y+y\sin x\mathrm{d}z$; 5) $yz\sin x\mathrm{d}x+z\sin x\mathrm{d}y+y\sin x\mathrm{d}z$;.
6.	В точке $A(2, -3, 0)$ уравнение касательной плоскости к поверхности $x^2+z^2=1-y$ имеет вид…	1) $y+z=0$; 2) $2x+2y+z-6=0$; 3) $4x+y-5=0$; 4) $y-2z+1=0$; 5) $x+y-2=0$.
7.	Функция $z=x^3+y^3-15xy$ имеет локальный...	1) Минимум в точке (-2, 0); 2) Минимум в точке (5, 5); 3) Минимум в точке (2, 0); 4) Минимум в точке (-1, -1); 5) Не имеет экстремума.
8.	Найдите производную функции $u=xyz$ в точке A по направлению вектора $\overrightarrow{AB}$, $A(1,1,1)$, $B(1,2,2)$.	1) $\sqrt{2}$; 2) $1\big/\sqrt{10}$;; 3) $5\sqrt{2}\big/8$; 4) -0,5; 5) $2\sqrt{5}\big/5$.
9.	В точке $A(1, 2,-1)$ градиент скалярного поля $u=ye^z\big/x$ равен…	1) $\vec{k}$; 2) $1/6\vec{i}+\vec{j}+5/3\vec{k}$; 3) $\vec{j}$; 4) $2\vec{i}+1/e\vec{j}$; 5) $1/e(-2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k})$.
10.	Функция $z=4x+4y+x^2+y^2$ в области $x\le 0; y\le 0; x+y\ge -4$ имеет наибольшее z_1 и наименьшее z_2 значения…	1) $z_1=0, z_2=-6$; 2) $z_1=3, z_2=-8$; 3) $z_1=0, z_2=-8$; 4) $z_1=0, z_2=-7,5$; 5) $z_1=3, z_2=-9$.

Тест «Дифференцирование функций нескольких переменных»
Вариант 15

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Изобразить область определения функции $z(x,y)=\ln(2x-y)$.	
2.	Найдите частные производные функции $z=\arcsin\sqrt{1-xy}$.	1) $z'_x=0,5\sqrt{y/(x(1-xy))}$; $z'_y=0,5\sqrt{x/(y(1-xy))}$; 2) $z'_x=-\sqrt{y/(x(1-xy))}$; $z'_y=-\sqrt{x/(y(1-xy))}$; 3) $z'_x=-0,5\sqrt{y/(x(1-xy))}$; $z'_y=-0,5\sqrt{x/(y(1-xy))}$; 4) $z'_x=\sqrt{y/(x(1-xy))}$; $z'_y=\sqrt{x/(y(1-xy))}$; 5) $z'_x=-0,5\sqrt{y/(x(1-xy))}$; $z'_y=-0,5\sqrt{x/(y(1-xy))}$.
3.	Найдите $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$, если $z=ye^{2xy}$.	1) $y^2(3+xy)e^{2xy}$; 2) $2y(1+2xy)e^{xy}$; 3) $2x(1+2xy)e^{2xy}$; 4) $4y(1+xy)e^{2xy}$; 5) y^3e^{2xy}.
4.	Найдите частные производные сложной функции $z=xy^2$, если $x=u\sin v$; $y=v\ln u$.	1) $z'_u=v^2\ln u\sin v(\ln u+2)$; $z'_v=u\ln^2 vu(v\cos v+2)$; 2) $z'_u=v^2\ln u\sin v(\ln u+2)$; $z'_v=u\ln^2 vu(v+2\sin v)$; 3) $z'_u=v^2\ln u\sin v(\ln u+2)$; $z'_v=uv\ln u(v\cos v+2\sin v)$; 4) $z'_u=v\ln u\sin v(\ln u+2)$; $z'_v=uv\ln^2 u(v\cos v+2\sin v)$; 5) $z'_u=v^2\ln u\sin v(\ln u+2)$; $z'_v=u\ln^2 vu(v\cos v+2\sin v)$.
5.	Для функции $u=x\ln(xy)$ найдите полный дифференциал $\mathrm{d}u$.	1) $(1+\ln(xy))\mathrm{d}x+x/y\,\mathrm{d}y$; 2) $\ln(xy)\mathrm{d}x+x/y\,\mathrm{d}y$; 3) $(1+\ln(xy))\mathrm{d}x+1/y\,\mathrm{d}y$; 4) $x\mathrm{d}x+x/y\,\mathrm{d}y$; 5) $\ln(xy)\mathrm{d}x+1/y\,\mathrm{d}y$;.
6.	В точке $A(1, 1, -1)$ уравнение касательной плоскости к поверхности $z^2=(x-1)^2+y^2$ имеет вид…	1) $y+z=0$; 2) $2x+2y+z-6=0$; 3) $4x+y-5=0$; 4) $y-2z+1=0$; 5) $x+y-2=0$.
7.	Функция $z=x^2+y^2$ имеет локальный...	1) Минимум в точке (-2, 0); 2) Минимум в точке (5, 5); 3) Минимум в точке (0, 0); 4) Минимум в точке (-1, -1); 5) Не имеет экстремума.
8.	Найдите производную функции $u=\mathrm{arctg}(xy)$ в точке A по направлению вектора $\overrightarrow{AB}$, $A(1,2)$, $B(2,5)$.	1) $1/\sqrt{10}$; 2) $\sqrt{2}$; 3) $5\sqrt{2}/8$; 4) -0,5; 5) $2\sqrt{5}/5$.
9.	В точке $A(1, 1, 1)$ градиент скалярного поля $u=\sqrt{1/2+x^2/2+3y^2+5z^2}$ равен…	1) $\vec{k}$; 2) $1/e(-2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k})$; 3) $\vec{j}$; 4) $2\vec{i}+1/e\,\vec{j}$; 5) $1/6\vec{i}+\vec{j}+5/3\vec{k}$.
10.	Функция $z=4x+4y+x^2+y^2$ в области $x\ge 0; y\ge 0; x+y\le 3$ имеет наибольшее z_1 и наименьшее z_2 значения…	1) $z_1=0, z_2=-6$; 2) $z_1=3, z_2=-8$; 3) $z_1=0, z_2=-8$; 4) $z_1=21, z_2=0$; 5) $z_1=3, z_2=-9$.

Тест «Дифференцирование функций нескольких переменных»

Вариант 16

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Изобразить область определения функции $z(x,y)=\ln(x-2y)$.	
2.	Найдите частные производные функции $z=\arccos\sqrt{1-xy}$.	1) $z'_x=0,5\sqrt{y/(x(1-xy))}$; $z'_y=0,5\sqrt{x/(y(1-xy))}$; 2) $z'_x=-\sqrt{y/(x(1-xy))}$; $z'_y=-\sqrt{x/(y(1-xy))}$; 3) $z'_x=-0,5\sqrt{y/(x(1-xy))}$; $z'_y=-0,5\sqrt{x/(y(1-xy))}$; 4) $z'_x=\sqrt{y/(x(1-xy))}$; $z'_y=\sqrt{x/(y(1-xy))}$; 5) $z'_x=-0,5\sqrt{y^2/(x(1-xy))}$; $z'_y=-0,5\sqrt{x/(y(1-xy))}$.
3.	Найдите $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, если $z=ye^{2xy}$.	1) $y^2(3+xy)e^{2xy}$; 2) $(1+xy)e^{2xy}$; 3) $4x(1+xy)e^{2xy}$; 4) $y(2+xy)e^{2xy}$; 5) y^3e^{2xy}.
4.	Найдите производную сложной функции $z=xy^3$, если $x=\sin t$; $y=e^t$	1) $(1+3\mathrm{tg}t)e^{3t}\cos t$; 2) $(1+\mathrm{tg}t)e^{3t}\cos t$; 3) $(1+\sin t)e^{3t}\cos t$; 4) $(1-3\mathrm{tg}t)e^{3t}\cos t$; 5) $(1+3\mathrm{tg}t)e^{3t}\sin t$;.
5.	Для функции $u=y\ln(xy)$ найдите полный дифференциал $\mathrm{d}u$.	1) $\ln(xy)\mathrm{d}x+1/y\,\mathrm{d}y$; 2) $\ln(xy)\mathrm{d}x+y/x\,\mathrm{d}y$; 3) $(1+\ln(xy))\mathrm{d}x+1/x\,\mathrm{d}y$; 4) $x\mathrm{d}x+x/y\,\mathrm{d}y$; 5) $y/x\,\mathrm{d}x+(1+\ln(xy))\mathrm{d}y$.
6.	В точке $A(1, 1, -1)$ уравнение касательной плоскости к поверхности $z^2=(x+1)^2+y^2$ имеет вид…	1) $y+z=0$; 2) $2x+y+z-2=0$; 3) $4x+y-5=0$; 4) $y-2z+1=0$; 5) $x+y-2=0$.
7.	Функция $z=-x^2-y^2+1$ имеет локальный...	1) Минимум в точке (-2, 0); 2) Минимум в точке (5, 5); 3) Минимум в точке (2, 0); 4) Максимум в точке (0, 0); 5) Не имеет экстремума.
8.	Найдите производную функции $u=\mathrm{arcctg}(xy)$ в точке A по направлению вектора $\overrightarrow{AB}$, $A(1,2)$, $B(2,5)$.	1) $-1/\sqrt{10}$; 2) $-\sqrt{2}$; 3) $5\sqrt{2}/8$; 4) -0,5; 5) $2\sqrt{5}/5$.
9.	В точке $A(1, 1, 1)$ градиент скалярного поля $u=\sqrt{x^2+3y^2+5z^2}$ равен…	1) $\vec{k}$; 2) $1/e(-2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k})$; 3) $\vec{j}$; 4) $2\vec{i}+1/e\,\vec{j}$; 5) $1/3\vec{i}+\vec{j}+5/3\vec{k}$.
10.	Функция $z=4x+4y-x^2-y^2$ в области $x\ge 0; y\ge 0; x+y\le 4$ имеет наибольшее z_1 и наименьшее z_2 значения…	1) $z_1=0, z_2=-6$; 2) $z_1=3, z_2=-8$; 3) $z_1=0, z_2=-8$; 4) $z_1=0, z_2=-7,5$; 5) $z_1=8, z_2=0$.

Тест «Дифференцирование функций нескольких переменных»

Вариант 17

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Изобразить область определения функции $z(x,y)=\ln(2x+y)$.	
2.	Найдите частные производные функции $z=x^2\ln(xy)+2x$.	1) $z'_x=2x\ln(xy)+x+2;\ z'_y=x/y$; 2) $z'_x=2x\ln(xy);\ z'_y=x^2/y$; 3) $z'_x=2x\ln(xy)+x+2;\ z'_y=x^2/y$; 4) $z'_x=x\ln(xy)+x;\ z'_y=x/y$; 5) $z'_x=2x\ln(xy)+x+2;\ z'_y=x^3/y$.
3.	Найдите $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, если $z=ye^{2xy}$.	1) $y^2(3+xy)e^{xy}$; 2) $4y(1+xy)e^{2xy}$; 3) $4x(1+xy)e^{2xy}$; 4) $y(2+xy)e^{2xy}$; 5) y^3e^{xy}.
4.	Найдите производную сложной функции $z=xy^3$, если $x=\cos t;\ y=e^t$	1) $(1+3\mathrm{tg}t)e^{3t}\cos t$; 2) $(1+\mathrm{tg}t)e^{3t}\cos t$; 3) $(1+\sin t)e^{3t}\cos t$; 4) $(3-\mathrm{tg}t)e^{3t}\cos t$; 5) $(1+3\mathrm{tg}t)e^{3t}\sin t$;.
5.	Для функции $u=yz\cos x$ найдите полный дифференциал $\mathrm{d}u$.	1) $yz\cos x\mathrm{d}x+\sin x\mathrm{d}y+y\sin x\mathrm{d}z$; 2) $yz\cos x\mathrm{d}x+z\sin x\mathrm{d}y+y\sin x\mathrm{d}z$; 3) $yz\cos x\mathrm{d}x+z\cos x\mathrm{d}y+y\sin x\mathrm{d}z$; 4) $-yz\sin x\mathrm{d}x+z\cos x\mathrm{d}y+y\cos x\mathrm{d}z$; 5) $yz\sin x\mathrm{d}x+z\sin x\mathrm{d}y+y\sin x\mathrm{d}z$;.
6.	В точке $A(0,\ 1,\ 1)$ уравнение касательной плоскости к поверхности $z^2=y+x$ имеет вид.	1) $x+y-2z+1=0$; 2) $2x+2y+z-6=0$; 3) $4x+y-5=0$; 4) $y-2z+1=0$; 5) $x+y-2=0$.
7.	Функция $z=x^3+y^3-8xy$ имеет локальный...	1) Не имеет экстремума; 2) Минимум в точке (5, 5); 3) Минимум в точке (2, 0); 4) Минимум в точке (-1, -1); 5) Минимум в точке (8/3, 8/3).
8.	Найдите производную функции $u=\sqrt{y+x^2+2}$ в точке A по направлению вектора $\overrightarrow{AB}$, $A(2,0)$, $B(3,1)$.	1) $1/\sqrt{10}$; 2) $\sqrt{2}$; 3) $5\sqrt{3}/12$; 4) -0,5; 5) $\sqrt{3}/4$.
9.	В точке $A(1,\ \pi/2)$ градиент скалярного поля $u=x\mathrm{ctg}y$ равен…	1) $-\vec{j}$; 2) $1/e(-2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k})$; 3) $\vec{k}$; 4) $2\vec{i}+1/e\,\vec{j}$; 5) $1/6\vec{i}+\vec{j}+5/3\vec{k}$.
10.	Функция $z=2x+2y+x^2+y^2$ в области $x\ge 0; y\ge 0; x+y\le 3$ имеет наибольшее z_1 и наименьшее z_2 значения…	1) $z_1=0, z_2=-6$; 2) $z_1=3, z_2=-8$; 3) $z_1=16, z_2=0$; 4) $z_1=15, z_2=0$; 5) $z_1=3, z_2=-9$.

Тест «Дифференцирование функций нескольких переменных»

Вариант 18

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Изобразить область определения функции $z(x,y)=\dfrac{2}{\sqrt{3x-y}}$.	
2.	Найдите частные производные функции $z=\operatorname{arctg}\sqrt{xy}$.	1) $z'_x=\sqrt{y}\Big/\left(2\sqrt{x}\,(1-xy)\right)$; $z'_y=\sqrt{x}\Big/\left(2\sqrt{y}\,(1+xy)\right)$; 2) $z'_x=\sqrt{y}\Big/\left(2\sqrt{x}\,(1+xy)\right)$; $z'_y=\sqrt{x}\Big/\left(2\sqrt{y}\,(1+x^2y)\right)$; 3) $z'_x=\sqrt{y}\Big/\left(2\sqrt{x}\,(1+xy)\right)$; $z'_y=\sqrt{x}\Big/\left(2\sqrt{y}\,(1+xy)\right)$; 4) $z'_x=\sqrt{y}\Big/\left(2x(1+xy)\right)$; $z'_y=\sqrt{x}\Big/\left(2y(1+xy)\right)$; 5) $z'_x=1\Big/\left(2\sqrt{x}\,(1+xy)\right)$; $z'_y=1\Big/\left(2\sqrt{y}\,(1+xy)\right)$.
3.	Найдите $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$, если $z=ye^{-2xy}$.	1) $y^2(3+xy)e^{-2xy}$; 2) $(1+xy)e^{-2xy}$; 3) $-4x(1+x)e^{-2xy}$; 4) $-4y(1-xy)e^{-2xy}$; 5) $4y^3e^{-2xy}$.
4.	Найдите производную сложной функции $z=xy^3$, если $x=\ln t;\ y=2t$.	1) $(1+2\operatorname{tg}t)e^{2t}\cos t$; 2) $(1-\operatorname{tg}t)e^{2t}\cos t$; 3) $8t^2(1+3\ln t)$; 4) $1+\ln\sqrt{t}$; 5) $(4+t\operatorname{tg}t)t^3\cos t$.
5.	Для функции $u=2x\ln(xy)$ найдите полный дифференциал $\mathrm{d}u$.	1) $(2+2\ln(xy))\mathrm{d}x+2x/y\,\mathrm{d}y$; 2) $2\ln(xy)\mathrm{d}x+2x/y\,\mathrm{d}y$; 3) $(1+\ln(xy))\mathrm{d}x+1/y\,\mathrm{d}y$; 4) $2x\mathrm{d}x+2x/y\,\mathrm{d}y$; 5) $\ln(xy)\mathrm{d}x+1/y\,\mathrm{d}y$;.
6.	В точке A(1, 1, -1) уравнение касательной плоскости к поверхности $z^2=x^2+(y-3)^2$ имеет вид…	1) $y+z=0$; 2) $2x+2y+z-6=0$; 3) $4x+y-5=0$; 4) $y-2z+1=0$; 5) $x-2y+z+2=0$.
7.	Функция $z=x^3+y^3-8xy+6$ имеет локальный...	1) Минимум в точке (8/3, 8/3); 2) Минимум в точке (5, 5); 3) Минимум в точке (2, 0); 4) Минимум в точке (-1, -1); 5) Не имеет экстремума.
8.	Найдите производную функции $u=2\operatorname{arctg}(xy)$ в точке A по направлению вектора $\overrightarrow{AB}$, $A(1,2)$, $B(2,5)$.	1) $1/\sqrt{10}$; 2) $\sqrt{2}$; 3) $5\sqrt{2}/8$; 4) -0,5; 5) $2\sqrt{5}/5$.
9.	В точке A(1, 2,-1) градиент скалярного поля $u=ye^{2z}/x$ равен…	1) $\vec{k}$; 2) $e^2(-2\vec{i}+\vec{j}+4\vec{k})$; 3) $\vec{j}$; 4) $2\vec{i}+1/e\,\vec{j}$; 5) $1/6\,\vec{i}+\vec{j}+5/3\,\vec{k}$.
10.	Функция $z=2x+2y+x^2+y^2$ в области $x\le 0; y\le 0; x+y\ge -3$ имеет наибольшее z_1 и наименьшее z_2 значения…	1) $z_1=0, z_2=-6$; 2) $z_1=3, z_2=-8$; 3) $z_1=16, z_2=0$; 4) $z_1=15, z_2=-1,5$; 5) $z_1=3, z_2=-9$.

Тест «Дифференцирование функций нескольких переменных»

Вариант 19

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Изобразить область определения функции $z(x,y)=\log_3(2x-y)$.	
2.	Найдите частные производные функции: $z=\arcsin\left(x^2y\right)$.	1) $z'_x=1\Big/\sqrt{1-x^4y^2}$; $z'_y=x\Big/\sqrt{1-x^4y^2}$; 2) $z'_x=y\Big/\sqrt{1-x^4y^2}$; $z'_y=x\Big/\sqrt{1-x^4y^2}$; 3) $z'_x=y\Big/\sqrt{1-x^4y^2}$; $z'_y=x^2\Big/\sqrt{1-x^4y^2}$; 4) $z'_x=1\Big/\sqrt{1-x^4y^2}$; $z'_y=1\Big/\sqrt{1-x^4y^2}$; 5) $z'_x=y\Big/\sqrt{1-y^2}$; $z'_y=x^2\Big/\sqrt{1-y^2}$.
3.	Найдите $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, если $z=(y+2)e^{-2xy}$.	1) $-4x(1-xy-2x)e^{-2xy}$; 2) $-4x(1-2x)e^{-2xy}$; 3) $(1-xy-2x)e^{-2xy}$;; 4) $-4x(1-xy)e^{-2xy}$; 5) $-4xe^{-2xy}$;.
4.	Найдите частные производные сложной функции: $z=\ln(xy)$, если $x=\sin u;\ y=e^{uv}$.	1) $z'_u=\cos u+v;\ z'_v=u;$ 2) $z'_u=\mathrm{ctg}u+v;\ z'_v=u;$ 3) $z'_u=\mathrm{ctg}v+v;\ z'_v=u;$ 4) $z'_u=\mathrm{ctg}u+v;\ z'_v=v;$ 5) $z'_u=\sin u+v;\ z'_v=u;$.
5.	Для функции $u=xe^{2xy}+2$ найдите полный дифференциал $\mathrm{d}u$.	1) $e^{2xy}((1+xy)\mathrm{d}x+2x^2\mathrm{d}y)$; 2) $e^{2xy}((1+2xy)\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y)$; 3) $e^{2xy}(xy\mathrm{d}x+2x^2\mathrm{d}y)$; 4) $e^{2xy}((1+2y)\mathrm{d}x+2x^2\mathrm{d}y)$; 5) $e^{2xy}((1+2xy)\mathrm{d}x+2x^2\mathrm{d}y)$;.
6.	В точке $A(1,\ 1,\ -1)$ уравнение касательной плоскости к поверхности $(z+3)^2=(x-1)^2+y^2$ имеет вид…	1) $y+z=0$; 2) $2x+2y+z-6=0$; 3) $4x+y-5=0$; 4) $y-2z-3=0$; 5) $x+y-2=0$.
7.	Функция $z=e^{x/2}(x-y^2)$ имеет локальный...	1) Минимум в точке (-2, 0); 2) Минимум в точке (5, 5); 3) Минимум в точке (2, 0); 4) Максимум в точке (-1, -1); 5) Не имеет экстремума.
8.	Найдите производную функции $u=3xyz$ в точке A по направлению вектора $\overrightarrow{AB}$, $A(1,1,1)$, $B(1,2,2)$.	1) $1/\sqrt{10}$; 2) $3\sqrt{2}$; 3) $5\sqrt{2}/8$; 4) -0,5; 5) $2\sqrt{5}/5$.
9.	В точке $A(1,\ 1,\ 1)$ градиент скалярного поля $u=\sqrt{1/2+x^2/2+3y^2-z^2}$ равен…	1) $\vec{k}$; 2) $1/e(-2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k})$; 3) $\vec{j}$; 4) $2\vec{i}+1/e\,\vec{j}$; 5) $\sqrt{3}/6\,\vec{i}+\sqrt{3}\,\vec{j}-\sqrt{3}/3\,\vec{k}$.
10.	Функция $z=2x+2y+x^2+y^2$ в области $x\ge 0; y\ge 0; x+y\le 2$ имеет наибольшее z_1 и наименьшее z_2 значения…	1) $z_1=0, z_2=-6$; 2) $z_1=3, z_2=-8$; 3) $z_1=8, z_2=0$; 4) $z_1=15, z_2=-1{,}5$; 5) $z_1=6, z_2=0$.

Тест «Дифференцирование функций нескольких переменных»
Вариант 20

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Изобразить область определения функции $z(x,y)=\log_3(2x-y)$.	
2.	Найдите частные производные функции $z=\cos^2(x^3+y^3)$.	1) $z'_x=-3x^2\sin(2x^3+2y^3);\ z'_y=-3y^2\sin(2x^3+2y^3)$; 2) $z'_x=3x^2\sin(2x^3+2y^3);\ z'_y=3y^2\sin(2x^3+2y^3)$; 3) $z'_x=-3x^2\sin^2(x^3+y^3);\ z'_y=-3y^2\sin^2(x^3+y^3)$; 4) $z'_x=3x^2\sin(x^3+y^3);\ z'_y=3y^2\sin(x^3+y^3)$; 5) $z'_x=-3x^2\sin^2(x^3+y^3);\ z'_y=-3y^2\sin^2(x^3+y^3)$.
3.	Найдите $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, если $z=e^{-x^2y}$.	1) $2(2x^2y-1)e^{-x^2y}$; 2) $-2(2x^2y-1)e^{-x^2y}$; 3) $(x^2y^2-1)e^{-y}$; 4) $2y(2x^2y-1)e^{-x^2y}$; 5) $2x^2ye^{-x^2y}$.
4.	Найдите производную сложной функции $z=x^2y$, если $x=e^{2t};\ y=2\ln t$.	1) $e^{4t}(4\ln t+1/t)$; 2) $2e^{4t}(2\ln t+1/t)$; 3) $2e^{4t}(4\ln t+1/t)$; 4) $2e^{2t}(4\ln t+1/t)$; 5) $2e^{4t}\ln t$.
5.	Для функции $u=x^2\cos(xy)$ найдите полный дифференциал $\mathrm{d}u$.	1) $(2x\cos(xy)-y\sin(xy))\mathrm{d}x-x^3\sin(xy)\mathrm{d}y$; 2) $(2x\cos(xy))\mathrm{d}x$; 3) $-x^3\sin(xy)\mathrm{d}y$; 4) $(2x\cos(xy)-y\sin(xy))\mathrm{d}x+x^3\sin(xy)\mathrm{d}y$; 5) $(2x\cos(xy)-y\sin(xy))\mathrm{d}x-\sin(xy)\mathrm{d}y$;.
6.	В точке A(1, 1, -1) уравнение касательной плоскости к поверхности $z^2=(x-1)^2+(y+1)^2$ имеет вид…	1) $y+z=0$; 2) $2x+2y+z-6=0$; 3) $4x+y-5=0$; 4) $y-2z+1=0$; 5) $2y+z-1=0$.
7.	Функция $z=\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{y}-2xy$ имеет локальный...	1) Минимум в точке (-2, 0); 2) Минимум в точке (5, 5); 3) Минимум в точке (2, 0); 4) Максимум в точке (-1, -1); 5) Не имеет экстремума.
8.	Найдите производную функции $u=\sqrt{y^2+x^2}$ в точке A по направлению вектора $\overrightarrow{AB},\ A(2,0),\ B(3,1)$.	1) $1/\sqrt{10}$; 2) $\sqrt{2}/2$; 3) $5\sqrt{2}/8$; 4) -0,5; 5) $2\sqrt{5}/5$.
9.	В точке A(-1, 1, 1) градиент скалярного поля $u=\sqrt{1/2+x^2/2+3y^2+5z^2}$ равен…	1) $\vec{k}$; 2) $1/e(-2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k})$; 3) $\vec{j}$; 4) $2\vec{i}+1/e\,\vec{j}$; 5) $-1/6\vec{i}+\vec{j}+5/3\vec{k}$.
10.	Функция $z=x+y-x^2-y^2$ в области $x\ge 0; y\ge 0; x+y\le 3$ имеет наибольшее z_1 и наименьшее z_2 значения…	1) $z_1=0, z_2=-6$; 2) $z_1=3, z_2=-8$; 3) $z_1=0, z_2=-8$; 4) $z_1=0,5,\ z_2=-6$; 5) $z_1=3, z_2=-9$.

Тест «Дифференцирование функций нескольких переменных»

Вариант 21

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Изобразить область определения функции $z(x,y)=1\big/\sqrt{y+1}$.	
2.	Найдите частные производные функции $z=xy^2-2x+3y$.	1) $z'_x=y^2-2; z'_y=2xy+3$; 2) $z'_x=y^2-2; z'_y=2xy-3.$; 3) $z'_x=2xy-2; z'_y=2xy+3$; 4) $z'_x=y^2-2; z'_y=2xy-2x$; 5) $z'_x=y^2+3y; z'_y=2xy+3$.
3.	Найдите $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, если $z=ye^{xy}$.	1) $y^2(3+xy)e^{xy}$; 2) $(1+xy)e^{xy}$; 3) $x(2+xy)e^{xy}$; 4) $y(2+xy)e^{xy}$; 5) y^3e^{xy}.
4.	Найдите производную сложной функции $z=xy^2$, если $x=\sin t;\ y=e^t$.	1) $\mathrm{d}z/\mathrm{dt}=(1+2\mathrm{tg}t)e^{2t}\cos t;$ 2) $\mathrm{d}z/\mathrm{dt}=(1-\mathrm{tg}t)e^{2t}\cos t;$ 3) $\mathrm{d}z/\mathrm{dt}=(1+2\mathrm{ctg}t)e^{2t}\cos t;$ 4) $\mathrm{d}z/\mathrm{dt}=(1+\mathrm{tg}t)e^{t}\cos t;$ 5) $\mathrm{d}z/\mathrm{dt}=(4-t\mathrm{tg}t)t^3\cos t$.
5.	Для функции $u=x^2yz$ найдите полный дифференциал $\mathrm{d}u$.	1) $2xyz\mathrm{d}x-x^2z\mathrm{d}y+x^2y\mathrm{d}z;$ 2) $2xyz\mathrm{d}x+x^2z\mathrm{d}y+x^2y\mathrm{d}z;$ 3) $xyz\mathrm{d}x+x^2z\mathrm{d}y+x^2y\mathrm{d}z;$ 4) $2xyz\mathrm{d}x+x^2yz\mathrm{d}y+x^2y\mathrm{d}z;$ 5) $2xyz\mathrm{d}x+x^2z\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}z$.
6.	В точке $A(1,\ 1,\ 2)$ уравнение касательной плоскости к поверхности $x^2+y^2=4-z$ имеет вид.	1) $y+z=0$; 2) $2x+2y+z-6=0$; 3) $4x+y-5=0$; 4) $y-2z+1=0$; 5) $x+y-2=0$.
7.	Функция $z=3x+6y+x^2-xy+y^2$ имеет локальный...	1) Минимум в точке (-4, -5); 2) Минимум в точке (5, 5); 3) Минимум в точке (2, 0); 4) Минимум в точке (-1, -1); 5) Не имеет экстремума.
8.	Найдите производную функции $u=\sqrt{y+x^2}$ в точке A по направлению вектора $\overrightarrow{AB},\ A(2,0),\ B(3,1)$.	1) $1\big/\sqrt{10}$; 2) $\sqrt{2}$; 3) $5\sqrt{2}/8$; 4) -0,5; 5) $2\sqrt{5}/5$.
9.	В точке $A(1,\ 0)$ градиент скалярного поля $u=x\mathrm{tg}y$ равен…	1) $\vec{k}$; 2) $1/e(-2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k})$; 3) $\vec{j}$; 4) $2\vec{i}+1/e\,\vec{j}$; 5) $1/6\vec{i}+\vec{j}+5/3\vec{k}$.
10.	Функция $z=4x+4y+x^2+y^2$ в области $x\le 0; y\le 0; x+y\ge -3$ имеет наибольшее z_1 и наименьшее z_2 значения…	1) $z_1=0, z_2=-6$; 2) $z_1=3, z_2=-8$; 3) $z_1=0, z_2=-7{,}5$; 4) $z_1=0, z_2=-8$; 5) $z_1=3, z_2=-9.$

Тест «Дифференцирование функций нескольких переменных»

Вариант 22

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Изобразить область определения функции $z(x,y)=\ln(x+y)$.	
2.	Найдите частные производные функции $z=\mathrm{arctg}(xy)+2x$.	1) $z'_x = y\big/\left(1+(xy)^2\right)+2$; $z'_y = y\big/\left(1+(xy)^2\right)$; 2) $z'_x = 1\big/\left(1+(xy)^2\right)+2$; $z'_y = 1\big/\left(1+(xy)^2\right)$; 3) $z'_x = y\big/\left(1+(xy)^2\right)+2$; $z'_y = x\big/\left(1+(xy)^2\right)$; 4) $z'_x = y\big/\left(1+x^2\right)+2$; $z'_y = y\big/\left(1+y^2\right)$; 5) $z'_x = y\big/\left(1+x^2\right)+2$; $z'_y = x\big/\left(1+y^2\right)$.
3.	Найдите $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, если $z = ye^{xy}$.	1) $y^2(3+xy)e^{xy}$; 2) $(1+xy)e^{xy}$; 3) $x(2+xy)e^{xy}$; 4) $y(2+xy)e^{xy}$; 5) y^3e^{xy}.
4.	Найдите производную сложной функции $z=xy^2$, если $x=\cos t$; $y=t^2$.	1) $(1+2\mathrm{tg}t)e^{2t}\cos t$; 2) $(1-\mathrm{tg}t)e^{2t}\cos t$; 3) $(1+2\mathrm{ctg}t)e^{2t}\cos t$; 4) $(4-t\mathrm{tg}t)t^3\cos t$; 5) $(4+t\mathrm{tg}t)t^3\cos t$.
5.	Для функции $u=xe^{yz}$ найдите полный дифференциал $\mathrm{d}u$.	1) $e^{yz}\mathrm{d}x + xze^{yz}\mathrm{d}y + xye^{yz}\mathrm{d}z$; 2) $e^{yz}\mathrm{d}x + xye^{yz}\mathrm{d}y + xye^{yz}\mathrm{d}z$; 3) $xe^{yz}\mathrm{d}x + xze^{yz}\mathrm{d}y + xye^{yz}\mathrm{d}z$; 4) $e^{yz}\mathrm{d}x + xze^{yz}\mathrm{d}y + xyze^{yz}\mathrm{d}z$; 5) $e^{yz}\mathrm{d}x + xze^{yz}\mathrm{d}y + e^{yz}\mathrm{d}z$.
6.	В точке $A(0,\ 1,\ 1)$ уравнение касательной плоскости к поверхности $z^2=y$ имеет вид.	1) $y+z=0$; 2) $2x+2y+z-6=0$; 3) $4x+y-5=0$; 4) $y-2z+1=0$; 5) $x+y-2=0$.
7.	Функция $z=1/x+1/y-xy$ имеет локальный...	1) Минимум в точке (-2, 0); 2) Максимум в точке (-1, -1); 3) Минимум в точке (2, 0); 4) Минимум в точке (5, 5); 5) Не имеет экстремума.
8.	Найдите производную функции $u=x\ln y^2$ в точке A по направлению вектора $\overrightarrow{AB}$, $A(1,1)$, $B(3,2)$.	1) $1/\sqrt{10}$; 2) $\sqrt{2}$; 3) $5\sqrt{2}/8$; 4) -0,5; 5) $2\sqrt{5}/5$.
9.	В точке $A(1,\ 1,\ 0)$ градиент скалярного поля $u=xz/y$ равен…	1) $\vec{k}$; 2) $1/e(-2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k})$; 3) $\vec{j}$; 4) $2\vec{i}+1/e\,\vec{j}$; 5) $1/6\vec{i}+\vec{j}+5/3\vec{k}$.
10.	Функция $z=4x+4y+x^2+y^2$ в области $-3\le x\le 0; -3\le y\le 0$ имеет наибольшее z_1 и наименьшее z_2 значения…	1) $z_1=0, z_2=-6$; 2) $z_1=3, z_2=-8$; 3) $z_1=0, z_2=-8$; 4) $z_1=0, z_2=-7,5$; 5) $z_1=3, z_2=-9$.

Тест «Дифференцирование функций нескольких переменных»

Вариант 23

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Изобразить область определения функции $z(x,y)=\sqrt{x-y}$.	
2.	Найдите частные производные функции $z=x^2\ln(xy)$.	1) $z'_x=2x\ln(xy)+x;\ z'_y=x/y$; 2) $z'_x=2x\ln(xy);\ z'_y=x^2/y$; 3) $z'_x=2x\ln(xy)+x;\ z'_y=x^2/y$; 4) $z'_x=x\ln(xy)+x;\ z'_y=x/y$; 5) $z'_x=2x\ln(xy)+x;\ z'_y=x^2/y$.
3.	Найдите $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, если $z=ye^{xy}$.	1) $y^2(3+xy)e^{xy}$; 2) $(1+xy)e^{xy}$; 3) $x(2+xy)e^{xy}$; 4) $y(2+xy)e^{xy}$; 5) y^3e^{xy}.
4.	Найдите производную сложной функции $z=xy^2$, если $x=\ln t;\ y=\sqrt{t}$.	1) $(1+2\mathrm{tg}t)e^{2t}\cos t$; 2) $(1-\mathrm{tg}t)e^{2t}\cos t$; 3) $1+\ln t$; 4) $1+\ln\sqrt{t}$; 5) $(4+t\mathrm{tg}t)t^3\cos t$.
5.	Для функции $u=y\ln x^2$ найдите полный дифференциал du.	1) $\frac{2y}{x}\mathrm{d}x+\ln x^2\mathrm{d}y$; 2) $\frac{2y}{x}\mathrm{d}x+y\ln x^2\mathrm{d}y$; 3) $\frac{2y}{x^2}\mathrm{d}x+\ln x^2\mathrm{d}y$; 4) $\frac{y}{x}\mathrm{d}x+\ln x^2\mathrm{d}y$; 5) $\frac{2y}{x}\mathrm{d}x+\ln x\mathrm{d}y$.
6.	В точке $A(1, 1, 0)$ уравнение касательной плоскости к поверхности $x^2+y^2=2-z^2$ имеет вид…	1) $y+z=0$; 2) $2x+2y+z-6=0$; 3) $4x+y-5=0$; 4) $y-2z+1=0$; 5) $x+y-2=0$.
7.	Функция $z=e^{x/2}(x+y^2)$ имеет локальный...	1) Минимум в точке (-2, 0); 2) Минимум в точке (5, 5); 3) Минимум в точке (2, 0); 4) Максимум в точке (-1, -1); 5) Не имеет экстремума.
8.	Найдите производную функции $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ в точке A по направлению вектора $\overrightarrow{AB}$, $A(1,1,0)$, $B(0,1,1)$.	1) $1/\sqrt{10}$; 2) $\sqrt{2}$; 3) $5\sqrt{2}/8$; 4) -0,5; 5) $2\sqrt{5}/5$.
9.	В точке $A(1, e)$ градиент скалярного поля $u=x^2\ln y$ равен…	1) $\vec{k}$; 2) $1/e(-2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k})$; 3) $\vec{j}$; 4) $2\vec{i}+1/e\,\vec{j}$; 5) $1/6\,\vec{i}+\vec{j}+5/3\,\vec{k}$.
10.	Функция $z=4x+4y+x^2+y^2$ в области $-4\le x\le 0; -4\le y\le 0$ имеет наибольшее z_1 и наименьшее z_2 значения…	1) $z_1=0, z_2=-6$; 2) $z_1=3, z_2=-8$; 3) $z_1=0, z_2=-8$; 4) $z_1=0, z_2=-7{,}5$; 5) $z_1=3, z_2=-9$.

Тест «Дифференцирование функций нескольких переменных»

Вариант 24

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Изобразить область определения функции $z(x,y)=\sqrt{2x-y}$.	
2.	Найдите частные производные функции $z=e^{-y/x}$.	1) $z'_x = ye^{-y/x}/x^2$; $z'_y = -e^{-y/x}/x$; 2) $z'_x = ye^{-y/x}/x^2$; $z'_y = -e^{-y/x}$; 3) $z'_x = ye^{-y/x}/x^2$; $z'_y = e^{-y/x}/x$; 4) $z'_x = -ye^{-y/x}/x^2$; $z'_y = -e^{-y/x}/x$; 5) $z'_x = -ye^{-y/x}/x^2$; $z'_y = e^{-y/x}/x$.
3.	Найдите $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, если $z = ye^{xy}$.	1) $y^2(3+xy)e^{xy}$; 2) $(1+xy)e^{xy}$; 3) $x(2+xy)e^{xy}$; 4) $y(2+xy)e^{xy}$; 5) y^3e^{xy}.
4.	Найдите частные производные сложной функции $z=xy^2$, если $x=uv$; $y=u/v$.	1) $z'_u = 3u^2/v$; $z'_v = -u^3/v^2$; 2) $z'_u = u^2/v$; $z'_v = -u^3/v^2$; 3) $z'_u = 3u^2/v$; $z'_v = u^3/v^2$; 4) $z'_u = 3u^2/v$; $z'_v = -u^3/v$; 5) $z'_u = u^2/v$; $z'_v = -u^2/v^2$.
5.	Для функции $u = yz\sin x$ найдите полный дифференциал $\mathrm{d}u$.	1) $yz\cos x\mathrm{d}x + \sin x\mathrm{d}y + y\sin x\mathrm{d}z$; 2) $yz\cos x\mathrm{d}x + z\sin x\mathrm{d}y + y\sin x\mathrm{d}z$; 3) $yz\cos x\mathrm{d}x + z\cos x\mathrm{d}y + y\sin x\mathrm{d}z$; 4) $-yz\cos x\mathrm{d}x + z\sin x\mathrm{d}y + y\sin x\mathrm{d}z$; 5) $yz\sin x\mathrm{d}x + z\sin x\mathrm{d}y + y\sin x\mathrm{d}z$;.
6.	В точке A(2, -3, 0) уравнение касательной плоскости к поверхности $x^2+z^2=1-y$ имеет вид…	1) $y+z=0$; 2) $2x+2y+z-6=0$; 3) $4x+y-5=0$; 4) $y-2z+1=0$; 5) $x+y-2=0$.
7.	Функция $z=x^3+y^3-15xy$ имеет локальный...	1) Минимум в точке (-2, 0); 2) Минимум в точке (5, 5); 3) Минимум в точке (2, 0); 4) Минимум в точке (-1, -1); 5) Не имеет экстремума.
8.	Найдите производную функции $u = xyz$ в точке A по направлению вектора $\overrightarrow{AB}$, $A(1,1,1)$, $B(1,2,2)$.	1) $\sqrt{2}$; 2) $1/\sqrt{10}$;; 3) $5\sqrt{2}/8$; 4) -0,5; 5) $2\sqrt{5}/5$.
9.	В точке A(1, 2,-1) градиент скалярного поля $u = ye^z/x$ равен…	1) $\vec{k}$; 2) $1/6\vec{i}+\vec{j}+5/3\vec{k}$; 3) $\vec{j}$; 4) $2\vec{i}+1/e\vec{j}$; 5) $1/e(-2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k})$.
10.	Функция $z=4x+4y+x^2+y^2$ в области $x\le 0; y\le 0; x+y\ge -4$ имеет наибольшее z_1 и наименьшее z_2 значения…	1) $z_1=0, z_2=-6$; 2) $z_1=3, z_2=-8$; 3) $z_1=0, z_2=-8$; 4) $z_1=0, z_2=-7{,}5$; 5) $z_1=3, z_2=-9$.

Тест «Дифференцирование функций нескольких переменных»
Вариант 25

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Изобразить область определения функции $z(x,y)=\ln(2x-y)$.	
2.	Найдите частные производные функции $z=\arcsin\sqrt{1-xy}$.	1) $z'_x=0,5\sqrt{y/(x(1-xy))}$; $z'_y=0,5\sqrt{x/(y(1-xy))}$; 2) $z'_x=-\sqrt{y/(x(1-xy))}$; $z'_y=-\sqrt{x/(y(1-xy))}$; 3) $z'_x=-0,5\sqrt{y/(x(1-xy))}$; $z'_y=-0,5\sqrt{x/(y(1-xy))}$; 4) $z'_x=\sqrt{y/(x(1-xy))}$; $z'_y=\sqrt{x/(y(1-xy))}$; 5) $z'_x=-0,5\sqrt{y/(x(1-xy))}$; $z'_y=-0,5\sqrt{x/(y(1-xy))}$.
3.	Найдите $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$, если $z=ye^{2xy}$.	1) $y^2(3+xy)e^{2xy}$; 2) $2y(1+2xy)e^{xy}$; 3) $2x(1+2xy)e^{2xy}$; 4) $4y(1+xy)e^{2xy}$; 5) y^3e^{2xy}.
4.	Найдите частные производные сложной функции $z=xy^2$, если $x=u\sin v$; $y=v\ln u$.	1) $z'_u=v^2\ln u\sin v(\ln u+2)$; $z'_v=u\ \ln^2 v u(v\cos v+2)$; 2) $z'_u=v^2\ln u\sin v(\ln u+2)$; $z'_v=u\ \ln^2 v u(v+2\sin v)$; 3) $z'_u=v^2\ln u\sin v(\ln u+2)$; $z'_v=uv\ln u(v\cos v+2\sin v)$; 4) $z'_u=v\ln u\sin v(\ln u+2)$; $z'_v=uv\ln^2 u(v\cos v+2\sin v)$; 5) $z'_u=v^2\ln u\sin v(\ln u+2)$; $z'_v=u\ \ln^2 v u(v\cos v+2\sin v)$.
5.	Для функции $u=x\ln(xy)$ найдите полный дифференциал $\mathrm{d}u$.	1) $(1+\ln(xy))\mathrm{d}x+x/y\,\mathrm{d}y$; 2) $\ln(xy)\mathrm{d}x+x/y\,\mathrm{d}y$; 3) $(1+\ln(xy))\mathrm{d}x+1/y\,\mathrm{d}y$; 4) $x\mathrm{d}x+x/y\,\mathrm{d}y$; 5) $\ln(xy)\mathrm{d}x+1/y\,\mathrm{d}y$;.
6.	В точке $A(1, 1, -1)$ уравнение касательной плоскости к поверхности $z^2=(x-1)^2+y^2$ имеет вид…	1) $y+z=0$; 2) $2x+2y+z-6=0$; 3) $4x+y-5=0$; 4) $y-2z+1=0$; 5) $x+y-2=0$.
7.	Функция $z=x^2+y^2$ имеет локальный...	1) Минимум в точке (-2, 0); 2) Минимум в точке (5, 5); 3) Минимум в точке (0, 0); 4) Минимум в точке (-1, -1); 5) Не имеет экстремума.
8.	Найдите производную функции $u=\mathrm{arctg}(xy)$ в точке A по направлению вектора $\overrightarrow{AB}$, $A(1,2)$, $B(2,5)$.	1) $1/\sqrt{10}$; 2) $\sqrt{2}$; 3) $5\sqrt{2}/8$; 4) -0,5; 5) $2\sqrt{5}/5$.
9.	В точке $A(1, 1, 1)$ градиент скалярного поля $u=\sqrt{1/2+x^2/2+3y^2+5z^2}$ равен…	1) $\vec{k}$; 2) $1/e(-2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k})$; 3) $\vec{j}$; 4) $2\vec{i}+1/e\,\vec{j}$; 5) $1/6\,\vec{i}+\vec{j}+5/3\,\vec{k}$.
10.	Функция $z=4x+4y+x^2+y^2$ в области $x\ge 0; y\ge 0; x+y\le 3$ имеет наибольшее z_1 и наименьшее z_2 значения…	1) $z_1=0, z_2=-6$; 2) $z_1=3, z_2=-8$; 3) $z_1=0, z_2=-8$; 4) $z_1=21, z_2=0$; 5) $z_1=3, z_2=-9$.

Тест «Дифференцирование функций нескольких переменных»

Вариант 26

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Изобразить область определения функции $z(x,y)=\ln(x-2y)$.	
2.	Найдите частные производные функции $z=\arccos\sqrt{1-xy}$.	1) $z'_x=0,5\sqrt{y/(x(1-xy))}$; $z'_y=0,5\sqrt{x/(y(1-xy))}$; 2) $z'_x=-\sqrt{y/(x(1-xy))}$; $z'_y=-\sqrt{x/(y(1-xy))}$; 3) $z'_x=-0,5\sqrt{y/(x(1-xy))}$; $z'_y=-0,5\sqrt{x/(y(1-xy))}$; 4) $z'_x=\sqrt{y/(x(1-xy))}$; $z'_y=\sqrt{x/(y(1-xy))}$; 5) $z'_x=-0,5\sqrt{y^2/(x(1-xy))}$; $z'_y=-0,5\sqrt{x/(y(1-xy))}$.
3.	Найдите $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, если $z=ye^{2xy}$.	1) $y^2(3+xy)e^{2xy}$; 2) $(1+xy)e^{2xy}$; 3) $4x(1+xy)e^{2xy}$; 4) $y(2+xy)e^{2xy}$; 5) y^3e^{2xy}.
4.	Найдите производную сложной функции $z=xy^3$, если $x=\sin t;\ y=e^t$	1) $(1+3\mathrm{tg}t)e^{3t}\cos t$; 2) $(1+\mathrm{tg}t)e^{3t}\cos t$; 3) $(1+\sin t)e^{3t}\cos t$; 4) $(1-3\mathrm{tg}t)e^{3t}\cos t$; 5) $(1+3\mathrm{tg}t)e^{3t}\sin t$;.
5.	Для функции $u=y\ln(xy)$ найдите полный дифференциал $\mathrm{d}u$.	1) $\ln(xy)\mathrm{d}x+1/y\,\mathrm{d}y$; 2) $\ln(xy)\mathrm{d}x+y/x\,\mathrm{d}y$; 3) $(1+\ln(xy))\mathrm{d}x+1/x\,\mathrm{d}y$; 4) $x\mathrm{d}x+x/y\,\mathrm{d}y$; 5) $y/x\,\mathrm{d}x+(1+\ln(xy))\mathrm{d}y$.
6.	В точке $A(1, 1, -1)$ уравнение касательной плоскости к поверхности $z^2=(x+1)^2+y^2$ имеет вид…	1) $y+z=0$; 2) $2x+y+z-2=0$; 3) $4x+y-5=0$; 4) $y-2z+1=0$; 5) $x+y-2=0$.
7.	Функция $z=-x^2-y^2+1$ имеет локальный...	1) Минимум в точке (-2, 0); 2) Минимум в точке (5, 5); 3) Минимум в точке (2, 0); 4) Максимум в точке (0, 0); 5) Не имеет экстремума.
8.	Найдите производную функции $u=\mathrm{arcctg}(xy)$ в точке A по направлению вектора $\overrightarrow{AB}$, $A(1,2)$, $B(2,5)$.	1) $-1/\sqrt{10}$; 2) $-\sqrt{2}$; 3) $5\sqrt{2}/8$; 4) -0,5; 5) $2\sqrt{5}/5$.
9.	В точке $A(1, 1, 1)$ градиент скалярного поля $u=\sqrt{x^2+3y^2+5z^2}$ равен…	1) $\vec{k}$; 2) $1/e(-2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k})$; 3) $\vec{j}$; 4) $2\vec{i}+1/e\,\vec{j}$; 5) $1/3\vec{i}+\vec{j}+5/3\vec{k}$.
10.	Функция $z=4x+4y-x^2-y^2$ в области $x\ge 0; y\ge 0; x+y\le 4$ имеет наибольшее z_1 и наименьшее z_2 значения…	1) $z_1=0, z_2=-6$; 2) $z_1=3, z_2=-8$; 3) $z_1=0, z_2=-8$; 4) $z_1=0, z_2=-7,5$; 5) $z_1=8, z_2=0$.

Тест «Дифференцирование функций нескольких переменных»

Вариант 27

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Изобразить область определения функции $z(x,y)=\ln(2x+y)$.	
2.	Найдите частные производные функции $z=x^2\ln(xy)+2x$.	1) $z'_x=2x\ln(xy)+x+2;\ z'_y=x/y$; 2) $z'_x=2x\ln(xy);\ z'_y=x^2/y$; 3) $z'_x=2x\ln(xy)+x+2;\ z'_y=x^2/y$; 4) $z'_x=x\ln(xy)+x;\ z'_y=x/y$; 5) $z'_x=2x\ln(xy)+x+2;\ z'_y=x^3/y$.
3.	Найдите $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, если $z=ye^{2xy}$.	1) $y^2(3+xy)e^{xy}$; 2) $4y(1+xy)e^{2xy}$; 3) $4x(1+xy)e^{2xy}$; 4) $y(2+xy)e^{2xy}$; 5) y^3e^{xy}.
4.	Найдите производную сложной функции $z=xy^3$, если $x=\cos t;\ y=e^t$	1) $(1+3\mathrm{tg}t)e^{3t}\cos t$; 2) $(1+\mathrm{tg}t)e^{3t}\cos t$; 3) $(1+\sin t)e^{3t}\cos t$; 4) $(3-\mathrm{tg}t)e^{3t}\cos t$; 5) $(1+3\mathrm{tg}t)e^{3t}\sin t$;.
5.	Для функции $u=yz\cos x$ найдите полный дифференциал $\mathrm{d}u$.	1) $yz\cos x\mathrm{d}x+\sin x\mathrm{d}y+y\sin x\mathrm{d}z$; 2) $yz\cos x\mathrm{d}x+z\sin x\mathrm{d}y+y\sin x\mathrm{d}z$; 3) $yz\cos x\mathrm{d}x+z\cos x\mathrm{d}y+y\sin x\mathrm{d}z$; 4) $-yz\sin x\mathrm{d}x+z\cos x\mathrm{d}y+y\cos x\mathrm{d}z$; 5) $yz\sin x\mathrm{d}x+z\sin x\mathrm{d}y+y\sin x\mathrm{d}z$;.
6.	В точке $A(0,\ 1,\ 1)$ уравнение касательной плоскости к поверхности $z^2=y+x$ имеет вид.	1) $x+y-2z+1=0$; 2) $2x+2y+z-6=0$; 3) $4x+y-5=0$; 4) $y-2z+1=0$; 5) $x+y-2=0$.
7.	Функция $z=x^3+y^3-8xy$ имеет локальный...	1) Не имеет экстремума; 2) Минимум в точке (5, 5); 3) Минимум в точке (2, 0); 4) Минимум в точке (-1, -1); 5) Минимум в точке (8/3, 8/3).
8.	Найдите производную функции $u=\sqrt{y+x^2+2}$ в точке A по направлению вектора $\overrightarrow{AB}$, $A(2,0)$, $B(3,1)$.	1) $1/\sqrt{10}$; 2) $\sqrt{2}$; 3) $5\sqrt{3}/12$; 4) -0,5; 5) $\sqrt{3}/4$.
9.	В точке $A(1,\ \pi/2)$ градиент скалярного поля $u=x\mathrm{ctg}y$ равен…	1) $-\vec{j}$; 2) $1/e(-2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k})$; 3) $\vec{k}$; 4) $2\vec{i}+1/e\,\vec{j}$; 5) $1/6\vec{i}+\vec{j}+5/3\vec{k}$.
10.	Функция $z=2x+2y+x^2+y^2$ в области $x\ge 0; y\ge 0; x+y\le 3$ имеет наибольшее z_1 и наименьшее z_2 значения…	1) $z_1=0, z_2=-6$; 2) $z_1=3, z_2=-8$; 3) $z_1=16, z_2=0$; 4) $z_1=15, z_2=0$; 5) $z_1=3, z_2=-9$.

Тест «Дифференцирование функций нескольких переменных»

Вариант 28

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Изобразить область определения функции $z(x,y)=\dfrac{2}{\sqrt{3x-y}}$.	
2.	Найдите частные производные функции $z=\operatorname{arctg}\sqrt{xy}$.	1) $z'_x=\sqrt{y}\Big/\left(2\sqrt{x}\left(1-xy\right)\right)$; $z'_y=\sqrt{x}\Big/\left(2\sqrt{y}\left(1+xy\right)\right)$; 2) $z'_x=\sqrt{y}\Big/\left(2\sqrt{x}\left(1+xy\right)\right)$; $z'_y=\sqrt{x}\Big/\left(2\sqrt{y}\left(1+x^2y\right)\right)$; 3) $z'_x=\sqrt{y}\Big/\left(2\sqrt{x}\left(1+xy\right)\right)$; $z'_y=\sqrt{x}\Big/\left(2\sqrt{y}\left(1+xy\right)\right)$; 4) $z'_x=\sqrt{y}\Big/\left(2x\left(1+xy\right)\right)$; $z'_y=\sqrt{x}\Big/\left(2y\left(1+xy\right)\right)$; 5) $z'_x=1\Big/\left(2\sqrt{x}\left(1+xy\right)\right)$; $z'_y=1\Big/\left(2\sqrt{y}\left(1+xy\right)\right)$.
3.	Найдите $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$, если $z=ye^{-2xy}$.	1) $y^2(3+xy)e^{-2xy}$; 2) $(1+xy)e^{-2xy}$; 3) $-4x(1+x)e^{-2xy}$; 4) $-4y(1-xy)e^{-2xy}$; 5) $4y^3e^{-2xy}$.
4.	Найдите производную сложной функции $z=xy^3$, если $x=\ln t;\ y=2t$.	1) $(1+2\operatorname{tg}t)e^{2t}\cos t$; 2) $(1-\operatorname{tg}t)e^{2t}\cos t$; 3) $8t^2(1+3\ln t)$; 4) $1+\ln\sqrt{t}$; 5) $(4+t\operatorname{tg}t)t^3\cos t$.
5.	Для функции $u=2x\ln(xy)$ найдите полный дифференциал $\mathrm{d}u$.	1) $(2+2\ln(xy))\mathrm{d}x+2x/y\,\mathrm{d}y$; 2) $2\ln(xy)\mathrm{d}x+2x/y\,\mathrm{d}y$; 3) $(1+\ln(xy))\mathrm{d}x+1/y\,\mathrm{d}y$; 4) $2x\mathrm{d}x+2x/y\,\mathrm{d}y$; 5) $\ln(xy)\mathrm{d}x+1/y\,\mathrm{d}y$;.
6.	В точке $A(1,\ 1,\ -1)$ уравнение касательной плоскости к поверхности $z^2=x^2+(y-3)^2$ имеет вид…	1) $y+z=0$; 2) $2x+2y+z-6=0$; 3) $4x+y-5=0$; 4) $y-2z+1=0$; 5) $x-2y+z+2=0$.
7.	Функция $z=x^3+y^3-8xy+6$ имеет локальный...	1) Минимум в точке (8/3, 8/3); 2) Минимум в точке (5, 5); 3) Минимум в точке (2, 0); 4) Минимум в точке (-1, -1); 5) Не имеет экстремума.
8.	Найдите производную функции $u=2\operatorname{arctg}(xy)$ в точке A по направлению вектора $\overrightarrow{AB},\ A(1,2),\ B(2,5)$.	1) $1/\sqrt{10}$; 2) $\sqrt{2}$; 3) $5\sqrt{2}/8$; 4) -0,5; 5) $2\sqrt{5}/5$.
9.	В точке $A(1,\ 2,-1)$ градиент скалярного поля $u=ye^{2z}\big/x$ равен…	1) $\vec{k}$; 2) $e^2(-2\vec{i}+\vec{j}+4\vec{k})$; 3) $\vec{j}$; 4) $2\vec{i}+1/e\,\vec{j}$; 5) $1/6\,\vec{i}+\vec{j}+5/3\,\vec{k}$.
10.	Функция $z=2x+2y+x^2+y^2$ в области $x\le 0; y\le 0; x+y\ge -3$ имеет наибольшее z_1 и наименьшее z_2 значения…	1) $z_1=0, z_2=-6$; 2) $z_1=3, z_2=-8$; 3) $z_1=16, z_2=0$; 4) $z_1=15, z_2=-1{,}5$; 5) $z_1=3, z_2=-9$.

Тест «Дифференцирование функций нескольких переменных»

Вариант 29

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Изобразить область определения функции $z(x,y)=\log_3(2x-y)$.	
2.	Найдите частные производные функции: $z=\arcsin\left(x^2y\right)$.	1) $z'_x=1\big/\sqrt{1-x^4y^2}$; $z'_y=x\big/\sqrt{1-x^4y^2}$; 2) $z'_x=y\big/\sqrt{1-x^4y^2}$; $z'_y=x\big/\sqrt{1-x^4y^2}$; 3) $z'_x=y\big/\sqrt{1-x^4y^2}$; $z'_y=x^2\big/\sqrt{1-x^4y^2}$; 4) $z'_x=1\big/\sqrt{1-x^4y^2}$; $z'_y=1\big/\sqrt{1-x^4y^2}$; 5) $z'_x=y\big/\sqrt{1-y^2}$; $z'_y=x^2\big/\sqrt{1-y^2}$.
3.	Найдите $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, если $z=(y+2)e^{-2xy}$.	1) $-4x(1-xy-2x)e^{-2xy}$; 2) $-4x(1-2x)e^{-2xy}$; 3) $(1-xy-2x)e^{-2xy}$;; 4) $-4x(1-xy)e^{-2xy}$; 5) $-4xe^{-2xy}$;.
4.	Найдите частные производные сложной функции: $z=\ln(xy)$, если $x=\sin u;\ y=e^{uv}$.	1) $z'_u=\cos u+v;\ z'_v=u;$ 2) $z'_u=\mathrm{ctg}u+v;\ z'_v=u;$ 3) $z'_u=\mathrm{ctg}v+v;\ z'_v=u;$ 4) $z'_u=\mathrm{ctg}u+v;\ z'_v=v;$ 5) $z'_u=\sin u+v;\ z'_v=u;$.
5.	Для функции $u=xe^{2xy}+2$ найдите полный дифференциал $\mathrm{d}u$.	1) $e^{2xy}((1+xy)\mathrm{d}x+2x^2\mathrm{d}y)$; 2) $e^{2xy}((1+2xy)\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y)$; 3) $e^{2xy}(xy\mathrm{d}x+2x^2\mathrm{d}y)$; 4) $e^{2xy}((1+2y)\mathrm{d}x+2x^2\mathrm{d}y)$; 5) $e^{2xy}((1+2xy)\mathrm{d}x+2x^2\mathrm{d}y)$;.
6.	В точке $A(1, 1, -1)$ уравнение касательной плоскости к поверхности $(z+3)^2=(x-1)^2+y^2$ имеет вид…	1) $y+z=0$; 2) $2x+2y+z-6=0$; 3) $4x+y-5=0$; 4) $y-2z-3=0$; 5) $x+y-2=0$.
7.	Функция $z=e^{x/2}(x-y^2)$ имеет локальный...	1) Минимум в точке (-2, 0); 2) Минимум в точке (5, 5); 3) Минимум в точке (2, 0); 4) Максимум в точке (-1, -1); 5) Не имеет экстремума.
8.	Найдите производную функции $u=3xyz$ в точке A по направлению вектора $\overrightarrow{AB}$, $A(1,1,1)$, $B(1,2,2)$.	1) $1/\sqrt{10}$; 2) $3\sqrt{2}$; 3) $5\sqrt{2}/8$; 4) -0,5; 5) $2\sqrt{5}/5$.
9.	В точке $A(1, 1, 1)$ градиент скалярного поля $u=\sqrt{1/2+x^2/2+3y^2-z^2}$ равен…	1) $\vec{k}$; 2) $1/e(-2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k})$; 3) $\vec{j}$; 4) $2\vec{i}+1/e\,\vec{j}$; 5) $\sqrt{3}/6\,\vec{i}+\sqrt{3}\,\vec{j}-\sqrt{3}/3\,\vec{k}$.
10.	Функция $z=2x+2y+x^2+y^2$ в области $x\ge 0; y\ge 0; x+y\le 2$ имеет наибольшее z_1 и наименьшее z_2 значения…	1) $z_1=0, z_2=-6$; 2) $z_1=3, z_2=-8$; 3) $z_1=8, z_2=0$; 4) $z_1=15, z_2=-1,5$; 5) $z_1=6, z_2=0$.

Тест «Дифференцирование функций нескольких переменных»
Вариант 30

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Изобразить область определения функции $z(x,y)=\log_3(2x-y)$.	
2.	Найдите частные производные функции $z=\cos^2(x^3+y^3)$.	1) $z'_x=-3x^2\sin(2x^3+2y^3);\ z'_y=-3y^2\sin(2x^3+2y^3)$; 2) $z'_x=3x^2\sin(2x^3+2y^3);\ z'_y=3y^2\sin(2x^3+2y^3)$; 3) $z'_x=-3x^2\sin^2(x^3+y^3);\ z'_y=-3y^2\sin^2(x^3+y^3)$; 4) $z'_x=3x^2\sin(x^3+y^3);\ z'_y=3y^2\sin(x^3+y^3)$; 5) $z'_x=-3x^2\sin^2(x^3+y^3);\ z'_y=-3y^2\sin^2(x^3+y^3)$.
3.	Найдите $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, если $z=e^{-x^2y}$.	1) $2(2x^2y-1)e^{-x^2y}$; 2) $-2(2x^2y-1)e^{-x^2y}$; 3) $(x^2y^2-1)e^{-y}$; 4) $2y(2x^2y-1)e^{-x^2y}$; 5) $2x^2ye^{-x^2y}$.
4.	Найдите производную сложной функции $z=x^2y$, если $x=e^{2t};\ y=2\ln t$.	1) $e^{4t}(4\ln t+1/t)$; 2) $2e^{4t}(2\ln t+1/t)$; 3) $2e^{4t}(4\ln t+1/t)$; 4) $2e^{2t}(4\ln t+1/t)$; 5) $2e^{4t}\ln t$.
5.	Для функции $u=x^2\cos(xy)$ найдите полный дифференциал $\mathrm{d}u$.	1) $(2x\cos(xy)-y\sin(xy))\mathrm{d}x-x^3\sin(xy)\mathrm{d}y$; 2) $(2x\cos(xy))\mathrm{d}x$; 3) $-x^3\sin(xy)\mathrm{d}y$; 4) $(2x\cos(xy)-y\sin(xy))\mathrm{d}x+x^3\sin(xy)\mathrm{d}y$; 5) $(2x\cos(xy)-y\sin(xy))\mathrm{d}x-\sin(xy)\mathrm{d}y$;.
6.	В точке A(1, 1, -1) уравнение касательной плоскости к поверхности $z^2=(x-1)^2+(y+1)^2$ имеет вид…	1) $y+z=0$; 2) $2x+2y+z-6=0$; 3) $4x+y-5=0$; 4) $y-2z+1=0$; 5) $2y+z-1=0$.
7.	Функция $z=\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{y}-2xy$ имеет локальный...	1) Минимум в точке (-2, 0); 2) Минимум в точке (5, 5); 3) Минимум в точке (2, 0); 4) Максимум в точке (-1, -1); 5) Не имеет экстремума.
8.	Найдите производную функции $u=\sqrt{y^2+x^2}$ в точке A по направлению вектора $\overrightarrow{AB},\ A(2,0),\ B(3,1)$.	1) $1/\sqrt{10}$; 2) $\sqrt{2}/2$; 3) $5\sqrt{2}/8$; 4) -0,5; 5) $2\sqrt{5}/5$.
9.	В точке A(-1, 1, 1) градиент скалярного поля $u=\sqrt{1/2+x^2/2+3y^2+5z^2}$ равен…	1) $\vec{k}$; 2) $1/e(-2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k})$; 3) $\vec{j}$; 4) $2\vec{i}+1/e\,\vec{j}$; 5) $-1/6\vec{i}+\vec{j}+5/3\vec{k}$.
10.	Функция $z=x+y-x^2-y^2$ в области $x\ge 0; y\ge 0; x+y\le 3$ имеет наибольшее z_1 и наименьшее z_2 значения…	1) $z_1=0, z_2=-6$; 2) $z_1=3, z_2=-8$; 3) $z_1=0, z_2=-8$; 4) $z_1=0{,}5,\ z_2=-6$; 5) $z_1=3, z_2=-9$.

Тест «Дифференцирование функций нескольких переменных»

Ответы

Вариант	Задания								
	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	5	1	2	2	1	3	3	4
2	3	3	4	1	4	2	5	1	3
3	3	4	3	1	5	1	4	4	3
4	1	4	1	2	3	2	1	5	3
5	3	4	5	1	1	3	1	5	4
6	1	3	1	5	2	4	1	5	5
7	3	2	4	4	1	5	3	1	4
8	3	4	3	1	5	1	2	2	4
9	3	1	2	5	4	5	2	5	3
10	1	4	3	1	5	4	2	5	4
11	1	5	1	2	2	1	3	3	4
12	3	3	4	1	4	2	5	1	3
13	3	4	3	1	5	1	4	4	3
14	1	4	1	2	3	2	1	5	3
15	3	4	5	1	1	3	1	5	4
16	1	3	1	5	2	4	1	5	5
17	3	2	4	4	1	5	3	1	4
18	3	4	3	1	5	1	2	2	4
19	3	1	2	5	4	5	2	5	3
20	1	4	3	1	5	4	2	5	4
21	1	5	1	2	2	1	3	3	4
22	3	3	4	1	4	2	5	1	3
23	3	4	3	1	5	1	4	4	3
24	1	4	1	2	3	2	1	5	3
25	3	4	5	1	1	3	1	5	4
26	1	3	1	5	2	4	1	5	5
27	3	2	4	4	1	5	3	1	4
28	3	4	3	1	5	1	2	2	4
29	3	1	2	5	4	5	2	5	3
30	1	4	3	1	5	4	2	5	4

ТЕСТ

«ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ. ПРИЛОЖЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА»

Вариант 1

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Если $F(x)$ – какая либо первообразная функции $f(x)$, то чему равен интеграл $\int_a^b f(x)dx$	1) $F(a)-F(b)$; 2) $F(b)-F(a)$; 3) $F(a)$; 4) $F(b)$;5) $F(a)\pm F(b)$.
2.	Вычислите: $\int_0^3 e^{2x}dx$	1) $\frac{1}{3}(e^{3x}+1)$; 2) $\frac{1}{2}(e^{3x}-1)$; 3) $\frac{1}{3}(e^{6}-1)$;4) $\frac{1}{2}(e^{6}-1)$; 5) $\frac{1}{2}(e^{3})$.
3.	Вычислите: $\int_1^{16} \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx$	1) $25+e^2$; 2) $9-\ln\frac{25}{4}$; 3) $\ln\frac{5}{2}$; 4) ∞; 5) $3+\ln\frac{5}{4}$.
4.	Вычислите: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$	1) $\frac{3}{2}$; 2) 0; 3) $25+\sqrt{2}$; 4) $\ln\sin\frac{\pi}{4}$; 5) $\sqrt{2}-1$.
5.	Вычислите: $\int_1^4 \ln(x^2)dx$	1) $4\ln 16-6$; 2) $\ln 16-\ln 1$; 3) 4; 4) $\ln e+1$; 5) интеграл не может быть вычислен.
6.	Вычислите: $\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{x^3}{x^2+2}dx$	1) $2+\sqrt{2}$; 2) $1-\ln 4$; 3) $1+e^2$; 4) $1+\ln\frac{2}{3}$; 5) $\pi=3.1428571$.
7.	Вычислите: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 5x\sin(\frac{\pi}{2}-x)dx$	1) 3; 2) 0; 3) 49π ;4) $\sin\frac{\pi}{4}$; 5) $\sqrt{2}-2\pi$
8.	Вычислите площадь фигуры ограниченную графиком фнункции $y=\cos x$, $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$	1) $\frac{\pi}{2}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) 0; 4) 3π; 5) 4.
9.	Вычислите объем полученный вращением вокруг оси Ox фигуры $y=x^2$ ограниченной линиями $x\in[0;5]$.	1) 4π; 2) 13π; 3) 7π; 4) 625π; 5) $\frac{1}{3}$.
10.	Вычислить длину дуги кривой $y=\ln(x+1)$, между прямыми $x=0$ и $x=3$.	1) 20; 2) 3π; 3) $\frac{20}{3}$; 4) $3-\sqrt{2}$; 5) $\sqrt{21}$.

Тест «Определенный интеграл. Приложение определенного интеграла»

Вариант 2

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Найдите новые пределы интегрирования $\int_0^1 f(x)dx$, подстановка $x = \sin t$.	1) $\int_{-3}^{3}\varphi(t)dt$; 2) $\int_0^{\infty}\varphi(t)dt$; 3) $\int_1^2\varphi(t)dt$; 4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\varphi(t)dt$; 5) $\int_0^2\varphi(t)dt$.
2.	Вычислите: $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x dx$	1) $\frac{1}{3}$; 2) 1; 3) $\frac{\pi}{3}$; 4) 0; 5) ∞.
3.	Вычислите: $\int_0^{64}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx$	1) $\frac{6}{7}2^7$; 2) 9; 3) $\frac{7}{6}2^8$; 4) ∞; 5) $\frac{512}{2}$.
4.	Вычислите: $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{\sin^6 x}dx$	1) $\frac{3}{2}$; 2) 0; 3) $\frac{8}{15}$; 4) ∞; 5) $\sqrt{2}-1$.
5.	Вычислите: $\int_0^{\ln 2} xe^{-x}dx$	1) $\frac{1-\ln 2}{2}$; 2) $\ln 2 - \ln 1$; 3) 4; 4) $\ln e + 1$; 5) интеграл не может быть вычислен.
6.	Вычислите: $\int_{-2}^{-2+\sqrt{10}}\frac{dx}{x^2+4x+14}$	1) $2+\sqrt{2}$; 2) ∞; 3) $1+e^2$; 4) $\frac{3\pi}{\sqrt{10}}$; 5) $\frac{\pi}{4\sqrt{10}}$.
7.	Вычислите: $\int_0^1 \sin(\pi x)\sin(\frac{\pi}{2}x)dx$	1) π; 2) $\frac{4}{3\pi}$; 3) $\pi-3$; 4) $\frac{\pi}{4}$; 5) 0
8.	Найти площадь фигуры ограниченную параболой $y = 2x - x^2$, и прямыми $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$	1) 16; 2) $\frac{2}{5}$; 3) 40; 4) $\frac{2}{3}$; 5) 2.
9.	Вычислите объем полученный вращением вокруг оси Оx фигуры $y = e^x$ ограниченной линиями $x \in [0;5]$.	1) 2π; 2) 10π; 3) $\frac{\pi}{2}(e^{10}-1)$; 4) $\frac{\pi}{2}(e^5-1)$; 5) $\frac{1}{8}\pi$.
10.	Вычислить длину дуги кривой $y = 2x + 1$, между прямыми $x = 0$ и $x = 3$.	1) $3\sqrt{5}$; 2) 3; 3) $\frac{20}{3}$; 4) $3-\sqrt{2}$; 5) $\sqrt{21}$.

Тест «Определенный интеграл. Приложение определенного интеграла»

Вариант 3

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Найдите новые пределы интегрирования $\int_1^8 f(x)dx$, подстановка $x=t^3$.	1) $\int_{-3}^{3}\varphi(t)dt$; 2) $\int_0^{\infty}\varphi(t)dt$; 3) $\int_1^2\varphi(t)dt$; 4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\varphi(t)dt$; 5) $\int_0^2\varphi(t)dt$.
2.	Вычислите: $\int_2^3 e^{5+3x}dx$	1) $\frac{1}{3}(e^{5+3x}+1)$; 2) $\frac{1}{2}(e^3-1)$; 3) $\frac{1}{3}(e^6-1)$; 4) $\frac{e^{11}}{3}(e^3-1)$; 5) $\frac{1}{2}(e^3)$.
3.	Вычислите: $\int_0^1\frac{dx}{1+\sqrt{x}}$	1) $25+e^2$; 2) $2-2\ln 2$; 3) $\ln\frac{5}{2}$; 4) ∞; 5) $2+\ln 3$.
4.	Вычислите: $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx$	1) $\frac{3}{2}$; 2) 0; 3) $\frac{7}{10}$; 4) ∞; 5) $\frac{8}{15}$.
5.	Вычислите: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx$	1) 1; 2) 25; 3) 4π; 4) $\ln e+1$; 5) интеграл не может быть вычислен.
6.	Вычислите: $\int_5^6\frac{2x+3}{x^2-7x+12}dx$	1) $20\ln 2-9\ln 3$; 2) $1-\ln 4$; 3) 45; 4) $\ln 1+\ln\frac{2}{3}$; 5) 0.
7.	Вычислите: $\int_0^1\cos(\frac{\pi x}{4})\cos(\frac{\pi}{2}x)dx$	1) 2π; 2) π^2; 3) $\frac{4\sqrt{2}}{3\pi}$; 4) $\frac{48}{5\pi}$; 5) $\frac{4\pi}{3}$.
8.	Вычислите площадь сектора ограниченного кривой $r=3\cos\varphi$, $-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$.	1) 134; 2) $\frac{10\pi}{3}$; 3) $\frac{9\pi}{4}$; 4) $\frac{2\pi}{3}$; 5) 23.
9.	Вычислите объем полученный вращением вокруг оси ОХ фигуры $y=x^{\frac{3}{2}}$ ограниченной линиями $x\in[\sqrt{2};4]$.	1) 15π; 2) 130π; 3) $\frac{39\pi}{4}$; 4) 63π; 5) $\frac{1}{8}\pi$.
10.	Вычислить длину дуги кривой $y=\frac{1}{3}\sqrt{x}(x-3)$, между прямыми $x=0$ и $x=3$.	1) 2; 2) $2\sqrt{3}$; 3) $\frac{20}{7}$; 4) $3-\sqrt{2}$; 5) $\sqrt{2}$.

Тест «Определенный интеграл. Приложение определенного интеграла»

Вариант 4

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Найдите новые пределы интегрирования $\int\limits_0^{\pi} f(x)dx$, подстановка $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$.	1) $\int\limits_{-3}^{3}\varphi(t)dt$; 2) $\int\limits_{0}^{\infty}\varphi(t)dt$; 3) $\int\limits_{1}^{2}\varphi(t)dt$; 4) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\varphi(t)dt$; 5) $\int\limits_{0}^{2}\varphi(t)dt$.
2.	Вычислите: $\int\limits_0^1 (3x+1)^4 dx$	1) 1024; 2) ∞; 3) $\frac{\pi}{3}$; 4) $\frac{1}{2}(40-1)$; 5) $\frac{341}{5}$.
3.	Вычислите: $\int\limits_0^8 \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x}}$	1) 25; 2) $8-\ln 3$; 3) $3\ln 3$; 4) $3+\ln\frac{5}{4}$; 5) ∞.
4.	Вычислите: $\int\limits_0^{\pi} \sin^6 x dx$	1) $\frac{5\pi}{16}$; 2) 0; 3) $25+\pi$; 4) ∞; 5) $\sqrt{2}-1$.
5.	Вычислите: $\int\limits_0^1 x\ln(x+1)dx$	1) $4\ln 16-6$; 2) $\frac{1}{4}$; 3) 4; 4) $\ln e+1$; 5) интеграл не может быть вычислен.
6.	Вычислите: $\int\limits_1^2 \frac{x^2+2x}{x^2(x+3)}dx$	1) $\sqrt{2}$; 2) $1-\ln 4$; 3) $1+e^2$; 4) $\frac{1}{3}\ln 5$; 5) 20.
7.	Вычислите: $\int\limits_{-2}^0 \frac{x^2}{1-4x^3}dx$	1) $\frac{1}{12}\ln 33$; 2) $\frac{3}{21}$; 3) $16\ln 2$; 4) $\ln 2$; 5) 0.
8.	Найти площадь фигуры ограниченную линией $r=2(1-\cos\varphi)$, $0\le\varphi\le 2\pi$	1) $\frac{3\pi}{2}$; 2) $\frac{3}{2}$; 3) 0; 4) 6π; 5) π.
9.	Вычислите объем полученный вращением вокруг оси OX фигуры $y=\frac{1}{x^2}$ ограниченной линиями $x\in[\sqrt[3]{2};\sqrt[3]{4}]$.	1) π; 2) 2π; 3) $\frac{\pi}{2}$; 4) $\frac{\pi}{12}$; 5) $\frac{\pi}{16}$.
10.	Вычислить длину дуги кривой заданной параметрически $y=e^t\cos t$, $x=e^t\sin t$, $t\in[0;\pi]$	1) $1+e^{\pi}$; 2) 10π; 3) $\frac{20}{3}e^{\pi}$; 4) $3-\sqrt{2}\pi$; 5) $\sqrt{2}(e^{\pi}-1)$.

Тест «Определенный интеграл. Приложение определенного интеграла»

Вариант 5

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Найдите новые пределы интегрирования $\int_{-1}^{2} f(x)dx$, подстановка $x=\frac{1}{2}(t+1)$.	1) $\int_{-3}^{3}\varphi(t)dt$; 2) $\int_{0}^{\infty}\varphi(t)dt$; 3) $\int_{1}^{2}\varphi(t)dt$; 4) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\varphi(t)dt$;5) $\int_{0}^{2}\varphi(t)dt$.
2.	Вычислите: $\int_{3}^{4}\frac{dx}{2-x}$	1) $\ln\frac{1}{2}$; 2) $\ln 2$; 3) $\ln\frac{3}{2}$;4) $2\ln 2$; 5) e .
3.	Вычислите: $\int_{0}^{\frac{1}{10^3}}\frac{dx}{1-\sqrt[3]{x}}$	1) 25 ; 2) $3\ln\frac{9}{10}-\frac{63}{200}$; 3) $3\ln 63$; 4) $\frac{63}{200}$; 5) ∞ .
4.	Вычислите: $\int_{0}^{\pi}\cos^6 x dx$	1) $\frac{\pi}{2}$; 2) 0 ; 3) $25+\pi$;4) ∞ ; 5) $\frac{5\pi}{16}$.
5.	Вычислите: $\int_{0}^{1} arctgx dx$	1) 6 ; 2) $\ln 16-\ln e$; 3) $\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2}-\ln 2)$; 4) $\ln 1$; 5)интеграл не может быть вычислен.
6.	Вычислите: $\int_{-2}^{0}\frac{dx}{x^2+6x+12}$	1) $2+\sqrt{2}$; 2) 36 ; 3) 1 ; 4) $1+\ln\frac{2}{3}$; 5) $\frac{\pi\sqrt{3}}{18}$.
7.	Вычислите $\int_{0}^{1}\frac{e^{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$	1) e^2 ; 2) e^3-5 ; 3) e^2-1 ;4) e ; 5) 0 .
8.	Вычислите площадь сектора ограниченного кривой $r=5\sqrt{\cos 2\varphi}$, $-\frac{\pi}{4}\le\varphi\le\frac{\pi}{4}$.	1) $\frac{\pi}{4}$; 2) $\frac{25}{4}$; 3) $\frac{3\pi}{2}$; 4) 3π ; 5) 41 .
9.	Вычислите объем полученный вращением вокруг оси Оx фигуры $y=\sqrt{1-x^2}$ ограниченной линиями $x\in[0;1]$.	1) $\frac{2\pi}{3}$; 2) π ; 3) ∞ ; 4) $12\pi^3$; 5) $\frac{\pi e}{3}$.
10.	Вычислить длину дуги кривой заданной параметрически $y=\sin t-t\cos t$, $x=\cos t+t\sin t$, $t\in[0;\pi]$.	1) $\frac{\pi}{3}$; 2) 2π ; 3) $\ln e^{\pi}$; 4) $\frac{\pi^2}{2}$; 5) $\sqrt{2}\pi$.

Тест «Определенный интеграл. Приложение определенного интеграла»

Вариант 6

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Найдите новые пределы интегрирования $\int_1^{e^2} f(x)dx$, подстановка $\ln x = t$.	1) $\int_{-3}^{3}\varphi(t)dt$; 2) $\int_{0}^{\infty}\varphi(t)dt$; 3) $\int_{1}^{2}\varphi(t)dt$; 4) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\varphi(t)dt$; 5) $\int_{0}^{2}\varphi(t)dt$.
2.	Вычислите: $\int_0^2 \frac{dx}{4+x^2}$	1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{1}{2}\pi$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $\frac{1}{2}(\pi-1)$; 5) 4.
3.	Вычислите: $\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}dx$	1) e^2; 2) $9-\ln\frac{25}{4}$; 3) 2π; 4) ∞; 5) 3π.
4.	Вычислите: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^3 x dx$	1) $\frac{1}{2}+\ln\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) 0; 3) $25+\sqrt{2}$; 4) $\ln\sin\frac{\pi}{4}$; 5) $\sqrt{2}-1$.
5.	Вычислите: $\int_0^1 x2^{-x}dx$	1) $4\ln 2+10$; 2) $\frac{1}{2\ln^2 2}(1-\ln 2)$; 3) e; 4) $\ln e+1$; 5) интеграл не может быть вычислен.
6.	Вычислите: $\int_0^1 \frac{x^4}{x+1}dx$	1) 3π; 2) $1+\ln e$; 3) $1+e$; 4) $-\frac{7}{12}+\ln 2$; 5) ∞.
7.	Вычислите $\int_0^1 \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}dx$	1) $\ln(e-1)$; 2) $\frac{1}{2}\ln\frac{e^2+1}{2}$; 3) $\frac{1}{4}\ln\frac{e^2}{2}$; 4) e; 5) $2\ln e^3$.
8.	Вычислите площадь фигуры ограниченную $y^3=x$, и прямыми $x=0$, $x=8$	1) 10; 2) 9; 3) 12; 4) 32; 5) 2π.
9.	Вычислите объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y^2=2x$ и $x=4$.	1) $12\pi+2$; 2) ∞, т.к. фигура незамкнутая; 3) 16π; 4) 48; 5) 0.
10.	Вычислить длину дуги кривой $r=e^{\varphi}$, $0\le\varphi\le 4\pi$.	1) $\sqrt{2}(e^{4\pi}-1)$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}(e^{2\pi}-e)$; 3) $\frac{20}{3}e^{\pi}$; 4) $3\pi-\sqrt{2}\pi$; 5) ∞.

Тест «Определенный интеграл. Приложение определенного интеграла»

Вариант 7

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Верно ли, что $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$	1) верно; 2)не верно; 3) верно, если $f(x)$ четная; 4) верно, если $f(x)$ не четная;5) равенство не имеет смысла.
2.	Вычислите: $\int_{0}^{3}(1+e^{\frac{x}{3}})dx$	1) e; 2) $\ln 2$; 3) $1+3e$;4) $2\ln 2$; 5) $3e$.
3.	Вычислите: $\int_{-1}^{1}\frac{xdx}{\sqrt{5-4x}}$	1) 25; 2) $\frac{1}{6}$; 3) π; 4) $\frac{63}{200}$; 5) ∞.
4.	Вычислите: $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} ctg^3 xdx$	1) 0; 2) $\frac{1}{2}+\ln\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $25+\sqrt{2}$; 4) $\ln\sin\frac{\pi}{4}$; 5) $\sqrt{2}-1$.
5.	Вычислите: $\int_{1}^{3}\frac{\ln x}{x^2}dx$	1) $3\ln e$; 2) ∞; 3) $3+\ln\frac{2}{3}$; 4) $\frac{1}{3}(2-\ln 3)$; 5) интеграл не может быть вычислен.
6.	Вычислите: $\int_{1}^{2}\frac{dx}{x(x+1)^2}$	1) $\ln\frac{4}{3}-\frac{1}{6}$; 2) 0; 3) e; 4) $\frac{1}{6}+\ln 2$; 5) 3 .
7.	Вычислите $\int_{0}^{1}\frac{e^x+e^{-x}}{2}dx$	1) $ch1$; 2) $\frac{1}{2}(1-e^2)$; 3) $\frac{1}{2}(e^1-e^{-1})$;4) e; 5) $\frac{1}{2}$.
8.	Найти площадь фигуры ограниченную линией $r=2\sin 3\varphi$, $0\le\varphi\le\frac{\pi}{3}$	1) $\frac{\pi}{2}$; 2) $\frac{\pi}{3}$; 3) $\frac{\pi}{4}$; 4) 6π; 5) $\frac{\pi}{8}$.
9.	Вычислите объем полученный вращением вокруг оси OX фигуры $y=\sqrt{9-x^2}$ ограниченной линиями $x\in[-3;3]$.	1) ∞; 2) π; 3) 29π; 4) 124; 5) 36π.
10.	Вычислить длину дуги кривой $y=\ln(\sin x)$, между прямыми $x=0$ и $x=\frac{\pi}{2}$.	1) $2e$; 2) 0; 3) $\ln 10$; 4)$\frac{1}{2}\ln 3$; 5) $\frac{1}{2}\ln\frac{3}{4}$.

Тест «Определенный интеграл. Приложение определенного интеграла»

Вариант 8

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Верно ли, что $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 0$	1) верно; 2)не верно; 3) верно, если $f(x)$ четная; 4) верно, если $f(x)$ не четная;5) равенство не имеет смысла.
2.	Вычислите: $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x dx$	1) $\frac{1}{3}$; 2) 1; 3) $\frac{\pi}{3}$;4) 0; 5) ∞.
3.	Вычислите: $\int\limits_{0}^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$	1) $2 - \frac{\pi}{2}$; 2) $\frac{1}{6}$; 3) π; 4) $\frac{3\pi}{2}$; 5) ∞.
4.	Вычислите: $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^4 x}$	1) $\frac{3}{2}$; 2) 0; 3) $25\sqrt{2}$;4) $\ln\frac{\pi}{4}$; 5) $-\frac{8\sqrt{3}}{27}$.
5.	Вычислите: $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\cos^2 x} dx$	1) $\pi \ln 16 - 6$; 2) $\frac{\pi\sqrt{3}}{3} - \ln 2$; 3) 4; 4) ∞; 5) интеграл не может быть вычислен.
6.	Вычислите: $\int\limits_{3}^{4} \frac{2x+4}{(x-2)(x+5)} dx$	1) $\sqrt{3}$; 2) $\ln 5$; 3) $\frac{1}{7}(8\ln 2 + 6\ln\frac{9}{8})$; 4) $\frac{1}{7}(\ln\frac{8}{9} - \ln 3)$; 5) π.
7.	Вычислите $\int\limits_{0}^{1} \frac{4 - e^x}{e^x} dx$	1) $12\sqrt{2}$; 2) ∞; 3) $16(e^2 - 1)$; 4) $3 - 4e^{-1}$; 5) 0.
8.	Вычислите площадь фигуры ограниченную синусоидой $y = \sin x$, $x \in [0; \pi]$	1) $\frac{\pi}{2}$; 2) 3; 3) 4; 4) 3π; 5) 2.
9.	Вычислите объем полученный вращением вокруг оси OX косинусоиды $y = \cos x$, $x \in [0; \pi]$	1) $\frac{\pi^2}{2}$; 2) $\frac{\pi}{6}$; 3) π; 4) $10\pi^3$; 5) $\frac{1}{3}$.
10.	Вычислить длину дуги кривой $r = e^{2\varphi}$, $0 \le \varphi \le 4\pi$.	1) $\frac{\sqrt{5}}{2}(e^{4\pi} - 1)$; 2) $\frac{\sqrt{2}\pi}{2}(e^{\pi} - e)$; 3) $\frac{22}{5}e^3$; 4) $\sqrt{2}\pi^2$; 5) ∞.

Тест «Определенный интеграл. Приложение определенного интеграла»

Вариант 9

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Верно ли, что $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{a}^{-a} f(x)dx$	1) верно; 2)не верно; 3) верно, если $f(x)$ четная; 4) верно, если $f(x)$ не четная;5) равенство не имеет смысла.
2.	Вычислите: $\int_{1}^{2} \frac{x^4+1}{x^2}dx$	1) $\frac{1}{3}$; 2) 1; 3) $\frac{17}{6}$; 4) 0; 5) ∞.
3.	Вычислите: $\int_{0}^{1} \frac{x^2}{\sqrt{x+1}}dx$	1) $\frac{125}{3}$; 2) $\frac{1}{6}$; 3) π; 4) $\frac{3}{2}$; 5) $\frac{16}{15}$.
4.	Вычислите: $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^4 x}$	1) $2\sqrt{3}$; 2) 4; 3) $25\sqrt{2}$; 4) ∞; 5) $-\frac{8\sqrt{3}}{27}$.
5.	Вычислите: $\int_{0}^{\pi} x\cos x dx$	1) ∞; 2) 4; 3) -2; 4) $\frac{5}{2}$; 5)интеграл не может быть вычислен.
6.	Вычислите: $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2+2x+5}$	1) $\frac{\pi}{8}$; 2) $\frac{\pi}{4}$; 3) $\frac{3\pi}{2}$; 4) $\frac{5\pi}{12}$; 5) π .
7.	Вычислите $\int_{0}^{\pi} e^x \cos x dx$.	1) $12\pi-\sqrt{2}\pi$; 2) e^2-2; 3) 16π; 4) $\frac{1}{2}(-1-e^{\pi})$; 5) $\frac{1}{2}(e^2-e^{\pi})$.
8.	Вычислите площадь сектора ограниченного кривой $r=3\cos 3\varphi$, $-\frac{\pi}{6}\le\varphi\le\frac{\pi}{6}$.	1) $\frac{3\pi}{4}$; 2) $\frac{5\pi}{4}$; 3) $\frac{3\pi}{2}$; 4) 3π; 5) 41.
9.	Вычислите объем полученный вращением вокруг оси Оx фигуры $y=(\ln x)^{\frac{1}{2}}$ ограниченной линиями $x\in[\sqrt[3]{2};\sqrt[3]{4}]$.	1) π; 2) $\pi(2\ln 2-1)$; 3) $\frac{\pi}{2}\ln\frac{2}{3}$; 4) $\frac{\pi}{12}$; 5) $\frac{3\pi}{16}$.
10.	Вычислить длину дуги кривой $y^2=(x+1)^3$, между прямыми $x=\frac{1}{3}$ и $x=\frac{12}{9}$.	1) $\frac{20}{3}$; 2) $3\sqrt{2}$; 3) $\frac{1}{26}$; 4) $3+2\sqrt{2}$; 5) $\frac{61}{27}$.

Тест «Определенный интеграл. Приложение определенного интеграла»

Вариант 10

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Верно ли, что $\int_{-a}^{a} f(x)dx = -\int_{a}^{-a} f(x)dx$	1) верно; 2)не верно; 3) верно, если $f(x)$ четная; 4) верно, если $f(x)$ не четная;5) равенство не имеет смысла.
2.	Вычислите: $\int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}}$	1) $\frac{1}{3}$; 2) 10; 3) $\frac{17}{6}$;4) 2; 5) ∞.
3.	Вычислите: $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$	1) $2+\frac{3}{2}$; 2) $\sqrt{2}-1$; 3) $\frac{96}{35}$; 4) $\frac{3}{2}$; 5) $2+\sqrt{2}$.
4.	Вычислите: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^8 x}$	1) $\frac{3}{2}$; 2) 0; 3) $\frac{96}{35}$;4) $\ln\sin\frac{\pi}{4}$; 5) $\sqrt{2}-1$.
5.	Вычислите: $\int_0^1 \arcsin x dx$	1) $\frac{\pi}{2}-1$; 2) ∞; 3) π; 4) 4; 5) $3\pi-2$.
6.	Вычислите: $\int_1^2 \frac{dx}{x^2+2x}$	1) $10+\sqrt{2}$; 2) $4\ln 2$; 3) $\frac{5}{2}$; 4) ∞; 5) $\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$.
7.	Вычислите $\int_0^{\pi} \cos^5 x \sin x dx$	1) $12\pi+2$; 2) 0; 3) 16π;4) 4; 5) 3.
8.	Вычислите площадь фигуры ограниченную спиралью Архимеда $r=3\varphi$, $0<\varphi<2\pi$.	1) 4; 2) 13π; 3) π; 4) $12\pi^3$; 5) $\frac{1}{3}$.
9.	Вычислите объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$, $x\in[1;8]$.	1) $12\pi+2$; 2) ∞, т.к. фигура незамкнутая; 3) 3π;4) 22; 5) 5π.
10.	Вычислить длину дуги кривой $y=t^3$, $x=t^2$, $t\in[0,1]$.	1) $\frac{20}{27}(4-2^{\frac{2}{3}})$; 2) $\frac{1}{27}(13^{\frac{3}{2}}-8)$; 3) интеграл не может быть вычислен; 4) $\frac{20}{27}(4-2^{\frac{2}{3}})$; 5) ∞.

Тест «Определенный интеграл. Приложение определенного интеграла»

Вариант 11

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Если $F(x)$ – какая либо первообразная функции $f(x)$, то чему равен интеграл $\int_a^b f(x)dx$	1) $F(a)-F(b)$; 2) $F(b)-F(a)$; 3) $F(a)$; 4) $F(b)$;5) $F(a)\pm F(b)$.
2.	Вычислите: $\int_0^3 e^{2x}dx$	1) $\frac{1}{3}(e^{3x}+1)$; 2) $\frac{1}{2}(e^{3x}-1)$; 3) $\frac{1}{3}(e^6-1)$;4) $\frac{1}{2}(e^6-1)$; 5) $\frac{1}{2}(e^3)$.
3.	Вычислите: $\int_1^{16}\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx$	1) $25+e^2$; 2) $9-\ln\frac{25}{4}$; 3) $\ln\frac{5}{2}$; 4) ∞; 5) $3+\ln\frac{5}{4}$.
4.	Вычислите: $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$	1) $\frac{3}{2}$; 2) 0; 3) $25+\sqrt{2}$; 4) $\ln\sin\frac{\pi}{4}$; 5) $\sqrt{2}-1$.
5.	Вычислите: $\int_1^4 \ln(x^2)dx$	1) $4\ln 16-6$; 2) $\ln 16-\ln 1$; 3) 4; 4) $\ln e+1$; 5) интеграл не может быть вычислен.
6.	Вычислите: $\int_{\sqrt{2}}^2\frac{x^3}{x^2+2}dx$	1) $2+\sqrt{2}$; 2) $1-\ln 4$; 3) $1+e^2$; 4) $1+\ln\frac{2}{3}$; 5) $\pi=3.1428571$.
7.	Вычислите: $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 5x\sin(\frac{\pi}{2}-x)dx$	1) 3; 2) 0; 3) 49π ;4) $\sin\frac{\pi}{4}$; 5) $\sqrt{2}-2\pi$
8.	Вычислите площадь фигуры ограниченную графиком фнункции $y=\cos x$, $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$	1)$\frac{\pi}{2}$; 2)$\frac{1}{2}$; 3)0; 4)3π; 5)4.
9.	Вычислите объем полученный вращением вокруг оси Оx фигуры $y=x^2$ ограниченной линиями $x\in[0;5]$.	1) 4π; 2) 13π; 3) 7π; 4) 625π; 5) $\frac{1}{3}$.
10.	Вычислить длину дуги кривой $y=\ln(x+1)$, между прямыми $x=0$ и $x=3$.	1) 20; 2) 3π; 3) $\frac{20}{3}$; 4) $3-\sqrt{2}$; 5) $\sqrt{21}$.

Тест «Определенный интеграл. Приложение определенного интеграла»

Вариант 12

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Найдите новые пределы интегрирования $\int_0^1 f(x)dx$, подстановка $x = \sin t$.	1) $\int_{-3}^{3}\varphi(t)dt$; 2) $\int_{0}^{\infty}\varphi(t)dt$; 3) $\int_{1}^{2}\varphi(t)dt$; 4) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\varphi(t)dt$; 5) $\int_{0}^{2}\varphi(t)dt$.
2.	Вычислите: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx$	1) $\frac{1}{3}$; 2) 1; 3) $\frac{\pi}{3}$; 4) 0; 5) ∞.
3.	Вычислите: $\int_0^{64} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} dx$	1) $\frac{6}{7}2^7$; 2) 9; 3) $\frac{7}{6}2^8$; 4) ∞; 5) $\frac{512}{2}$.
4.	Вычислите: $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{\sin^6 x} dx$	1) $\frac{3}{2}$; 2) 0; 3) $\frac{8}{15}$; 4) ∞; 5) $\sqrt{2}-1$.
5.	Вычислите: $\int_0^{\ln 2} xe^{-x} dx$	1) $\frac{1-\ln 2}{2}$; 2) $\ln 2 - \ln 1$; 3) 4; 4) $\ln e + 1$; 5) интеграл не может быть вычислен.
6.	Вычислите: $\int_{-2}^{-2+\sqrt{10}} \frac{dx}{x^2+4x+14}$	1) $2+\sqrt{2}$; 2) ∞; 3) $1+e^2$; 4) $\frac{3\pi}{\sqrt{10}}$; 5) $\frac{\pi}{4\sqrt{10}}$.
7.	Вычислите: $\int_0^1 \sin(\pi x)\sin(\frac{\pi}{2}x)dx$	1) π; 2) $\frac{4}{3\pi}$; 3) $\pi - 3$; 4) $\frac{\pi}{4}$; 5) 0
8.	Найти площадь фигуры ограниченную параболой $y = 2x - x^2$, и прямыми $x = 1$, $x = 2$	1) 16; 2) $\frac{2}{5}$; 3) 40; 4) $\frac{2}{3}$; 5) 2.
9.	Вычислите объем полученный вращением вокруг оси Оx фигуры $y = e^x$ ограниченной линиями $x \in [0;5]$.	1) 2π; 2) 10π; 3) $\frac{\pi}{2}(e^{10}-1)$; 4) $\frac{\pi}{2}(e^5-1)$; 5) $\frac{1}{8}\pi$.
10.	Вычислить длину дуги кривой $y = 2x+1$, между прямыми $x = 0$ и $x = 3$.	1) $3\sqrt{5}$; 2) 3; 3) $\frac{20}{3}$; 4) $3-\sqrt{2}$; 5) $\sqrt{21}$.

Тест «Определенный интеграл. Приложение определенного интеграла»

Вариант 13

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Найдите новые пределы интегрирования $\int_1^8 f(x)dx$, подстановка $x=t^3$.	1) $\int_{-3}^{3}\varphi(t)dt$; 2) $\int_{0}^{\infty}\varphi(t)dt$; 3) $\int_{1}^{2}\varphi(t)dt$; 4) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\varphi(t)dt$;5) $\int_{0}^{2}\varphi(t)dt$.
2.	Вычислите: $\int_2^3 e^{5+3x}dx$	1) $\frac{1}{3}(e^{5+3x}+1)$; 2) $\frac{1}{2}(e^3-1)$; 3) $\frac{1}{3}(e^6-1)$;4) $\frac{e^{11}}{3}(e^3-1)$; 5) $\frac{1}{2}(e^3)$.
3.	Вычислите: $\int_0^1 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$	1) $25+e^2$; 2) $2-2\ln 2$; 3) $\ln\frac{5}{2}$; 4) ∞; 5) $2+\ln 3$.
4.	Вычислите: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx$	1) $\frac{3}{2}$; 2) 0; 3) $\frac{7}{10}$;4) ∞; 5) $\frac{8}{15}$.
5.	Вычислите: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx$	1)1; 2)25; 3)4π; 4)$\ln e+1$; 5)интеграл не может быть вычислен.
6.	Вычислите: $\int_5^6 \frac{2x+3}{x^2-7x+12}dx$	1)$20\ln 2-9\ln 3$; 2)$1-\ln 4$; 3)45; 4)$\ln 1+\ln\frac{2}{3}$; 5)0 .
7.	Вычислите: $\int_0^1 \cos(\frac{\pi x}{4})\cos(\frac{\pi}{2}x)dx$	1) 2π; 2) π^2; 3) $\frac{4\sqrt{2}}{3\pi}$;4) $\frac{48}{5\pi}$; 5) $\frac{4\pi}{3}$.
8.	Вычислите площадь сектора ограниченного кривой $r=3\cos\varphi$, $-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$.	1) 134; 2) $\frac{10\pi}{3}$; 3) $\frac{9\pi}{4}$; 4) $\frac{2\pi}{3}$; 5) 23.
9.	Вычислите объем полученный вращением вокруг оси ОХ фигуры $y=x^{\frac{3}{2}}$ ограниченной линиями $x\in[\sqrt{2};4]$.	1) 15π; 2) 130π; 3) $\frac{39\pi}{4}$; 4) 63π; 5) $\frac{1}{8}\pi$.
10.	Вычислить длину дуги кривой $y=\frac{1}{3}\sqrt{x}(x-3)$, между прямыми $x=0$ и $x=3$.	1) 2; 2) $2\sqrt{3}$; 3) $\frac{20}{7}$; 4) $3-\sqrt{2}$; 5) $\sqrt{2}$.

Тест «Определенный интеграл. Приложение определенного интеграла»

Вариант 14

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Найдите новые пределы интегрирования $\int_0^{\pi} f(x)dx$, подстановка $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$.	1) $\int_{-3}^{3}\varphi(t)dt$; 2) $\int_0^{\infty}\varphi(t)dt$; 3) $\int_1^2\varphi(t)dt$; 4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\varphi(t)dt$;5) $\int_0^2\varphi(t)dt$.
2.	Вычислите: $\int_0^1 (3x+1)^4 dx$	1) 1024; 2) ∞; 3) $\frac{\pi}{3}$;4) $\frac{1}{2}(40-1)$; 5) $\frac{341}{5}$.
3.	Вычислите: $\int_0^8 \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x}}$	1) 25; 2) $8-\ln 3$; 3) $3\ln 3$; 4) $3+\ln\frac{5}{4}$; 5) ∞.
4.	Вычислите: $\int_0^{\pi}\sin^6 x dx$	1) $\frac{5\pi}{16}$; 2) 0; 3) $25+\pi$;4) ∞; 5) $\sqrt{2}-1$.
5.	Вычислите: $\int_0^1 x\ln(x+1)dx$	1) $4\ln 16-6$; 2) $\frac{1}{4}$; 3) 4; 4) $\ln e+1$; 5) интеграл не может быть вычислен.
6.	Вычислите: $\int_1^2 \frac{x^2+2x}{x^2(x+3)}dx$	1) $\sqrt{2}$; 2) $1-\ln 4$; 3) $1+e^2$; 4) $\frac{1}{3}\ln 5$; 5) 20.
7.	Вычислите: $\int_{-2}^0 \frac{x^2}{1-4x^3}dx$	1) $\frac{1}{12}\ln 33$; 2) $\frac{3}{21}$; 3) $16\ln 2$;4) $\ln 2$; 5) 0.
8.	Найти площадь фигуры ограниченную линией $r=2(1-\cos\varphi)$, $0\le\varphi\le 2\pi$	1) $\frac{3\pi}{2}$; 2) $\frac{3}{2}$; 3) 0; 4) 6π; 5) π.
9.	Вычислите объем полученный вращением вокруг оси OX фигуры $y=\frac{1}{x^2}$ ограниченной линиями $x\in[\sqrt[3]{2};\sqrt[3]{4}]$.	1) π; 2) 2π; 3) $\frac{\pi}{2}$; 4) $\frac{\pi}{12}$; 5) $\frac{\pi}{16}$.
10.	Вычислить длину дуги кривой заданной параметрически $y=e^t\cos t$, $x=e^t\sin t$, $t\in[0;\pi]$	1) $1+e^{\pi}$; 2) 10π; 3) $\frac{20}{3}e^{\pi}$; 4) $3-\sqrt{2}\pi$; 5) $\sqrt{2}(e^{\pi}-1)$.

Тест «Определенный интеграл. Приложение определенного интеграла»

Вариант 15

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Найдите новые пределы интегрирования $\int_{-1}^{2} f(x)dx$, подстановка $x=\frac{1}{2}(t+1)$.	1) $\int_{-3}^{3}\varphi(t)dt$; 2) $\int_{0}^{\infty}\varphi(t)dt$; 3) $\int_{1}^{2}\varphi(t)dt$; 4) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\varphi(t)dt$; 5) $\int_{0}^{2}\varphi(t)dt$.
2.	Вычислите: $\int_{3}^{4}\frac{dx}{2-x}$	1) $\ln\frac{1}{2}$; 2) $\ln 2$; 3) $\ln\frac{3}{2}$; 4) $2\ln 2$; 5) e.
3.	Вычислите: $\int_{0}^{\frac{1}{10^3}}\frac{dx}{1-\sqrt[3]{x}}$	1) 25; 2) $3\ln\frac{9}{10}-\frac{63}{200}$; 3) $3\ln 63$; 4) $\frac{63}{200}$; 5) ∞.
4.	Вычислите: $\int_{0}^{\pi}\cos^6 x dx$	1) $\frac{\pi}{2}$; 2) 0; 3) $25+\pi$; 4) ∞; 5) $\frac{5\pi}{16}$.
5.	Вычислите: $\int_{0}^{1} arctgx dx$	1) 6; 2) $\ln 16-\ln e$; 3) $\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2}-\ln 2)$; 4) $\ln 1$; 5) интеграл не может быть вычислен.
6.	Вычислите: $\int_{-2}^{0}\frac{dx}{x^2+6x+12}$	1) $2+\sqrt{2}$; 2) 36; 3) 1; 4) $1+\ln\frac{2}{3}$; 5) $\frac{\pi\sqrt{3}}{18}$.
7.	Вычислите $\int_{0}^{1}\frac{e^{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$	1) e^2; 2) e^3-5; 3) e^2-1; 4) e; 5) 0.
8.	Вычислите площадь сектора ограниченного кривой $r=5\sqrt{\cos 2\varphi}$, $-\frac{\pi}{4}\le\varphi\le\frac{\pi}{4}$.	1) $\frac{\pi}{4}$; 2) $\frac{25}{4}$; 3) $\frac{3\pi}{2}$; 4) 3π; 5) 41.
9.	Вычислите объем полученный вращением вокруг оси Оx фигуры $y=\sqrt{1-x^2}$ ограниченной линиями $x\in[0;1]$.	1) $\frac{2\pi}{3}$; 2) π; 3) ∞; 4) $12\pi^3$; 5) $\frac{\pi e}{3}$.
10.	Вычислить длину дуги кривой заданной параметрически $y=\sin t-t\cos t$, $x=\cos t+t\sin t$, $t\in[0;\pi]$.	1) $\frac{\pi}{3}$; 2) 2π; 3) $\ln e^{\pi}$; 4) $\frac{\pi^2}{2}$; 5) $\sqrt{2}\pi$.

Тест «Определенный интеграл. Приложение определенного интеграла»

Вариант 16

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Найдите новые пределы интегрирования $\int_1^{e^2} f(x)dx$, подстановка $\ln x = t$.	1) $\int_{-3}^{3}\varphi(t)dt$; 2) $\int_{0}^{\infty}\varphi(t)dt$; 3) $\int_{1}^{2}\varphi(t)dt$; 4) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\varphi(t)dt$; 5) $\int_{0}^{2}\varphi(t)dt$.
2.	Вычислите: $\int_0^2 \frac{dx}{4+x^2}$	1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{1}{2}\pi$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $\frac{1}{2}(\pi-1)$; 5) 4.
3.	Вычислите: $\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}dx$	1) e^2; 2) $9-\ln\frac{25}{4}$; 3) 2π; 4) ∞; 5) 3π.
4.	Вычислите: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^3 x dx$	1) $\frac{1}{2}+\ln\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) 0; 3) $25+\sqrt{2}$; 4) $\ln\sin\frac{\pi}{4}$; 5) $\sqrt{2}-1$.
5.	Вычислите: $\int_0^1 x2^{-x}dx$	1) $4\ln 2+10$; 2) $\frac{1}{2\ln^2 2}(1-\ln 2)$; 3) e; 4) $\ln e+1$; 5) интеграл не может быть вычислен.
6.	Вычислите: $\int_0^1 \frac{x^4}{x+1}dx$	1) 3π; 2) $1+\ln e$; 3) $1+e$; 4) $-\frac{7}{12}+\ln 2$; 5) ∞.
7.	Вычислите $\int_0^1 \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}dx$	1) $\ln(e-1)$; 2) $\frac{1}{2}\ln\frac{e^2+1}{2}$; 3) $\frac{1}{4}\ln\frac{e^2}{2}$; 4) e; 5) $2\ln e^3$.
8.	Вычислите площадь фигуры ограниченную $y^3 = x$, и прямыми $x=0$, $x=8$	1) 10; 2) 9; 3) 12; 4) 32; 5) 2π.
9.	Вычислите объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 2x$ и $x=4$.	1) $12\pi+2$; 2) ∞, т.к. фигура незамкнутая; 3) 16π; 4) 48; 5) 0.
10.	Вычислить длину дуги кривой $r=e^{\varphi}$, $0\le\varphi\le 4\pi$.	1) $\sqrt{2}(e^{4\pi}-1)$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}(e^{2\pi}-e)$; 3) $\frac{20}{3}e^{\pi}$; 4) $3\pi-\sqrt{2}\pi$; 5) ∞.

Тест «Определенный интеграл. Приложение определенного интеграла»

Вариант 17

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Верно ли, что $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$	1) верно; 2)не верно; 3) верно, если $f(x)$ четная; 4) верно, если $f(x)$ не четная;5) равенство не имеет смысла.
2.	Вычислите: $\int_{0}^{3}(1+e^{\frac{x}{3}})dx$	1) e; 2) $\ln 2$; 3) $1+3e$;4) $2\ln 2$; 5) $3e$.
3.	Вычислите: $\int_{-1}^{1}\frac{xdx}{\sqrt{5-4x}}$	1) 25; 2) $\frac{1}{6}$; 3) π; 4) $\frac{63}{200}$; 5) ∞.
4.	Вычислите: $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} ctg^3 x dx$	1) 0; 2) $\frac{1}{2}+\ln\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $25+\sqrt{2}$; 4) $\ln\sin\frac{\pi}{4}$; 5) $\sqrt{2}-1$.
5.	Вычислите: $\int_{1}^{3}\frac{\ln x}{x^2}dx$	1) $3\ln e$; 2) ∞; 3) $3+\ln\frac{2}{3}$; 4) $\frac{1}{3}(2-\ln 3)$; 5) интеграл не может быть вычислен.
6.	Вычислите: $\int_{1}^{2}\frac{dx}{x(x+1)^2}$	1) $\ln\frac{4}{3}-\frac{1}{6}$; 2) 0; 3) e; 4) $\frac{1}{6}+\ln 2$; 5) 3 .
7.	Вычислите $\int_{0}^{1}\frac{e^x+e^{-x}}{2}dx$	1) $ch1$; 2) $\frac{1}{2}(1-e^2)$; 3) $\frac{1}{2}(e^1-e^{-1})$;4) e; 5) $\frac{1}{2}$.
8.	Найти площадь фигуры ограниченную линией $r=2\sin 3\varphi$, $0\le\varphi\le\frac{\pi}{3}$	1) $\frac{\pi}{2}$; 2) $\frac{\pi}{3}$; 3) $\frac{\pi}{4}$; 4) 6π; 5) $\frac{\pi}{8}$.
9.	Вычислите объем полученный вращением вокруг оси OX фигуры $y=\sqrt{9-x^2}$ ограниченной линиями $x\in[-3;3]$.	1) ∞; 2) π; 3) 29π; 4) 124; 5) 36π.
10.	Вычислить длину дуги кривой $y=\ln(\sin x)$, между прямыми $x=0$ и $x=\frac{\pi}{2}$.	1) $2e$; 2) 0; 3) $\ln 10$; 4) $\frac{1}{2}\ln 3$; 5) $\frac{1}{2}\ln\frac{3}{4}$.

Тест «Определенный интеграл. Приложение определенного интеграла»

Вариант 18

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Верно ли, что $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 0$	1) верно; 2)не верно; 3) верно, если $f(x)$ четная; 4) верно, если $f(x)$ не четная;5) равенство не имеет смысла.
2.	Вычислите: $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x dx$	1) $\frac{1}{3}$; 2) 1; 3) $\frac{\pi}{3}$;4) 0; 5) ∞.
3.	Вычислите: $\int\limits_{0}^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$	1) $2-\frac{\pi}{2}$; 2) $\frac{1}{6}$; 3) π; 4) $\frac{3\pi}{2}$; 5) ∞.
4.	Вычислите: $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^4 x}$	1) $\frac{3}{2}$; 2) 0; 3) $25\sqrt{2}$;4) $\ln\frac{\pi}{4}$; 5) $-\frac{8\sqrt{3}}{27}$.
5.	Вычислите: $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\cos^2 x} dx$	1) $\pi \ln 16 - 6$; 2) $\frac{\pi\sqrt{3}}{3} - \ln 2$; 3) 4; 4) ∞; 5) интеграл не может быть вычислен.
6.	Вычислите: $\int\limits_{3}^{4} \frac{2x+4}{(x-2)(x+5)} dx$	1) $\sqrt{3}$; 2) $\ln 5$; 3) $\frac{1}{7}(8\ln 2 + 6\ln\frac{9}{8})$; 4) $\frac{1}{7}(\ln\frac{8}{9} - \ln 3)$; 5) π.
7.	Вычислите $\int\limits_{0}^{1} \frac{4-e^x}{e^x} dx$	1) $12\sqrt{2}$; 2) ∞; 3) $16(e^2-1)$; 4) $3-4e^{-1}$; 5) 0.
8.	Вычислите площадь фигуры ограниченную синусоидой $y=\sin x$, $x \in [0;\pi]$	1) $\frac{\pi}{2}$; 2) 3; 3) 4; 4) 3π; 5) 2.
9.	Вычислите объем полученный вращением вокруг оси OX косинусоиды $y=\cos x$, $x \in [0;\pi]$	1)$\frac{\pi^2}{2}$; 2) $\frac{\pi}{6}$; 3)π; 4)$10\pi^3$; 5)$\frac{1}{3}$.
10.	Вычислить длину дуги кривой $r=e^{2\varphi}$, $0 \le \varphi \le 4\pi$.	1) $\frac{\sqrt{5}}{2}(e^{4\pi}-1)$; 2) $\frac{\sqrt{2}\pi}{2}(e^{\pi}-e)$; 3) $\frac{22}{5}e^3$; 4) $\sqrt{2}\pi^2$; 5) ∞.

Тест «Определенный интеграл. Приложение определенного интеграла»

Вариант 19

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Верно ли, что $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{a}^{-a} f(x)dx$	1) верно; 2)не верно; 3) верно, если $f(x)$ четная; 4) верно, если $f(x)$ не четная;5) равенство не имеет смысла.
2.	Вычислите: $\int_1^2 \frac{x^4+1}{x^2}dx$	1) $\frac{1}{3}$; 2) 1; 3) $\frac{17}{6}$; 4) 0; 5) ∞.
3.	Вычислите: $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x+1}}dx$	1) $\frac{125}{3}$; 2) $\frac{1}{6}$; 3) π; 4) $\frac{3}{2}$; 5) $\frac{16}{15}$.
4.	Вычислите: $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^4 x}$	1) $2\sqrt{3}$; 2) 4; 3) $25\sqrt{2}$; 4) ∞; 5) $-\frac{8\sqrt{3}}{27}$.
5.	Вычислите: $\int_0^{\pi} x\cos x dx$	1) ∞; 2) 4; 3) -2; 4) $\frac{5}{2}$; 5)интеграл не может быть вычислен.
6.	Вычислите: $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2+2x+5}$	1) $\frac{\pi}{8}$; 2) $\frac{\pi}{4}$; 3) $\frac{3\pi}{2}$; 4) $\frac{5\pi}{12}$; 5) π.
7.	Вычислите $\int_0^{\pi} e^x \cos x dx$.	1) $12\pi-\sqrt{2}\pi$; 2) e^2-2; 3) 16π; 4) $\frac{1}{2}(-1-e^{\pi})$; 5) $\frac{1}{2}(e^2-e^{\pi})$.
8.	Вычислите площадь сектора ограниченного кривой $r = 3\cos 3\varphi$, $-\frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{\pi}{6}$.	1) $\frac{3\pi}{4}$; 2) $\frac{5\pi}{4}$; 3) $\frac{3\pi}{2}$; 4) 3π; 5) 41.
9.	Вычислите объем полученный вращением вокруг оси Оx фигуры $y = (\ln x)^{\frac{1}{2}}$ ограниченной линиями $x \in [\sqrt[3]{2};\sqrt[3]{4}]$.	1) π; 2) $\pi(2\ln 2-1)$; 3) $\frac{\pi}{2}\ln\frac{2}{3}$; 4) $\frac{\pi}{12}$; 5) $\frac{3\pi}{16}$.
10.	Вычислить длину дуги кривой $y^2 = (x+1)^3$, между прямыми $x = \frac{1}{3}$ и $x = \frac{12}{9}$.	1) $\frac{20}{3}$; 2) $3\sqrt{2}$; 3) $\frac{1}{26}$; 4) $3+2\sqrt{2}$; 5) $\frac{61}{27}$.

Тест «Определенный интеграл. Приложение определенного интеграла»

Вариант 20

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Верно ли, что $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = -\int\limits_{a}^{-a} f(x)dx$	1) верно; 2)не верно; 3) верно, если $f(x)$ четная; 4) верно, если $f(x)$ не четная;5) равенство не имеет смысла.
2.	Вычислите: $\int\limits_{4}^{9} \frac{dx}{\sqrt{x}}$	1) $\frac{1}{3}$; 2) 10; 3) $\frac{17}{6}$;4) 2; 5) ∞.
3.	Вычислите: $\int\limits_{0}^{1} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$	1) $2+\frac{3}{2}$; 2) $\sqrt{2}-1$; 3) $\frac{96}{35}$; 4) $\frac{3}{2}$; 5) $2+\sqrt{2}$.
4.	Вычислите: $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^8 x}$	1) $\frac{3}{2}$; 2) 0; 3) $\frac{96}{35}$;4) $\ln\sin\frac{\pi}{4}$; 5) $\sqrt{2}-1$.
5.	Вычислите: $\int\limits_{0}^{1} \arcsin x dx$	1) $\frac{\pi}{2}-1$; 2) ∞; 3) π; 4) 4; 5) $3\pi-2$.
6.	Вычислите: $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{x^2+2x}$	1) $10+\sqrt{2}$; 2) $4\ln 2$; 3) $\frac{5}{2}$; 4) ∞; 5) $\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$.
7.	Вычислите $\int\limits_{0}^{\pi} \cos^5 x \sin x dx$	1) $12\pi+2$; 2) 0; 3) 16π;4) 4; 5) 3.
8.	Вычислите площадь фигуры ограниченную спиралью Архимеда $r=3\varphi$, $0<\varphi<2\pi$.	1) 4; 2) 13π; 3) π; 4) $12\pi^3$; 5) $\frac{1}{3}$.
9.	Вычислите объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$, $x\in[1;8]$.	1) $12\pi+2$; 2) ∞, т.к. фигура незамкнутая; 3) 3π;4) 22; 5) 5π.
10.	Вычислить длину дуги кривой $y=t^3$, $x=t^2$, $t\in[0,1]$.	1) $\frac{20}{27}(4-2^{\frac{2}{3}})$; 2) $\frac{1}{27}(13^{\frac{3}{2}}-8)$; 3) интеграл не может быть вычислен; 4) $\frac{20}{27}(4-2^{\frac{2}{3}})$; 5) ∞.

Тест «Определенный интеграл. Приложение определенного интеграла»

Вариант 21

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Если $F(x)$ – какая либо первообразная функции $f(x)$, то чему равен интеграл $\int_a^b f(x)dx$	1) $F(a)-F(b)$; 2) $F(b)-F(a)$; 3) $F(a)$; 4) $F(b)$;5) $F(a)\pm F(b)$.
2.	Вычислите: $\int_0^3 e^{2x}dx$	1) $\frac{1}{3}(e^{3x}+1)$; 2) $\frac{1}{2}(e^{3x}-1)$; 3) $\frac{1}{3}(e^6-1)$;4) $\frac{1}{2}(e^6-1)$; 5) $\frac{1}{2}(e^3)$.
3.	Вычислите: $\int_1^{16}\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx$	1) $25+e^2$; 2) $9-\ln\frac{25}{4}$; 3) $\ln\frac{5}{2}$; 4) ∞; 5) $3+\ln\frac{5}{4}$.
4.	Вычислите: $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$	1) $\frac{3}{2}$; 2) 0; 3) $25+\sqrt{2}$; 4) $\ln\sin\frac{\pi}{4}$; 5) $\sqrt{2}-1$.
5.	Вычислите: $\int_1^4 \ln(x^2)dx$	1) $4\ln 16-6$; 2) $\ln 16-\ln 1$; 3) 4; 4) $\ln e+1$; 5) интеграл не может быть вычислен.
6.	Вычислите: $\int_{\sqrt{2}}^2\frac{x^3}{x^2+2}dx$	1) $2+\sqrt{2}$; 2) $1-\ln 4$; 3) $1+e^2$; 4) $1+\ln\frac{2}{3}$; 5) $\pi=3.1428571$.
7.	Вычислите: $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 5x\sin(\frac{\pi}{2}-x)dx$	1) 3; 2) 0; 3) 49π ;4) $\sin\frac{\pi}{4}$; 5) $\sqrt{2}-2\pi$
8.	Вычислите площадь фигуры ограниченную графиком фнункции $y=\cos x$, $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$	1)$\frac{\pi}{2}$; 2)$\frac{1}{2}$; 3)0; 4)3π; 5)4.
9.	Вычислите объем полученный вращением вокруг оси Оx фигуры $y=x^2$ ограниченной линиями $x\in[0;5]$.	1) 4π; 2) 13π; 3) 7π; 4) 625π; 5) $\frac{1}{3}$.
10.	Вычислить длину дуги кривой $y=\ln(x+1)$, между прямыми $x=0$ и $x=3$.	1) 20; 2) 3π; 3) $\frac{20}{3}$; 4) $3-\sqrt{2}$; 5) $\sqrt{21}$.

Тест «Определенный интеграл. Приложение определенного интеграла»

Вариант 22

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Найдите новые пределы интегрирования $\int\limits_0^1 f(x)dx$, подстановка $x=\sin t$.	1) $\int\limits_{-3}^{3}\varphi(t)dt$; 2) $\int\limits_{0}^{\infty}\varphi(t)dt$; 3) $\int\limits_{1}^{2}\varphi(t)dt$; 4) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\varphi(t)dt$; 5) $\int\limits_{0}^{2}\varphi(t)dt$.
2.	Вычислите: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2xdx$	1) $\frac{1}{3}$; 2) 1; 3) $\frac{\pi}{3}$; 4) 0; 5) ∞.
3.	Вычислите: $\int\limits_0^{64}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx$	1) $\frac{6}{7}2^7$; 2) 9; 3) $\frac{7}{6}2^8$; 4) ∞; 5) $\frac{512}{2}$.
4.	Вычислите: $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{\sin^6 x}dx$	1) $\frac{3}{2}$; 2) 0; 3) $\frac{8}{15}$; 4) ∞; 5) $\sqrt{2}-1$.
5.	Вычислите: $\int\limits_0^{\ln 2}xe^{-x}dx$	1) $\frac{1-\ln 2}{2}$; 2) $\ln 2-\ln 1$; 3) 4; 4) $\ln e+1$; 5) интеграл не может быть вычислен.
6.	Вычислите: $\int\limits_{-2}^{-2+\sqrt{10}}\frac{dx}{x^2+4x+14}$	1) $2+\sqrt{2}$; 2) ∞; 3) $1+e^2$; 4) $\frac{3\pi}{\sqrt{10}}$; 5) $\frac{\pi}{4\sqrt{10}}$.
7.	Вычислите: $\int\limits_0^1\sin(\pi x)\sin(\frac{\pi}{2}x)dx$	1) π; 2) $\frac{4}{3\pi}$; 3) $\pi-3$; 4) $\frac{\pi}{4}$; 5) 0
8.	Найти площадь фигуры ограниченную параболой $y=2x-x^2$, и прямыми $x=1$, $x=2$	1) 16; 2) $\frac{2}{5}$; 3) 40; 4) $\frac{2}{3}$; 5) 2.
9.	Вычислите объем полученный вращением вокруг оси Оx фигуры $y=e^x$ ограниченной линиями $x\in[0;5]$.	1) 2π; 2) 10π; 3) $\frac{\pi}{2}(e^{10}-1)$; 4) $\frac{\pi}{2}(e^5-1)$; 5) $\frac{1}{8}\pi$.
10.	Вычислить длину дуги кривой $y=2x+1$, между прямыми $x=0$ и $x=3$.	1) $3\sqrt{5}$; 2) 3; 3) $\frac{20}{3}$; 4) $3-\sqrt{2}$; 5) $\sqrt{21}$.

Тест «Определенный интеграл. Приложение определенного интеграла»

Вариант 23

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Найдите новые пределы интегрирования $\int_1^8 f(x)dx$, подстановка $x=t^3$.	1) $\int_{-3}^{3}\varphi(t)dt$; 2) $\int_0^{\infty}\varphi(t)dt$; 3) $\int_1^2\varphi(t)dt$; 4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\varphi(t)dt$; 5) $\int_0^2\varphi(t)dt$.
2.	Вычислите: $\int_2^3 e^{5+3x}dx$	1) $\frac{1}{3}(e^{5+3x}+1)$; 2) $\frac{1}{2}(e^3-1)$; 3) $\frac{1}{3}(e^6-1)$; 4) $\frac{e^{11}}{3}(e^3-1)$; 5) $\frac{1}{2}(e^3)$.
3.	Вычислите: $\int_0^1 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$	1) $25+e^2$; 2) $2-2\ln 2$; 3) $\ln\frac{5}{2}$; 4) ∞; 5) $2+\ln 3$.
4.	Вычислите: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx$	1) $\frac{3}{2}$; 2) 0; 3) $\frac{7}{10}$; 4) ∞; 5) $\frac{8}{15}$.
5.	Вычислите: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx$	1) 1; 2) 25; 3) 4π; 4) $\ln e+1$; 5) интеграл не может быть вычислен.
6.	Вычислите: $\int_5^6 \frac{2x+3}{x^2-7x+12}dx$	1) $20\ln 2-9\ln 3$; 2) $1-\ln 4$; 3) 45; 4) $\ln 1+\ln\frac{2}{3}$; 5) 0.
7.	Вычислите: $\int_0^1 \cos(\frac{\pi x}{4})\cos(\frac{\pi}{2}x)dx$	1) 2π; 2) π^2; 3) $\frac{4\sqrt{2}}{3\pi}$; 4) $\frac{48}{5\pi}$; 5) $\frac{4\pi}{3}$.
8.	Вычислите площадь сектора ограниченного кривой $r=3\cos\varphi$, $-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$.	1) 134; 2) $\frac{10\pi}{3}$; 3) $\frac{9\pi}{4}$; 4) $\frac{2\pi}{3}$; 5) 23.
9.	Вычислите объем полученный вращением вокруг оси OX фигуры $y=x^{\frac{3}{2}}$ ограниченной линиями $x\in[\sqrt{2};4]$.	1) 15π; 2) 130π; 3) $\frac{39\pi}{4}$; 4) 63π; 5) $\frac{1}{8}\pi$.
10.	Вычислить длину дуги кривой $y=\frac{1}{3}\sqrt{x}(x-3)$, между прямыми $x=0$ и $x=3$.	1) 2; 2) $2\sqrt{3}$; 3) $\frac{20}{7}$; 4) $3-\sqrt{2}$; 5) $\sqrt{2}$.

Тест «Определенный интеграл. Приложение определенного интеграла»

Вариант 24

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Найдите новые пределы интегрирования $\int_0^{\pi} f(x)dx$, подстановка $\mathrm{tg}\frac{x}{2}=t$.	1) $\int_{-3}^{3}\varphi(t)dt$; 2) $\int_{0}^{\infty}\varphi(t)dt$; 3) $\int_{1}^{2}\varphi(t)dt$; 4) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\varphi(t)dt$; 5) $\int_{0}^{2}\varphi(t)dt$.
2.	Вычислите: $\int_0^1 (3x+1)^4 dx$	1) 1024; 2) ∞; 3) $\frac{\pi}{3}$; 4) $\frac{1}{2}(40-1)$; 5) $\frac{341}{5}$.
3.	Вычислите: $\int_0^8 \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x}}$	1) 25; 2) $8-\ln 3$; 3) $3\ln 3$; 4) $3+\ln\frac{5}{4}$; 5) ∞.
4.	Вычислите: $\int_0^{\pi} \sin^6 x dx$	1) $\frac{5\pi}{16}$; 2) 0; 3) $25+\pi$; 4) ∞; 5) $\sqrt{2}-1$.
5.	Вычислите: $\int_0^1 x\ln(x+1)dx$	1) $4\ln 16-6$; 2) $\frac{1}{4}$; 3) 4; 4) $\ln e+1$; 5) интеграл не может быть вычислен.
6.	Вычислите: $\int_1^2 \frac{x^2+2x}{x^2(x+3)}dx$	1) $\sqrt{2}$; 2) $1-\ln 4$; 3) $1+e^2$; 4) $\frac{1}{3}\ln 5$; 5) 20.
7.	Вычислите: $\int_{-2}^{0} \frac{x^2}{1-4x^3}dx$	1) $\frac{1}{12}\ln 33$; 2) $\frac{3}{21}$; 3) $16\ln 2$; 4) $\ln 2$; 5) 0.
8.	Найти площадь фигуры ограниченную линией $r=2(1-\cos\varphi)$, $0\le\varphi\le 2\pi$	1) $\frac{3\pi}{2}$; 2) $\frac{3}{2}$; 3) 0; 4) 6π; 5) π.
9.	Вычислите объем полученный вращением вокруг оси OX фигуры $y=\frac{1}{x^2}$ ограниченной линиями $x\in[\sqrt[3]{2};\sqrt[3]{4}]$.	1) π; 2) 2π; 3) $\frac{\pi}{2}$; 4) $\frac{\pi}{12}$; 5) $\frac{\pi}{16}$.
10.	Вычислить длину дуги кривой заданной параметрически $y=e^t\cos t$, $x=e^t\sin t$, $t\in[0;\pi]$	1) $1+e^{\pi}$; 2) 10π; 3) $\frac{20}{3}e^{\pi}$; 4) $3-\sqrt{2}\pi$; 5) $\sqrt{2}(e^{\pi}-1)$.

Тест «Определенный интеграл. Приложение определенного интеграла»

Вариант 25

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Найдите новые пределы интегрирования $\int_{-1}^{2} f(x)dx$, подстановка $x=\frac{1}{2}(t+1)$.	1) $\int_{-3}^{3}\varphi(t)dt$; 2) $\int_{0}^{\infty}\varphi(t)dt$; 3) $\int_{1}^{2}\varphi(t)dt$; 4) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\varphi(t)dt$; 5) $\int_{0}^{2}\varphi(t)dt$.
2.	Вычислите: $\int_{3}^{4}\frac{dx}{2-x}$	1) $\ln\frac{1}{2}$; 2) $\ln 2$; 3) $\ln\frac{3}{2}$; 4) $2\ln 2$; 5) e.
3.	Вычислите: $\int_{0}^{\frac{1}{10^3}}\frac{dx}{1-\sqrt[3]{x}}$	1) 25; 2) $3\ln\frac{9}{10}-\frac{63}{200}$; 3) $3\ln 63$; 4) $\frac{63}{200}$; 5) ∞.
4.	Вычислите: $\int_{0}^{\pi}\cos^6 x dx$	1) $\frac{\pi}{2}$; 2) 0; 3) $25+\pi$; 4) ∞; 5) $\frac{5\pi}{16}$.
5.	Вычислите: $\int_{0}^{1} arctgx dx$	1) 6; 2) $\ln 16-\ln e$; 3) $\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2}-\ln 2)$; 4) $\ln 1$; 5)интеграл не может быть вычислен.
6.	Вычислите: $\int_{-2}^{0}\frac{dx}{x^2+6x+12}$	1) $2+\sqrt{2}$; 2) 36; 3) 1; 4) $1+\ln\frac{2}{3}$; 5) $-\frac{\pi}{9}$.
7.	Вычислите $\int_{0}^{1}\frac{e^{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$	1) e^2; 2) e^3-5; 3) e^2-1; 4) e; 5) 0.
8.	Вычислите площадь сектора ограниченного кривой $r=5\sqrt{\cos 2\varphi}$, $-\frac{\pi}{4}\le\varphi\le\frac{\pi}{4}$.	1) $\frac{\pi}{4}$; 2) $\frac{25}{4}$; 3) $\frac{3\pi}{2}$; 4) 3π; 5) 41.
9.	Вычислите объем полученный вращением вокруг оси OX фигуры $y=\sqrt{1-x^2}$ ограниченной линиями $x\in[0;1]$.	1) $\frac{2\pi}{3}$; 2) π; 3) ∞; 4) $12\pi^3$; 5) $\frac{\pi e}{3}$.
10.	Вычислить длину дуги кривой заданной параметрически $y=\sin t-t\cos t$, $x=\cos t+t\sin t$, $t\in[0;\pi]$	1) $\frac{\pi}{3}$; 2) 2π; 3) $\ln e^{\pi}$; 4) $\frac{\pi^2}{2}$; 5) $\sqrt{2}\pi$.

Тест «Определенный интеграл. Приложение определенного интеграла»

Вариант 26

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Найдите новые пределы интегрирования $\int\limits_1^{e^2} f(x)dx$, подстановка $\ln x = t$.	1) $\int\limits_{-3}^{3}\varphi(t)dt$; 2) $\int\limits_{0}^{\infty}\varphi(t)dt$; 3) $\int\limits_{1}^{2}\varphi(t)dt$; 4) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\varphi(t)dt$; 5) $\int\limits_{0}^{2}\varphi(t)dt$.
2.	Вычислите: $\int\limits_0^2 \frac{dx}{4+x^2}$	1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{1}{2}\pi$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $\frac{1}{2}(\pi-1)$; 5) 4.
3.	Вычислите: $\int\limits_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}dx$	1) e^2; 2) $9-\ln\frac{25}{4}$; 3) 2π; 4) ∞; 5) 3π.
4.	Вычислите: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} tg^3 x dx$	1) $\frac{1}{2}+\ln\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) 0; 3) $25+\sqrt{2}$; 4) $\ln\sin\frac{\pi}{4}$; 5) $\sqrt{2}-1$.
5.	Вычислите: $\int\limits_0^1 x2^{-x}dx$	1) $4\ln 2+10$; 2) $\frac{1}{2\ln^2 2}(1-\ln 2)$; 3) e; 4) $\ln e+1$; 5)интеграл не может быть вычислен.
6.	Вычислите: $\int\limits_0^1 \frac{x^4}{x+1}dx$	1) 3π; 2) $1+\ln e$; 3) $1+e$; 4) $-\frac{7}{12}+\ln 2$; 5) ∞ .
7.	Вычислите $\int\limits_0^1 \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}dx$	1) $\ln(e-1)$; 2) $\frac{1}{2}\ln\frac{e^2+1}{2}$; 3) $\frac{1}{4}\ln\frac{e^2}{2}$; 4) e; 5) $2\ln e^3$.
8.	Вычислите площадь фигуры ограниченную $y^3 = x$, и прямыми $x=0$, $x=8$	1) 10; 2) 9; 3) 12; 4) 32; 5) 2π.
9.	Вычислите объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 2x$ и $x = 4$.	1) $12\pi+2$; 2) ∞, т.к. фигура незамкнутая; 3) 16π; 4) 48; 5) 0.
10.	Вычислить длину дуги кривой $r = e^{\varphi}$, $0 \le \varphi \le 4\pi$.	1) $\sqrt{2}(e^{4\pi}-1)$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}(e^{2\pi}-e)$; 3) $\frac{20}{3}e^{\pi}$; 4) $3\pi-\sqrt{2}\pi$; 5) ∞.

Тест «Определенный интеграл. Приложение определенного интеграла»

Вариант 27

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Верно ли, что $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$	1) верно; 2)не верно; 3) верно, если $f(x)$ четная; 4) верно, если $f(x)$ не четная;5) равенство не имеет смысла.
2.	Вычислите: $\int_{0}^{3}(1+e^{\frac{x}{3}})dx$	1) e; 2) $\ln 2$; 3) $1+3e$;4) $2\ln 2$; 5) $3e$.
3.	Вычислите: $\int_{-1}^{1}\frac{xdx}{\sqrt{5-4x}}$	1) 25; 2) $\frac{1}{6}$; 3) π; 4) $\frac{63}{200}$; 5) ∞.
4.	Вычислите: $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} ctg^3 xdx$	1) 0; 2) $\frac{1}{2}+\ln\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $25+\sqrt{2}$; 4) $\ln\sin\frac{\pi}{4}$; 5) $\sqrt{2}-1$.
5.	Вычислите: $\int_{1}^{3}\frac{\ln x}{x^2}dx$	1) $3\ln e$; 2) ∞; 3) $3+\ln\frac{2}{3}$; 4) $\frac{1}{3}(2-\ln 3)$; 5) интеграл не может быть вычислен.
6.	Вычислите: $\int_{1}^{2}\frac{dx}{x(x+1)^2}$	1) $\ln\frac{4}{3}-\frac{1}{6}$; 2) 0; 3) e; 4) $\frac{1}{6}+\ln 2$; 5) 3 .
7.	Вычислите $\int_{0}^{1}\frac{e^x+e^{-x}}{2}dx$	1) $ch1$; 2) $\frac{1}{2}(1-e^2)$; 3) $\frac{1}{2}(e^1-e^{-1})$;4) e; 5) $\frac{1}{2}$.
8.	Найти площадь фигуры ограниченную линией $r=2\sin 3\varphi$, $0\le\varphi\le\frac{\pi}{3}$	1) $\frac{\pi}{2}$; 2) $\frac{\pi}{3}$; 3) $\frac{\pi}{4}$; 4) 6π; 5) $\frac{\pi}{8}$.
9.	Вычислите объем полученный вращением вокруг оси ОХ фигуры $y=\sqrt{9-x^2}$ ограниченной линиями $x\in[-3;3]$.	1) ∞; 2) π; 3) 29π; 4) 124; 5) 36π.
10.	Вычислить длину дуги кривой $y=\ln(\sin x)$, между прямыми $x=0$ и $x=\frac{\pi}{2}$.	1) $2e$; 2) 0; 3) $\ln 10$; 4)$\frac{1}{2}\ln 3$; 5) $\frac{1}{2}\ln\frac{3}{4}$.

Тест «Определенный интеграл. Приложение определенного интеграла»

Вариант 28

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Верно ли, что $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$	1) верно; 2)не верно; 3) верно, если $f(x)$ четная; 4) верно, если $f(x)$ не четная;5) равенство не имеет смысла.
2.	Вычислите: $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x dx$	1) $\frac{1}{3}$; 2) 1; 3) $\frac{\pi}{3}$;4) 0; 5) ∞.
3.	Вычислите: $\int_{0}^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$	1) $2-\frac{\pi}{2}$; 2) $\frac{1}{6}$; 3) π; 4) $\frac{3\pi}{2}$; 5) ∞.
4.	Вычислите: $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^4 x}$	1) $\frac{3}{2}$; 2) 0; 3) $25\sqrt{2}$;4) $\ln\frac{\pi}{4}$; 5) $-\frac{8\sqrt{3}}{27}$.
5.	Вычислите: $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\cos^2 x} dx$	1) $\pi \ln 16 - 6$; 2) $\frac{\pi\sqrt{3}}{3} - \ln 2$; 3) 4; 4) ∞; 5) интеграл не может быть вычислен.
6.	Вычислите: $\int_{3}^{4} \frac{2x+4}{(x-2)(x+5)} dx$	1) $\sqrt{3}$; 2) $\ln 5$; 3) $\frac{1}{7}(8\ln 2 + 6\ln\frac{9}{8})$; 4) $\frac{1}{7}(\ln\frac{8}{9} - \ln 3)$; 5) π.
7.	Вычислите $\int_{0}^{1} \frac{4-e^x}{e^x} dx$	1) $12\sqrt{2}$; 2) ∞; 3) $16(e^2-1)$; 4) $3-4e^{-1}$; 5) 0.
8.	Вычислите площадь фигуры ограниченную синусоидой $y = \sin x$, $x \in [0;\pi]$	1) $\frac{\pi}{2}$; 2) 3; 3) 4; 4) 3π; 5) 2.
9.	Вычислите объем полученный вращением вокруг оси OX косинусоиды $y = \cos x$, $x \in [0;\pi]$	1)$\frac{\pi^2}{2}$; 2) $\frac{\pi}{6}$; 3)π; 4)$10\pi^3$; 5)$\frac{1}{3}$.
10.	Вычислить длину дуги кривой $r = e^{2\varphi}$, $0 \le \varphi \le 4\pi$.	1) $\frac{\sqrt{5}}{2}(e^{4\pi}-1)$; 2) $\frac{\sqrt{2}\pi}{2}(e^{\pi}-e)$; 3) $\frac{22}{5}e^3$; 4) $\sqrt{2}\pi^2$; 5) ∞.

Тест «Определенный интеграл. Приложение определенного интеграла»

Вариант 29

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Верно ли, что $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = \int\limits_{a}^{-a} f(x)dx$	1) верно; 2)не верно; 3) верно, если $f(x)$ четная; 4) верно, если $f(x)$ не четная;5) равенство не имеет смысла.
2.	Вычислите: $\int\limits_{1}^{2} \frac{x^4+1}{x^2}dx$	1) $\frac{1}{3}$; 2) 1; 3) $\frac{17}{6}$; 4) 0; 5) ∞.
3.	Вычислите: $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^2}{\sqrt{x+1}}dx$	1) $\frac{125}{3}$; 2) $\frac{1}{6}$; 3) π; 4) $\frac{3}{2}$; 5) $\frac{16}{15}$.
4.	Вычислите: $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^4 x}$	1) $2\sqrt{3}$; 2) 4; 3) $25\sqrt{2}$; 4) ∞; 5) $-\frac{8\sqrt{3}}{27}$.
5.	Вычислите: $\int\limits_{0}^{\pi} x\cos x dx$	1) ∞; 2) 4; 3) -2; 4) $\frac{5}{2}$; 5)интеграл не может быть вычислен.
6.	Вычислите: $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2+2x+5}$	1) $\frac{\pi}{8}$; 2) $\frac{\pi}{4}$; 3) $\frac{3\pi}{2}$; 4) $\frac{5\pi}{12}$; 5) π.
7.	Вычислите $\int\limits_{0}^{\pi} e^x \cos x dx$.	1) $12\pi-\sqrt{2}\pi$; 2) e^2-2; 3) 16π; 4) $\frac{1}{2}(-1-e^{\pi})$; 5) $\frac{1}{2}(e^2-e^{\pi})$.
8.	Вычислите площадь сектора ограниченного кривой $r=3\cos 3\varphi$, $-\frac{\pi}{6}\le\varphi\le\frac{\pi}{6}$.	1) $\frac{3\pi}{4}$; 2) $\frac{5\pi}{4}$; 3) $\frac{3\pi}{2}$; 4) 3π; 5) 41.
9.	Вычислите объем полученный вращением вокруг оси Оx фигуры $y=(\ln x)^{\frac{1}{2}}$ ограниченной линиями $x\in[\sqrt[3]{2};\sqrt[3]{4}]$.	1) π; 2) $\pi(2\ln 2-1)$; 3) $\frac{\pi}{2}\ln\frac{2}{3}$; 4) $\frac{\pi}{12}$; 5) $\frac{3\pi}{16}$.
10.	Вычислить длину дуги кривой $y^2=(x+1)^3$, между прямыми $x=\frac{1}{3}$ и $x=\frac{12}{9}$.	1) $\frac{20}{3}$; 2) $3\sqrt{2}$; 3) $\frac{1}{26}$; 4) $3+2\sqrt{2}$; 5) $\frac{61}{27}$.

Тест «Определенный интеграл. Приложение определенного интеграла»

Вариант 30

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Верно ли, что $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = -\int\limits_{a}^{-a} f(x)dx$	1) верно; 2)не верно; 3) верно, если $f(x)$ четная; 4) верно, если $f(x)$ не четная;5) равенство не имеет смысла.
2.	Вычислите: $\int\limits_{4}^{9} \frac{dx}{\sqrt{x}}$	1) $\frac{1}{3}$; 2) 10; 3) $\frac{17}{6}$;4) 2; 5) ∞.
3.	Вычислите: $\int\limits_{0}^{1} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$	1) $2+\frac{3}{2}$; 2) $\sqrt{2}-1$; 3) $\frac{96}{35}$; 4) $\frac{3}{2}$; 5) $2+\sqrt{2}$.
4.	Вычислите: $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^8 x}$	1) $\frac{3}{2}$; 2) 0; 3) $\frac{96}{35}$;4) $\ln\sin\frac{\pi}{4}$; 5) $\sqrt{2}-1$.
5.	Вычислите: $\int\limits_{0}^{1} \arcsin x dx$	1) $\frac{\pi}{2}-1$; 2) ∞; 3) π; 4) 4; 5) $3\pi-2$.
6.	Вычислите: $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{x^2+2x}$	1) $10+\sqrt{2}$; 2) $4\ln 2$; 3) $\frac{5}{2}$; 4) ∞; 5) $\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$.
7.	Вычислите $\int\limits_{0}^{\pi} \cos^5 x \sin x dx$	1) $12\pi+2$; 2) 0; 3) 16π;4) 4; 5) 3.
8.	Вычислите площадь фигуры ограниченную спиралью Архимеда $r=3\varphi$, $0<\varphi<2\pi$.	1) 4; 2) 13π; 3) π; 4) $12\pi^3$; 5) $\frac{1}{3}$.
9.	Вычислите объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$, $x\in[1;8]$.	1) $12\pi+2$; 2) ∞, т.к. фигура незамкнутая; 3) 3π;4) 22; 5) 5π.
10.	Вычислить длину дуги кривой $y=t^3$, $x=t^2$, $t\in[0,1]$.	1) $\frac{20}{27}(4-2^{\frac{2}{3}})$; 2) $\frac{1}{27}(13^{\frac{3}{2}}-8)$; 3) интеграл не может быть вычислен; 4) $\frac{20}{27}(4-2^{\frac{2}{3}})$; 5) ∞.

Тест «Определенный интеграл. Приложение определенного интеграла»
Ответы

Вариант	Задания									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	4	2	5	1	4	2	5	4	4
2	4	2	1	3	1	5	2	4	3	1
3	3	4	2	5	1	1	3	3	4	2
4	2	5	3	1	2	4	1	4	4	5
5	1	1	2	5	3	5	3	2	1	4
6	5	3	3	1	2	4	2	3	3	1
7	1	5	2	2	4	1	3	2	5	4
8	4	4	1	5	2	3	4	5	1	1
9	2	3	5	1	3	1	4	1	2	5
10	1	4	2	3	1	5	2	4	3	2
11	2	4	2	5	1	4	2	5	4	4
12	4	2	1	3	1	5	2	4	3	1
13	3	4	2	5	1	1	3	3	4	2
14	2	5	3	1	2	4	1	4	4	5
15	1	1	2	5	3	5	3	2	1	4
16	5	3	3	1	2	4	2	3	3	1
17	3	5	2	2	4	1	3	2	5	4
18	4	4	1	5	2	3	4	5	1	1
19	2	3	5	1	3	1	4	1	2	5
20	1	4	2	3	1	5	2	4	3	2
21	2	4	2	5	1	4	2	5	4	4
22	4	2	1	3	1	5	2	4	3	1
23	3	4	2	5	1	1	3	3	4	2
24	2	5	3	1	2	4	1	4	4	5
25	1	1	2	5	3	5	3	2	1	4
26	5	3	3	1	2	4	2	3	3	1
27	3	5	2	2	4	1	3	2	5	4
28	4	4	1	5	2	3	4	5	1	1
29	2	3	5	1	3	1	4	1	2	5
30	1	4	2	3	1	5	2	4	3	2

ТЕСТ «КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ»

Вариант 1

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Вычислить интеграл: $\int_0^1 dx \int_0^2 (x+y)dy$.	1) 2; 2) 3; 3) -2; 4) -3; 5) 4.
2.	Изменить порядок интегрирования: $\int_0^2 dy \int_{y/2}^{y} f(x,y)dx + \int_2^4 dy \int_{y/2}^{2} f(x,y)dx$.	
3.	Вычислить интеграл из задания 2, если $f(x,y)=1-y$.	1) -2; 2) -1; 3) -3; 4) 2; 5) $-\frac{2}{3}$.
4.	Вычислить интеграл $\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ область D ограниченна линиями: $x^2+y^2=9,\ x=0,\ x>0$.	1) $\frac{3}{2}\pi$; 2) $\frac{2}{3}\pi$; 3) 3π ;4) -3π ; 5) 3,6.
5.	Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=x^2,\ y=1$.	1) $\frac{3}{4}$; 2) $\frac{2}{3}$; 3) $-\frac{2}{3}$; 4) $\frac{4}{3}$; 5) $\frac{5}{2}$.
6.	Вычислить интеграл $\int_0^1 dx \int_0^2 dy \int_0^3 xydz$.	1) $\frac{3}{4}$; 2) $-\frac{3}{4}$; 3) $\frac{3}{2}$; 4) -3; 5) 3.
7.	Вычислить интеграл $\iiint_V (x+y+z)dxdydz$, если область V ограничена поверхностями: $x+y+z=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0$.	1) $-\frac{1}{8}$; 2) $\frac{1}{8}$; 3) $\frac{1}{4}$; 4) $-\frac{1}{4}$; 5) $\frac{3}{8}$.
8.	Вычислить интеграл $\iiint_V (x+y)dxdydz$, если область V ограничена поверхностями: $x=\sqrt{4-y^2},\ z=0,\ \ z=5$.	1) $\frac{40}{3}$; 2) $-\frac{40}{3}$; 3) $\frac{80}{3}$; 4) $\frac{3}{80}$; 5) $\frac{3}{40}$.
9.	Вычислить интеграл $\iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$, если область V ограничена поверхностями: $z=\sqrt{4-x^2-y^2},\ z=0$.	1) $\frac{2}{3}\pi$; 2) 4π ; 3) $\frac{3}{2}\pi$; 4) 8π ; 5) -4π .
10.	Найти массу тела, ограниченного поверхностями $z=\sqrt{25-x^2-y^2},\ z=\sqrt{16-x^2-y^2},\ x\ge 0,\ y\ge 0$, если плотность $\gamma(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.	1) $\frac{4}{9}\pi$; 2) $-\frac{4}{9}\pi$; 3) 9π ; 4) 4π ; 5) $\frac{9}{4}\pi$.

Тест «Кратные интегралы»

Вариант 2

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Вычислить интеграл: $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-3}^{0} (3-y)dy$.	1) 27; 2) $\frac{27}{2}$; 3) 9; 4) -9; 5) 6.
2.	Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{x/2}^{x} f(x,y)dy + \int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{x/2}^{1} f(x,y)dy$.	
3.	Вычислить интеграл из задания 2, если $f(x,y) = x + y$.	1) $\frac{6}{5}$; 2) -$\frac{6}{5}$; 3) $\frac{5}{6}$; 4)-$\frac{5}{6}$; 5) $\frac{3}{2}$.
4.	Вычислить интеграл $\iint\limits_{D} \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$ область D ограниченна линиями: $x^2+y^2=4$.	1) $\frac{3}{2}\pi$; 2) $\frac{16}{3}\pi$; 3) 2π; 4) $-\frac{2}{3}\pi$; 5) $-\frac{16}{3}\pi$.
5.	Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y+x=2,\ y=0,\ x=0$.	1) $\frac{3}{2}$; 2) $\frac{2}{3}$; 3) -2; 4) 2; 5) 4.
6.	Вычислить интеграл $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{0}^{4} dy \int\limits_{0}^{3} z^2 dz$.	1) 27; 2) 47; 3) 72; 4) 74; 5) 57.
7.	Вычислить интеграл $\iiint\limits_{V} (x+y)dxdydz$, если область V ограничена поверхностями: $x+y=1,\ x=0,\ y=0, z=2,\ z=0$.	1) $\frac{2}{3}$; 2) $\frac{3}{2}$; 3) $-\frac{2}{3}$; 4) $\frac{4}{3}$; 5) $\frac{5}{2}$.
8.	Вычислить интеграл $\iiint\limits_{V} zdxdydz$, если область V ограничена поверхностями: $x^2+y^2=1,\ z=0,\ \ z=2$.	1) 3π; 2) -3π; 3) $\frac{3}{2}\pi$; 4) $\frac{2}{3}\pi$; 5) 2π.
9.	Вычислить интеграл $\iiint\limits_{V} \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, если область V ограничена поверхностями: $z=-\sqrt{9-x^2-y^2},\ z=0$.	1) $\frac{9}{2}\pi$; 2) 9π; 3) 2π; 4) $\frac{2}{5}\pi$; 5) $\frac{2}{9}\pi$.
10.	Найти массу тела, ограниченного поверхностями $x+y+z=2,\ x=0,\ y=0,\ z=0$, если плотность $\gamma(x,y,z)=x+y$.	1) $-\frac{3}{4}$; 2) $\frac{3}{4}$; 3) $\frac{2}{3}$; 4) $\frac{4}{3}$; 5) $\frac{20}{3}$.

Тест «Кратные интегралы»

Вариант 3

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Вычислить интеграл: $\int\limits_2^4 dy \int\limits_0^3 (x-5)dx$.	1) 22; 2) 21; 3) -21; 4) $\frac{22}{5}$; 5) $\frac{6}{7}$.
2.	Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_0^{1/2} dy \int\limits_{y/2}^{2y} f(x,y)dx + \int\limits_{1/2}^{2} dy \int\limits_{y/2}^{1} f(x,y)dx$.	
3.	Вычислить интеграл из задания 2, если $f(x,y)=1-x$.	1) 4; 2) $\frac{1}{4}$; 3) –4; 4) $\frac{3}{4}$; 5) $\frac{6}{5}$.
4.	Вычислить интеграл $\iint\limits_D \frac{dxdy}{x^2+y^2}$ область D ограничена линиями: $x^2+y^2=4,\ x^2+y^2=16$.	1) $2\pi\ln 2$; 2) $\ln 4$; 3) 4π ; 4) $8\pi\ln 2$; 5) $-4\ln 2$.
5.	Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=x,\ y=2x,\ x=1$.	1) 1; 2) –1; 3) $\frac{3}{2}$; 4) $\frac{2}{3}$; 5) $\frac{1}{2}$.
6.	Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^3 dy \int\limits_0^3 yzdz$.	1) $\frac{45}{2}$; 2) $\frac{51}{2}$; 3) 40; 4) $\frac{81}{4}$; 5) $\frac{91}{2}$.
7.	Вычислить интеграл $\iiint\limits_V (x+z+1)dxdydz$, если область V ограничена поверхностями: $x+z=2,\ x=0,\ y=-2,\ y=2,\ z=0$.	1) $\frac{65}{3}$; 2) $\frac{44}{3}$; 3) $\frac{56}{3}$; 4) $\frac{65}{2}$; 5) $\frac{43}{2}$.
8.	Вычислить интеграл $\iiint\limits_V z^2 dxdydz$, если область V ограничена поверхностями: $x^2+z^2=4,\ y=0,\ \ y=1$.	1) 4π; 2) 2π; 3) -2π; 4) 3π; 5) 5π.
9.	Вычислить интеграл $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}}$, если область V ограничена поверхностями: $z=\sqrt{25-x^2-y^2}, z=\sqrt{9-x^2-y^2},\ \ z=0,\ x\ge 0,\ y\ge 0$.	1) $\pi\ln\frac{5}{3}$; 2) $\ln\frac{3}{5}$; 3) $\frac{\pi}{2}\ln\frac{3}{5}$; 4) $\ln\frac{5}{3}$; 5) $\frac{\pi}{2}\ln\frac{5}{3}$.
10.	Найти объем тела, ограниченного поверхностями $x+y+z=3,\ x=0,\ y=0,\ z=0$.	1) $\frac{2}{9}$; 2) $\frac{9}{2}$; 3) $-\frac{9}{2}$; 4) 9; 5) 2.

Тест «Кратные интегралы»

Вариант 4

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Вычислить интеграл: $\int\limits_1^2 dx \int\limits_1^2 (x-y)dy$.	1) 1; 2) –1; 3) 2; 4) –2; 5) 0.
2.	Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x f(x,y)dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{2-x} f(x,y)dy$.	
3.	Вычислить интеграл из задания 2, если $f(x,y) = x - y$.	1) $\frac{3}{2}$; 2) $-\frac{3}{2}$; 3) $-\frac{2}{3}$; 4) $\frac{2}{3}$; 5) $\frac{4}{3}$.
4.	Вычислить интеграл $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$ область D ограниченна линиями: $x^2+y^2=9,\ y=0,\ y>0$.	1) 2π; 2) 3; 3) 3π; 4) -3π; 5) 2.
5.	Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y+x=3,\ y=0,\ x=0$.	1) $\frac{9}{2}$; 2) $\frac{3}{2}$; 3) $\frac{2}{3}$; 4) $\frac{5}{2}$; 5) $\frac{2}{9}$.
6.	Вычислить интеграл $\int\limits_0^5 dx \int\limits_0^6 dy \int\limits_0^1 z^3 dz$.	1) $\frac{5}{2}$; 2) $\frac{15}{2}$; 3) $-\frac{5}{2}$; 4) $\frac{3}{2}$; 5) 15.
7.	Вычислить интеграл $\iiint\limits_V (y+z+2)dxdydz$, если область V ограничена поверхностями: $y+z=3,\ x=-1,\ x=1,\ y=0,\ z=0$.	1) $\frac{9}{4}$; 2) 9; 3) 37; 4) 36; 5) 42.
8.	Вычислить интеграл $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$, если область V ограничена поверхностями: $x^2+y^2=9,\ z=-2,\ z=2$.	1) 36π; 2) 72π; 3) 72; 4) 36; 5) 48π.
9.	Вычислить интеграл $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{\sqrt{1-\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}}$, если область V ограничена поверхностями: $z=\sqrt{1-x^2-y^2},\ z=0$.	1) $\frac{2}{3}\pi$; 2) $\frac{3}{2}\pi$; 3) $\frac{4}{3}\pi$; 4) $\frac{5}{2}$; 5) $\frac{4}{3}$.
10.	Найти массу тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2=4,\ x^2+y^2=16,\ z=4,\ z=0$, если плотность $\gamma(x,y,z)=x^2$.	1) 2π; 2) 300π; 3) 24π; 4) 200π; 5) 240π.

Тест «Кратные интегралы»

Вариант 5

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Вычислить интеграл: $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-2}^{2} (x+1)dy$.	1) $\frac{6}{5}$; 2) $\frac{5}{6}$; 3) 5; 4) 6; 5) 3.
2.	Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_0^2 dy \int\limits_0^{y/2} f(x,y)dx + \int\limits_2^3 dy \int\limits_0^{3-y} f(x,y)dx$.	
3.	Вычислить интеграл из задания 2, если $f(x,y) = 1+y$.	1) $\frac{4}{3}$; 2) $\frac{25}{3}$; 3) $\frac{3}{4}$; 4) 3; 5) 4.
4.	Вычислить интеграл $\iint\limits_D \sqrt{25-x^2-y^2}\,dxdy$ область D ограниченна линиями: $x^2+y^2=16,\ x=0,\ x<0$.	1) $\frac{98}{3}\pi$; 2) $\frac{3}{98}\pi$; 3) 3π ; 4) 98π; 5) 48π.
5.	Вычислить массу пластинки, ограниченной линиями: $x=a,\ x=b,\ y=c,\ y=d$, если поверхностная плотность $\gamma(x,y)=y$.	1) $(b-a)\frac{(d-c)^2}{2}$; 2) $(b-a)\frac{d^2-c^2}{2}$; 3) $(b^2-a^2)\frac{d^2-c^2}{2}$; 4) $(b-a)\frac{d-c}{2}$; 5) $(b^2-a^2)\frac{d-c}{2}$.
6.	Вычислить интеграл $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^2 dy \int\limits_0^2 xyzdz$.	1) 16; 2) 4; 3) 8; 4) 9; 5) 27.
7.	Вычислить интеграл $\iiint\limits_V (x-y+1)dxdydz$, если область V ограничена поверхностями: $x-y=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0,\ z=1$.	1) $\frac{5}{6}$; 2) $-\frac{6}{5}$; 3) $\frac{6}{5}$; 4) 6; 5) $-\frac{5}{6}$.
8.	Вычислить интеграл $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$, если область V ограничена поверхностями: $x^2+y^2=4,\ z=-1,\ z=1$.	1) 4π; 2) 12π; 3) $4\sqrt{3}\pi$; 4) $4\pi(3-\sqrt{5})$; 5) $4\pi(\sqrt{3}-5)$.
9.	Вычислить интеграл $\iiint\limits_V \sqrt{1-\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}\,dxdydz$, если область V ограничена поверхностью: $x^2+y^2+z^2=1$.	1) $\frac{8}{9}\pi$; 2) $\frac{9}{8}\pi$; 3) 9π; 4) $\frac{4}{9}\pi$; 5) 8π.
10.	Найти объем тела, ограниченного поверхностями: $x^2+y^2=z,\ x^2+y^2=1,\ z=0$.	1) $\frac{\pi}{3}$; 2) $\frac{4}{3}\pi$; 3) $\frac{\pi}{2}$; 4) $\frac{5\pi}{3}$; 5) $\frac{3\pi}{2}$.

Тест «Кратные интегралы»

Вариант 6

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Вычислить интеграл: $\int\limits_{-1}^{1} dy \int\limits_{-1}^{1} (x^2+y^2)dx$.	1) $\frac{8}{3}$; 2) $-\frac{8}{3}$; 3) $\frac{9}{2}$; 4) $\frac{4}{3}$; 5) $\frac{3}{2}$.
2.	Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_{-2}^{-1} dx \int\limits_{0}^{2+x} f(x,y)dy + \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{0}^{-x} f(x,y)dy$.	
3.	Вычислить интеграл из задания 2, если $f(x,y)=1+x$.	1) 1; 2) –1; 3) 0; 4) 2; 5) –2.
4.	Вычислить интеграл $\iint\limits_{D} \frac{dxdy}{\sqrt{25-x^2-y^2}}$ область D ограниченна кривыми: $x^2+y^2=16,\ x^2+y^2=9$.	1) -2π; 2) 3π; 3) $\frac{3\pi}{2}$; 4) 2π; 5) $\frac{2\pi}{3}$.
5.	Вычислить массу пластинки, ограниченной кривой $x^2+y^2=9$, если поверхностная плотность $\gamma(x,y)=x^2$.	1) $81\frac{\pi}{2}$; 2) $\frac{41\pi}{2}$; 3) $81\frac{\pi}{4}$; 4) $\frac{41\pi}{4}$; 5) $\frac{51\pi}{4}$.
6.	Вычислить интеграл $\int\limits_{0}^{3} dx \int\limits_{0}^{4} dy \int\limits_{0}^{2} xzdz$.	1) 36; 2) 72; 3) 54; 4) 38; 5) 64.
7.	Вычислить интеграл $\iiint\limits_{V} (1-x-y)dxdydz$, если область V ограничена поверхностями: $x+y=2,\ x=0,\ y=0,\ z=-3,\ z=3$.	1) 4; 2) –4; 3) –2; 4) 2; 5) –6.
8.	Вычислить интеграл $\iiint\limits_{V} \frac{dxdydz}{\sqrt{4+x^2+y^2}}$, если область V ограничена поверхностями: $x^2+y^2=5,\ z=-4,\ z=4$.	1) 8π; 2) 6π; 3) 12π; 4) 18π; 5) 16π.
9.	Вычислить интеграл $\iiint\limits_{V} \sqrt{9+\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}\,dxdydz$, если область V ограничена поверхностью: $x^2+y^2+z^2=4$.	1) $\frac{4}{9}\pi$; 2) $\frac{9}{4}\pi(27^{3/2}-17)$; 3) $\frac{9\pi}{4}\left(\sqrt{17}-27\right)$; 4) $\frac{4}{9}\pi(17^{3/2}-27)$; 5) $\frac{17\pi}{4}$.
10.	Найти объем тела, ограниченного поверхностями: $x^2+y^2+z^2=4,\ x^2=y^2+z^2$ (внутри конуса).	1) $\frac{8\pi}{3}(2-\sqrt{2})$; 2) $\frac{16\pi}{3}(2-\sqrt{2})$; 3) $\frac{8\pi}{3}(3-\sqrt{3})$; 4) $\frac{16\pi}{3}(\sqrt{2}-2)$; 5) $8\pi(3-\sqrt{3})$.

Тест «Кратные интегралы»

Вариант 7

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Вычислить интеграл: $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^2 xydy$.	1) –1; 2) 3; 3) 1; 4) 0; 5) 2.
2.	Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-2y}^{-y} f(x,y)dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_{-2}^{-y} f(x,y)dx$.	
3.	Вычислить интеграл из задания 2, если $f(x,y) = 1 - y$.	1) 0; 2) 1; 3) –1; 4) 2; 5) –2.
4.	Вычислить интеграл $\iint\limits_D (4 - x^2 - y^2)dxdy$ область D ограниченна линиями: $x^2 + y^2 = 4,\ y = 0, y > 0$.	1) 2π; 2) 4π; 3) -2π; 4) -4π; 5) 3π.
5.	Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми: $x^2 + y^2 = 9,\ x^2 + y^2 = 16$.	1) 5π; 2) 4π; 3) 6π; 4) 3π; 5) 7π.
6.	Вычислить интеграл $\int\limits_0^3 dx \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^2 y^2 zdz$.	1) –2; 2) 0; 3) 1; 4) 2; 5) 3.
7.	Вычислить интеграл $\iiint\limits_V (x - y + z)dxdydz$, если область V ограничена поверхностями: $x - y + z = 1,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$.	1) $-\frac{1}{8}$; 2) $\frac{1}{8}$; 3) $-\frac{1}{4}$; 4) $\frac{1}{4}$; 5) $\frac{1}{16}$.
8.	Вычислить интеграл $\iiint\limits_V (x^2 - y^2)dxdydz$, если область V ограничена поверхностями: $x^2 + y^2 = 4,\ x = y,\ y = 0,\ z = 0,\ z = 5$.	1) 20π; 2) 20; 3) 40; 4) 40π; 5) 60.
9.	Вычислить интеграл $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{1 + \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2}}$, если область V ограничена поверхностью: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.	1) $\frac{4}{3}\pi$; 2) $\frac{3}{4}\ln 2$; 3) $\frac{4\pi}{3}\ln 2$; 4) $\frac{16}{3}\pi \ln 2$; 5) $\frac{16}{3}\ln 2$.
10.	Найти массу тела, ограниченного поверхностями $4 - z = x^2 + y^2,\ z = 0$, если плотность $\gamma(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2}$.	1) $\frac{64\pi}{5}$; 2) $\frac{64\pi}{15}$; 3) $\frac{128\pi}{5}$; 4) $\frac{128\pi}{15}$; 5) $\frac{72\pi}{15}$.

Тест «Кратные интегралы»

Вариант 8

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Вычислить интеграл: $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{-3}^0 xy^2 dy$.	1) $\frac{17}{5}$; 2) 18; 3) $\frac{5}{2}$; 4) 12; 5) 17.
2.	Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_0^{2/3} dx \int\limits_0^{2x} f(x,y)dy + \int\limits_{2/3}^{2} dx \int\limits_0^{2-x} f(x,y)dy$.	
3.	Вычислить интеграл из задания 2, если $f(x,y) = 1 - x$.	1) 4; 2) $\frac{2}{27}$; 3) 27; 4) $\frac{4}{27}$; 5) $\frac{2}{57}$.
4.	Вычислить интеграл $\iint\limits_D \frac{dxdy}{25 - x^2 - y^2}$ область D ограниченна кривыми: $x^2 + y^2 = 1,\ x^2 + y^2 = 9$.	1) $\ln 2$; 2) $\pi \ln 2$; 3) $\ln\frac{3}{2}$; 4) $\pi \ln\frac{2}{3}$; 5) $\pi \ln\frac{3}{2}$.
5.	Вычислить массу пластинки, ограниченной линиями: $x - y = 2,\ x = 0,\ y = 0$, если поверхностная плотность $\gamma(x,y) = xy$.	1) $\frac{2}{3}$; 2) 3; 3) 2; 4) $\frac{3}{2}$; 5) 5.
6.	Вычислить интеграл $\int\limits_0^3 dx \int\limits_0^2 dy \int\limits_0^6 y^3 dz$.	1) 36; 2) 54; 3) 72; 4) 64; 5) 32.
7.	Вычислить интеграл $\iiint\limits_V (x - y - z)dxdydz$, если область V ограничена поверхностями: $x - y - z = 2,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$.	1) $\frac{2}{3}$; 2) $\frac{3}{2}$; 3) 2; 4) 3; 5) 4.
8.	Вычислить интеграл $\iiint\limits_V \sqrt{9 - x^2 - y^2}\,dxdydz$, если область V ограничена поверхностями: $x^2 + y^2 = 4,\ z = 0,\ z = 2$.	1) $\frac{2\pi}{3}(27 - \sqrt{5})$; 2) $\frac{2\pi}{3}$; 3) $\frac{4\pi}{3}(\sqrt{5} - 9)$; 4) $\frac{4\pi}{3}(27 - 5^{3/2})$; 5) $\frac{5\pi}{6}(27 - \sqrt{7})$.
9.	Вычислить интеграл $\iiint\limits_V \left(1 + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)dxdydz$, если область V ограничена поверхностями: $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2},\ z = 0,\ x \ge 0,\ y \ge 0$.	1) $\frac{10}{3}$; 2) $\frac{9}{2}\pi$; 3) $\frac{2\pi}{3}$; 4) $\frac{3}{2}$; 5) $\frac{10}{3}\pi$.
10.	Найти объем тела, ограниченного поверхностями: $x^2 + y^2 + z^2 = 16,\ x^2 + y^2 = 4$ (внутри цилиндра).	1) $\frac{32\pi}{3}(8 - 3\sqrt{3})$; 2) $\frac{52\pi}{3}$; 3) $\frac{16\pi}{3}(8 - 3^{3/2})$; 4) $\frac{26\pi}{3}$; 5) $\frac{8}{3}(3^{3/2} - 8)$.

Тест «Кратные интегралы»

Вариант 9

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Вычислить интеграл: $\int\limits_2^3 dy \int\limits_3^4 (x-y)dx$.	1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{3}{2}$; 3) 2; 4) 1; 5) 0.
2.	Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_0^{1/2} dy \int\limits_{-y}^{0} f(x,y)dx + \int\limits_{1/2}^{1} dy \int\limits_{y-1}^{0} f(x,y)dx$.	
3.	Вычислить интеграл из задания 2, если $f(x,y) = y-1$.	1) $\frac{1}{3}$; 2) $-\frac{1}{6}$; 3) $-\frac{1}{3}$; 4) $\frac{2}{3}$; 5) $\frac{1}{6}$.
4.	Вычислить интеграл $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2-9}}$ область D ограниченна кривыми: $x=\sqrt{16-y^2}$, $x=\sqrt{25-y^2}$.	1) $2\pi(\sqrt{7}-8)$; 2) 16π; 3) $\pi(8-\sqrt{7})$; 4) $2\sqrt{7}\pi$; 5) $\pi(4-\sqrt{7})$.
5.	Вычислить массу пластинки, ограниченной кривыми: $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=4$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, если поверхностная плотность $\gamma(x,y)=x$.	1) $\frac{4}{3}$; 2) $\frac{3}{4}$; 3) $\frac{7}{3}$; 4) $\frac{2}{3}$; 5) $\frac{7}{4}$.
6.	Вычислить интеграл $\int\limits_0^3 dx \int\limits_0^3 dy \int\limits_0^3 x^2y^2dz$.	1) 243; 2) 443; 3) 125; 4) 349; 5) 228.
7.	Вычислить интеграл $\iiint\limits_V (x+y-z)dxdydz$, если область V ограничена поверхностями: $x+y-z=3$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.	1) $\frac{41}{8}$; 2) $-\frac{41}{8}$; 3) $\frac{21}{4}$; 4) $-\frac{81}{8}$; 5) $\frac{81}{8}$.
8.	Вычислить интеграл $\iiint\limits_V (x-y)dxdydz$, если область V ограничена поверхностями: $y=\sqrt{16-x^2}$, $y=0$, $z=-2$, $z=2$.	1) $\frac{512}{3}$; 2) $-\frac{256}{3}$; 3) $-\frac{512}{3}$; 4) $\frac{256}{3}$; 5) $\frac{624}{5}$.
9.	Вычислить интеграл $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{x^2+y^2+z^2}$, если область V ограничена поверхностями: $x^2+y^2+z^2=4$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$.	1) 2π; 2) π; 3) $\frac{3\pi}{2}$; 4) $\frac{2}{3}\pi$; 5) 0.
10.	Найти объем тела, ограниченного поверхностями: $x^2+y^2=z$, $z=4$.	1) 2π; 2) 4π; 3) 6π; 4) 7π; 5) 8π.

Тест «Кратные интегралы»

Вариант 10

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Вычислить интеграл: $\int\limits_{-2}^{1} dx \int\limits_{2}^{3} (x+y-1)dy$.	1) 0; 2) 1; 3) 5; 4) 2; 5) 3.
2.	Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_{0}^{2} dy \int\limits_{y/3}^{y/2} f(x,y)dx + \int\limits_{2}^{3} dy \int\limits_{y/3}^{1} f(x,y)dx$.	
3.	Вычислить интеграл из задания 2, если $f(x,y) = y+2$.	1) $\frac{11}{6}$; 2) $\frac{11}{3}$; 3) $\frac{6}{11}$; 4) $\frac{5}{6}$; 5) $\frac{7}{5}$.
4.	Вычислить интеграл $\iint\limits_{D} \sqrt{x^2+y^2-4}dxdy$ область D ограниченна кривыми: $x^2+y^2=16,\ x^2+y^2=9,\ y \ge 0$.	1) $4\sqrt{12}\pi$; 2) $\pi\left(12^{3/2}-5^{3/2}\right)$; 3) $\frac{\pi}{3}\left(\sqrt{5}-\sqrt{12}\right)$; 4) $\frac{\pi}{3}\left(12^{3/2}-5^{3/2}\right)$; 5) $4\sqrt{5}\pi$.
5.	Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=x^2,\ x=1,\ y=0$.	1) $\frac{2}{3}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) $\frac{3}{2}$; 4) $\frac{1}{2}$; 5) $\frac{1}{6}$.
6.	Вычислить интеграл $\int\limits_{0}^{9} dx \int\limits_{0}^{2} dy \int\limits_{0}^{1} xyzdz$.	1) $\frac{41}{2}$; 2) $\frac{51}{2}$; 3) $\frac{91}{3}$; 4) $\frac{61}{2}$; 5) $\frac{81}{2}$.
7.	Вычислить интеграл $\iiint\limits_{V} (y-x-z)dxdydz$, если область V ограничена поверхностями: $y-z-x=4,\ x=0,\ y=0,\ z=0$.	1) $\frac{416}{3}$; 2) $\frac{314}{3}$; 3) $-\frac{416}{3}$; 4) $-\frac{314}{3}$; 5) $\frac{214}{3}$.
8.	Вычислить интеграл $\iiint\limits_{V} (z+x)dxdydz$, если область V ограничена поверхностями: $x=\sqrt{4-z^2},\ y=3,\ y=0$.	1) 16; 2) 8; 3) –8; 4) 32; 5) –16.
9.	Вычислить интеграл $\iiint\limits_{V} \left(4+x^2+y^2+z^2\right)dxdydz$, если область V ограничена поверхностями: $z=\sqrt{4-x^2-y^2},\ z=0$.	1) $\frac{256}{15}\pi$; 2) $\frac{256\pi}{5}$; 3) $\frac{512\pi}{3}$; 4) $\frac{512}{15}\pi$; 5) $\frac{482}{5}\pi$.
10.	Найти объем тела, ограниченного поверхностями: $x^2+y^2+z^2=2,\ x^2+y^2=z$ (внутри параболоида).	1) $\frac{\pi}{3}(4\sqrt{2}-7)$; 2) $\frac{4\sqrt{2}\pi}{3}$; 3) $\frac{\pi}{6}(8\sqrt{2}-7)$; 4) $\frac{\pi}{6}(7-4\sqrt{2})$; 5) $\frac{\pi}{3}(4\sqrt{2}-5)$.

Тест «Кратные интегралы»

Вариант 11

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Вычислить интеграл: $\int_0^1 dx\int_0^2 (x+y)dy$.	1) 2; 2) 3; 3) -2; 4) -3; 5) 4.
2.	Изменить порядок интегрирования: $\int_0^2 dy\int_{y/2}^{y} f(x,y)dx+\int_2^4 dy\int_{y/2}^{2} f(x,y)dx$.	
3.	Вычислить интеграл из задания 2, если $f(x,y)=1-y$.	1) -2; 2) -1; 3) -3; 4) 2; 5) $-\frac{2}{3}$.
4.	Вычислить интеграл $\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ область D ограничена линиями: $x^2+y^2=9,\ x=0,\ x>0$.	1) $\frac{3}{2}\pi$; 2) $\frac{2}{3}\pi$; 3) 3π ;4) -3π; 5) 3,6.
5.	Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=x^2,\ y=1$.	1) $\frac{3}{4}$; 2) $\frac{2}{3}$; 3) -$\frac{2}{3}$; 4) $\frac{4}{3}$; 5) $\frac{5}{2}$.
6.	Вычислить интеграл $\int_0^1 dx\int_0^2 dy\int_0^3 xydz$.	1) $\frac{3}{4}$; 2) -$\frac{3}{4}$; 3) $\frac{3}{2}$; 4) -3; 5) 3.
7.	Вычислить интеграл $\iiint_V (x+y+z)dxdydz$, если область V ограничена поверхностями: $x+y+z=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0$.	1) $-\frac{1}{8}$; 2) $\frac{1}{8}$; 3) $\frac{1}{4}$; 4) $-\frac{1}{4}$; 5) $\frac{3}{8}$.
8.	Вычислить интеграл $\iiint_V (x+y)dxdydz$, если область V ограничена поверхностями: $x=\sqrt{4-y^2},\ z=0,\ \ z=5$.	1) $\frac{40}{3}$; 2) $-\frac{40}{3}$; 3) $\frac{80}{3}$; 4) $\frac{3}{80}$; 5) $\frac{3}{40}$.
9.	Вычислить интеграл $\iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$, если область V ограничена поверхностями: $z=\sqrt{4-x^2-y^2},\ z=0$.	1) $\frac{2}{3}\pi$; 2) 4π; 3) $\frac{3}{2}\pi$; 4) 8π; 5) -4π.
10.	Найти массу тела, ограниченного поверхностями $z=\sqrt{25-x^2-y^2},\ z=\sqrt{16-x^2-y^2},\ x\ge 0,\ y\ge 0$, если плотность $\gamma(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.	1) $\frac{4}{9}\pi$; 2) $-\frac{4}{9}\pi$; 3) 9π; 4) 4π; 5) $\frac{9}{4}\pi$.

Тест «Кратные интегралы»

Вариант 12

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Вычислить интеграл: $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-3}^{0} (3-y)dy$.	1) 27; 2) $\frac{27}{2}$; 3) 9; 4) -9; 5) 6.
2.	Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{x/2}^{x} f(x,y)dy + \int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{x/2}^{1} f(x,y)dy$.	
3.	Вычислить интеграл из задания 2, если $f(x,y) = x + y$.	1) $\frac{6}{5}$; 2) -$\frac{6}{5}$; 3) $\frac{5}{6}$; 4)-$\frac{5}{6}$; 5) $\frac{3}{2}$.
4.	Вычислить интеграл $\iint\limits_{D} \sqrt{x^2+y^2}dxdy$ область D ограниченна линиями: $x^2+y^2=4$.	1) $\frac{3}{2}\pi$; 2) $\frac{16}{3}\pi$; 3) 2π ;4) $-\frac{2}{3}\pi$; 5) $-\frac{16}{3}\pi$.
5.	Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y+x=2,\ y=0,\ x=0$.	1) $\frac{3}{2}$; 2) $\frac{2}{3}$; 3) -2; 4) 2; 5) 4.
6.	Вычислить интеграл $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{0}^{4} dy \int\limits_{0}^{3} z^2 dz$.	1) 27; 2) 47; 3) 72; 4) 74; 5) 57.
7.	Вычислить интеграл $\iiint\limits_{V} (x+y)dxdydz$, если область V ограничена поверхностями: $x+y=1,\ x=0,\ y=0, z=2,\ z=0$.	1) $\frac{2}{3}$; 2) $\frac{3}{2}$; 3) $-\frac{2}{3}$; 4) $\frac{4}{3}$; 5) $\frac{5}{2}$.
8.	Вычислить интеграл $\iiint\limits_{V} zdxdydz$, если область V ограничена поверхностями: $x^2+y^2=1,\ z=0,\ \ z=2$.	1) 3π; 2) -3π; 3) $\frac{3}{2}\pi$; 4) $\frac{2}{3}\pi$; 5) 2π.
9.	Вычислить интеграл $\iiint\limits_{V} \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, если область V ограничена поверхностями: $z=-\sqrt{9-x^2-y^2},\ z=0$.	1) $\frac{9}{2}\pi$; 2) 9π; 3) 2π; 4) $\frac{2}{5}\pi$; 5) $\frac{2}{9}\pi$.
10.	Найти массу тела, ограниченного поверхностями $x+y+z=2,\ x=0,\ y=0,\ z=0$, если плотность $\gamma(x,y,z)=x+y$.	1) $-\frac{3}{4}$; 2) $\frac{3}{4}$; 3) $\frac{2}{3}$; 4) $\frac{4}{3}$; 5) $\frac{20}{3}$.

Тест «Кратные интегралы»

Вариант 13

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Вычислить интеграл: $\int\limits_2^4 dy \int\limits_0^3 (x-5)dx$.	1) 22; 2) 21; 3) -21; 4) $\frac{22}{5}$; 5) $\frac{6}{7}$.
2.	Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_0^{1/2} dy \int\limits_{y/2}^{2y} f(x,y)dx + \int\limits_{1/2}^{2} dy \int\limits_{y/2}^{1} f(x,y)dx$.	
3.	Вычислить интеграл из задания 2, если $f(x,y)=1-x$.	1) 4; 2) $\frac{1}{4}$; 3) –4; 4) $\frac{3}{4}$; 5) $\frac{6}{5}$.
4.	Вычислить интеграл $\iint\limits_D \frac{dxdy}{x^2+y^2}$ область D ограничена линиями: $x^2+y^2=4,\ x^2+y^2=16$.	1) $2\pi\ln 2$; 2) $\ln 4$; 3) 4π; 4) $8\pi\ln 2$; 5) $-4\ln 2$.
5.	Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=x,\ y=2x,\ x=1$.	1) 1; 2) –1; 3) $\frac{3}{2}$; 4) $\frac{2}{3}$; 5) $\frac{1}{2}$.
6.	Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^3 dy \int\limits_0^3 yzdz$.	1) $\frac{45}{2}$; 2) $\frac{51}{2}$; 3) 40; 4) $\frac{81}{4}$; 5) $\frac{91}{2}$.
7.	Вычислить интеграл $\iiint\limits_V (x+z+1)dxdydz$, если область V ограничена поверхностями: $x+z=2,\ x=0,\ y=-2,\ y=2,\ z=0$.	1) $\frac{65}{3}$; 2) $\frac{44}{3}$; 3) $\frac{56}{3}$; 4) $\frac{65}{2}$; 5) $\frac{43}{2}$.
8.	Вычислить интеграл $\iiint\limits_V z^2 dxdydz$, если область V ограничена поверхностями: $x^2+z^2=4,\ y=0,\ \ y=1$.	1) 4π; 2) 2π; 3) -2π; 4) 3π; 5) 5π.
9.	Вычислить интеграл $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}}$, если область V ограничена поверхностями: $z=\sqrt{25-x^2-y^2}, z=\sqrt{9-x^2-y^2},\ \ z=0,\ x\ge 0,\ y\ge 0$.	1) $\pi\ln\frac{5}{3}$; 2) $\ln\frac{3}{5}$; 3) $\frac{\pi}{2}\ln\frac{3}{5}$; 4) $\ln\frac{5}{3}$; 5) $\frac{\pi}{2}\ln\frac{5}{3}$.
10.	Найти объем тела, ограниченного поверхностями $x+y+z=3,\ x=0,\ y=0,\ z=0$.	1) $\frac{2}{9}$; 2) $\frac{9}{2}$; 3) $-\frac{9}{2}$; 4) 9; 5) 2.

Тест «Кратные интегралы»

Вариант 14

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Вычислить интеграл: $\int\limits_1^2 dx \int\limits_1^2 (x-y)dy$.	1) 1; 2) –1; 3) 2; 4) –2; 5) 0.
2.	Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x f(x,y)dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{2-x} f(x,y)dy$.	
3.	Вычислить интеграл из задания 2, если $f(x,y) = x - y$.	1) $\frac{3}{2}$; 2) $-\frac{3}{2}$; 3) $-\frac{2}{3}$; 4) $\frac{2}{3}$; 5) $\frac{4}{3}$.
4.	Вычислить интеграл $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$ область D ограниченна линиями: $x^2+y^2=9,\ y=0,\ y>0$.	1) 2π; 2) 3; 3) 3π; 4) -3π; 5) 2.
5.	Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y+x=3,\ y=0,\ x=0$.	1) $\frac{9}{2}$; 2) $\frac{3}{2}$; 3) $\frac{2}{3}$; 4) $\frac{5}{2}$; 5) $\frac{2}{9}$.
6.	Вычислить интеграл $\int\limits_0^5 dx \int\limits_0^6 dy \int\limits_0^1 z^3 dz$.	1) $\frac{5}{2}$; 2) $\frac{15}{2}$; 3) $-\frac{5}{2}$; 4) $\frac{3}{2}$; 5) 15.
7.	Вычислить интеграл $\iiint\limits_V (y+z+2)dxdydz$, если область V ограничена поверхностями: $y+z=3,\ x=-1,\ x=1,\ y=0,\ z=0$.	1) $\frac{9}{4}$; 2) 9; 3) 37; 4) 36; 5) 42.
8.	Вычислить интеграл $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$, если область V ограничена поверхностями: $x^2+y^2=9,\ z=-2,\ z=2$.	1) 36π; 2) 72π; 3) 72; 4) 36; 5) 48π.
9.	Вычислить интеграл $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{\sqrt{1-\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}}$, если область V ограничена поверхностями: $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$, $z=0$.	1) $\frac{2}{3}\pi$; 2) $\frac{3}{2}\pi$; 3) $\frac{4}{3}\pi$; 4) $\frac{5}{2}$; 5) $\frac{4}{3}$.
10.	Найти массу тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2=4,\ x^2+y^2=16,\ z=4,\ z=0$, если плотность $\gamma(x,y,z)=x^2$.	1) 2π; 2) 300π; 3) 24π; 4) 200π; 5) 240π.

Тест «Кратные интегралы»

Вариант 15

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Вычислить интеграл: $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-2}^{2} (x+1)dy$.	1) $\frac{6}{5}$; 2) $\frac{5}{6}$; 3) 5; 4) 6; 5) 3.
2.	Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_0^2 dy \int\limits_0^{y/2} f(x,y)dx + \int\limits_2^3 dy \int\limits_0^{3-y} f(x,y)dx$.	
3.	Вычислить интеграл из задания 2, если $f(x,y)=1+y$.	1) $\frac{4}{3}$; 2) $\frac{25}{3}$; 3) $\frac{3}{4}$; 4) 3; 5) 4.
4.	Вычислить интеграл $\iint\limits_D \sqrt{25-x^2-y^2}\,dxdy$ область D ограниченна линиями: $x^2+y^2=16,\ x=0,\ x<0$.	1) $\frac{98}{3}\pi$; 2) $\frac{3}{98}\pi$; 3) 3π ; 4) 98π; 5) 48π.
5.	Вычислить массу пластинки, ограниченной линиями: $x=a,\ x=b,\ y=c,\ y=d$, если поверхностная плотность $\gamma(x,y)=y$.	1) $(b-a)\frac{(d-c)^2}{2}$; 2) $(b-a)\frac{d^2-c^2}{2}$; 3) $(b^2-a^2)\frac{d^2-c^2}{2}$; 4) $(b-a)\frac{d-c}{2}$; 5) $(b^2-a^2)\frac{d-c}{2}$.
6.	Вычислить интеграл $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^2 dy \int\limits_0^2 xyzdz$.	1) 16; 2) 4; 3) 8; 4) 9; 5) 27.
7.	Вычислить интеграл $\iiint\limits_V (x-y+1)dxdydz$, если область V ограничена поверхностями: $x-y=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0,\ z=1$.	1) $\frac{5}{6}$; 2) $-\frac{6}{5}$; 3) $\frac{6}{5}$; 4) 6; 5) $-\frac{5}{6}$.
8.	Вычислить интеграл $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$, если область V ограничена поверхностями: $x^2+y^2=4,\ z=-1,\ z=1$.	1) 4π; 2) 12π; 3) $4\sqrt{3}\pi$; 4) $4\pi(3-\sqrt{5})$; 5) $4\pi(\sqrt{3}-5)$.
9.	Вычислить интеграл $\iiint\limits_V \sqrt{1-\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}\,dxdydz$, если область V ограничена поверхностью: $x^2+y^2+z^2=1$.	1) $\frac{8}{9}\pi$; 2) $\frac{9}{8}\pi$; 3) 9π; 4) $\frac{4}{9}\pi$; 5) 8π.
10.	Найти объем тела, ограниченного поверхностями: $x^2+y^2=z,\ x^2+y^2=1,\ z=0$.	1) $\frac{\pi}{3}$; 2) $\frac{4}{3}\pi$; 3) $\frac{\pi}{2}$; 4) $\frac{5\pi}{3}$; 5) $\frac{3\pi}{2}$.

Тест «Кратные интегралы»

Вариант 16

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Вычислить интеграл: $\int\limits_{-1}^{1} dy \int\limits_{-1}^{1} (x^2+y^2)dx$.	1) $\frac{8}{3}$; 2) $-\frac{8}{3}$; 3) $\frac{9}{2}$; 4) $\frac{4}{3}$; 5) $\frac{3}{2}$.
2.	Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_{-2}^{-1} dx \int\limits_{0}^{2+x} f(x,y)dy + \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{0}^{-x} f(x,y)dy$.	
3.	Вычислить интеграл из задания 2, если $f(x,y)=1+x$.	1) 1; 2) –1; 3) 0; 4) 2; 5) –2.
4.	Вычислить интеграл $\iint\limits_{D} \frac{dxdy}{\sqrt{25-x^2-y^2}}$ область D ограниченна кривыми: $x^2+y^2=16,\ x^2+y^2=9$.	1) -2π; 2) 3π; 3) $\frac{3\pi}{2}$; 4) 2π; 5) $\frac{2\pi}{3}$.
5.	Вычислить массу пластинки, ограниченной кривой $x^2+y^2=9$, если поверхностная плотность $\gamma(x,y)=x^2$.	1) $81\frac{\pi}{2}$; 2) $\frac{41\pi}{2}$; 3) $81\frac{\pi}{4}$; 4) $\frac{41\pi}{4}$; 5) $\frac{51\pi}{4}$.
6.	Вычислить интеграл $\int\limits_{0}^{3} dx \int\limits_{0}^{4} dy \int\limits_{0}^{2} xzdz$.	1) 36; 2) 72; 3) 54; 4) 38; 5) 64.
7.	Вычислить интеграл $\iiint\limits_{V} (1-x-y)dxdydz$, если область V ограничена поверхностями: $x+y=2,\ x=0,\ y=0,\ z=-3,\ z=3$.	1) 4; 2) –4; 3) –2; 4) 2; 5) –6.
8.	Вычислить интеграл $\iiint\limits_{V} \frac{dxdydz}{\sqrt{4+x^2+y^2}}$, если область V ограничена поверхностями: $x^2+y^2=5,\ z=-4,\ z=4$.	1) 8π; 2) 6π; 3) 12π; 4) 18π; 5) 16π.
9.	Вычислить интеграл $\iiint\limits_{V} \sqrt{9+\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}dxdydz$, если область V ограничена поверхностью: $x^2+y^2+z^2=4$.	1) $\frac{4}{9}\pi$; 2) $\frac{9}{4}\pi(27^{3/2}-17)$; 3) $\frac{9\pi}{4}\left(\sqrt{17}-27\right)$; 4) $\frac{4}{9}\pi(17^{3/2}-27)$; 5) $\frac{17\pi}{4}$.
10.	Найти объем тела, ограниченного поверхностями: $x^2+y^2+z^2=4,\ x^2=y^2+z^2$ (внутри конуса).	1) $\frac{8\pi}{3}(2-\sqrt{2})$; 2) $\frac{16\pi}{3}(2-\sqrt{2})$; 3) $\frac{8\pi}{3}(3-\sqrt{3})$; 4) $\frac{16\pi}{3}(\sqrt{2}-2)$; 5) $8\pi(3-\sqrt{3})$.

Тест «Кратные интегралы»

Вариант 17

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Вычислить интеграл: $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^2 xydy$.	1) –1; 2) 3; 3) 1; 4) 0; 5) 2.
2.	Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-2y}^{-y} f(x,y)dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_{-2}^{-y} f(x,y)dx$.	
3.	Вычислить интеграл из задания 2, если $f(x,y) = 1 - y$.	1) 0; 2) 1; 3) –1; 4) 2; 5) –2.
4.	Вычислить интеграл $\iint\limits_D (4 - x^2 - y^2)dxdy$ область D ограниченна линиями: $x^2 + y^2 = 4,\ y = 0, y > 0$.	1) 2π; 2) 4π; 3) -2π; 4) -4π; 5) 3π.
5.	Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми: $x^2 + y^2 = 9,\ x^2 + y^2 = 16$.	1) 5π; 2) 4π; 3) 6π; 4) 3π; 5) 7π.
6.	Вычислить интеграл $\int\limits_0^3 dx \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^2 y^2 zdz$.	1) –2; 2) 0; 3) 1; 4) 2; 5) 3.
7.	Вычислить интеграл $\iiint\limits_V (x - y + z)dxdydz$, если область V ограничена поверхностями: $x - y + z = 1,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$.	1) $-\frac{1}{8}$; 2) $\frac{1}{8}$; 3) $-\frac{1}{4}$; 4) $\frac{1}{4}$; 5) $\frac{1}{16}$.
8.	Вычислить интеграл $\iiint\limits_V (x^2 - y^2)dxdydz$, если область V ограничена поверхностями: $x^2 + y^2 = 4,\ x = y,\ y = 0,\ z = 0,\ z = 5$.	1) 20π; 2) 20; 3) 40; 4) 40π; 5) 60.
9.	Вычислить интеграл $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{1 + \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2}}$, если область V ограничена поверхностью: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.	1) $\frac{4}{3}\pi$; 2) $\frac{3}{4}\ln 2$; 3) $\frac{4\pi}{3}\ln 2$; 4) $\frac{16}{3}\pi \ln 2$; 5) $\frac{16}{3}\ln 2$.
10.	Найти массу тела, ограниченного поверхностями $4 - z = x^2 + y^2,\ z = 0$, если плотность $\gamma(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2}$.	1) $\frac{64\pi}{5}$; 2) $\frac{64\pi}{15}$; 3) $\frac{128\pi}{5}$; 4) $\frac{128\pi}{15}$; 5) $\frac{72\pi}{15}$.

Тест «Кратные интегралы»

Вариант 18

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Вычислить интеграл: $\int_0^2 dx\int_{-3}^0 xy^2dy$.	1) $\frac{17}{5}$; 2) 18; 3) $\frac{5}{2}$; 4) 12; 5) 17.
2.	Изменить порядок интегрирования: $\int_0^{2/3} dx\int_0^{2x} f(x,y)dy+\int_{2/3}^2 dx\int_0^{2-x} f(x,y)dy$.	
3.	Вычислить интеграл из задания 2, если $f(x,y)=1-x$.	1) 4; 2) $\frac{2}{27}$; 3) 27; 4) $\frac{4}{27}$; 5) $\frac{2}{57}$.
4.	Вычислить интеграл $\iint_D \frac{dxdy}{25-x^2-y^2}$ область D ограниченна кривыми: $x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=9$.	1) $\ln 2$; 2) $\pi\ln 2$; 3) $\ln\frac{3}{2}$; 4) $\pi\ln\frac{2}{3}$; 5) $\pi\ln\frac{3}{2}$.
5.	Вычислить массу пластинки, ограниченной линиями: $x-y=2,\ x=0,\ y=0$, если поверхностная плотность $\gamma(x,y)=xy$.	1) $\frac{2}{3}$; 2) 3; 3) 2; 4) $\frac{3}{2}$; 5) 5.
6.	Вычислить интеграл $\int_0^3 dx\int_0^2 dy\int_0^6 y^3dz$.	1) 36; 2) 54; 3) 72; 4) 64; 5) 32.
7.	Вычислить интеграл $\iiint_V (x-y-z)dxdydz$, если область V ограничена поверхностями: $x-y-z=2,\ x=0,\ y=0,\ z=0$.	1) $\frac{2}{3}$; 2) $\frac{3}{2}$; 3) 2; 4) 3; 5) 4.
8.	Вычислить интеграл $\iiint_V \sqrt{9-x^2-y^2}\,dxdydz$, если область V ограничена поверхностями: $x^2+y^2=4,\ z=0,\ z=2$.	1) $\frac{2\pi}{3}(27-\sqrt{5})$; 2) $\frac{2\pi}{3}$; 3) $\frac{4\pi}{3}(\sqrt{5}-9)$; 4) $\frac{4\pi}{3}(27-5^{3/2})$; 5) $\frac{5\pi}{6}(27-\sqrt{7})$.
9.	Вычислить интеграл $\iiint_V \left(1+\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)dxdydz$, если область V ограничена поверхностями: $z=\sqrt{4-x^2-y^2},\ z=0,\ x\ge 0,\ y\ge 0$.	1) $\frac{10}{3}$; 2) $\frac{9}{2}\pi$; 3) $\frac{2\pi}{3}$; 4) $\frac{3}{2}$; 5) $\frac{10}{3}\pi$.
10.	Найти объем тела, ограниченного поверхностями: $x^2+y^2+z^2=16,\ x^2+y^2=4$ (внутри цилиндра).	1) $\frac{32\pi}{3}(8-3\sqrt{3})$; 2) $\frac{52\pi}{3}$; 3) $\frac{16\pi}{3}(8-3^{3/2})$; 4) $\frac{26\pi}{3}$; 5) $\frac{8}{3}(3^{3/2}-8)$.

Тест «Кратные интегралы»

Вариант 19

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Вычислить интеграл: $\int\limits_2^3 dy \int\limits_3^4 (x-y)dx$.	1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{3}{2}$; 3) 2; 4) 1; 5) 0.
2.	Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_0^{1/2} dy \int\limits_{-y}^{0} f(x,y)dx + \int\limits_{1/2}^{1} dy \int\limits_{y-1}^{0} f(x,y)dx$.	
3.	Вычислить интеграл из задания 2, если $f(x,y) = y-1$.	1) $\frac{1}{3}$; 2) $-\frac{1}{6}$; 3) $-\frac{1}{3}$; 4) $\frac{2}{3}$; 5) $\frac{1}{6}$.
4.	Вычислить интеграл $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2-9}}$ область D ограниченна кривыми: $x=\sqrt{16-y^2}$, $x=\sqrt{25-y^2}$.	1) $2\pi(\sqrt{7}-8)$; 2) 16π; 3) $\pi(8-\sqrt{7})$; 4) $2\sqrt{7}\pi$; 5) $\pi(4-\sqrt{7})$.
5.	Вычислить массу пластинки, ограниченной кривыми: $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=4$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, если поверхностная плотность $\gamma(x,y)=x$.	1) $\frac{4}{3}$; 2) $\frac{3}{4}$; 3) $\frac{7}{3}$; 4) $\frac{2}{3}$; 5) $\frac{7}{4}$.
6.	Вычислить интеграл $\int\limits_0^3 dx \int\limits_0^3 dy \int\limits_0^3 x^2y^2dz$.	1) 243; 2) 443; 3) 125; 4) 349; 5) 228.
7.	Вычислить интеграл $\iiint\limits_V (x+y-z)dxdydz$, если область V ограничена поверхностями: $x+y-z=3$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.	1) $\frac{41}{8}$; 2) $-\frac{41}{8}$; 3) $\frac{21}{4}$; 4) $-\frac{81}{8}$; 5) $\frac{81}{8}$.
8.	Вычислить интеграл $\iiint\limits_V (x-y)dxdydz$, если область V ограничена поверхностями: $y=\sqrt{16-x^2}$, $y=0$, $z=-2$, $z=2$.	1) $\frac{512}{3}$; 2) $-\frac{256}{3}$; 3) $-\frac{512}{3}$; 4) $\frac{256}{3}$; 5) $\frac{624}{5}$.
9.	Вычислить интеграл $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{x^2+y^2+z^2}$, если область V ограничена поверхностями: $x^2+y^2+z^2=4$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$.	1) 2π; 2) π; 3) $\frac{3\pi}{2}$; 4) $\frac{2}{3}\pi$; 5) 0.
10.	Найти объем тела, ограниченного поверхностями: $x^2+y^2=z$, $z=4$.	1) 2π; 2) 4π; 3) 6π; 4) 7π; 5) 8π.

Тест «Кратные интегралы»

Вариант 20

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Вычислить интеграл: $\int\limits_{-2}^{1} dx \int\limits_{2}^{3} (x+y-1)dy$.	1) 0; 2) 1; 3) 5; 4) 2; 5) 3.
2.	Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_{0}^{2} dy \int\limits_{y/3}^{y/2} f(x,y)dx + \int\limits_{2}^{3} dy \int\limits_{y/3}^{1} f(x,y)dx$.	
3.	Вычислить интеграл из задания 2, если $f(x,y) = y+2$.	1) $\frac{11}{6}$; 2) $\frac{11}{3}$; 3) $\frac{6}{11}$; 4) $\frac{5}{6}$; 5) $\frac{7}{5}$.
4.	Вычислить интеграл $\iint\limits_{D} \sqrt{x^2+y^2-4}\,dxdy$ область D ограниченна кривыми: $x^2+y^2=16,\ x^2+y^2=9,\ y \geq 0$.	1) $4\sqrt{12}\pi$; 2) $\pi\left(12^{3/2}-5^{3/2}\right)$; 3) $\frac{\pi}{3}\left(\sqrt{5}-\sqrt{12}\right)$; 4) $\frac{\pi}{3}\left(12^{3/2}-5^{3/2}\right)$; 5) $4\sqrt{5}\pi$.
5.	Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=x^2,\ x=1,\ y=0$.	1) $\frac{2}{3}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) $\frac{3}{2}$; 4) $\frac{1}{2}$; 5) $\frac{1}{6}$.
6.	Вычислить интеграл $\int\limits_{0}^{9} dx \int\limits_{0}^{2} dy \int\limits_{0}^{1} xyzdz$.	1) $\frac{41}{2}$; 2) $\frac{51}{2}$; 3) $\frac{91}{3}$; 4) $\frac{61}{2}$; 5) $\frac{81}{2}$.
7.	Вычислить интеграл $\iiint\limits_{V} (y-x-z)dxdydz$, если область V ограничена поверхностями: $y-z-x=4,\ x=0,\ y=0,\ z=0$.	1) $\frac{416}{3}$; 2) $\frac{314}{3}$; 3) $-\frac{416}{3}$; 4) $-\frac{314}{3}$; 5) $\frac{214}{3}$.
8.	Вычислить интеграл $\iiint\limits_{V} (z+x)dxdydz$, если область V ограничена поверхностями: $x=\sqrt{4-z^2},\ y=3,\ y=0$.	1) 16; 2) 8; 3) –8; 4) 32; 5) –16.
9.	Вычислить интеграл $\iiint\limits_{V} \left(4+x^2+y^2+z^2\right)dxdydz$, если область V ограничена поверхностями: $z=\sqrt{4-x^2-y^2},\ z=0$.	1) $\frac{256}{15}\pi$; 2) $\frac{256\pi}{5}$; 3) $\frac{512\pi}{3}$; 4) $\frac{512}{15}\pi$; 5) $\frac{482}{5}\pi$.
10.	Найти объем тела, ограниченного поверхностями: $x^2+y^2+z^2=2,\ x^2+y^2=z$ (внутри параболоида).	1) $\frac{\pi}{3}(4\sqrt{2}-7)$; 2) $\frac{4\sqrt{2}\pi}{3}$; 3) $\frac{\pi}{6}(8\sqrt{2}-7)$; 4) $\frac{\pi}{6}(7-4\sqrt{2})$; 5) $\frac{\pi}{3}(4\sqrt{2}-5)$.

Тест «Кратные интегралы»

Вариант 21

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Вычислить интеграл: $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^2 (x+y)dy$.	1) 2; 2) 3; 3) -2; 4) -3; 5) 4.
2.	Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_0^2 dy \int\limits_{y/2}^{y} f(x,y)dx + \int\limits_2^4 dy \int\limits_{y/2}^{2} f(x,y)dx$.	
3.	Вычислить интеграл из задания 2, если $f(x,y)=1-y$.	1) -2; 2) -1; 3) -3; 4) 2; 5) $-\frac{2}{3}$.
4.	Вычислить интеграл $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ область D ограниченна линиями: $x^2+y^2=9,\ x=0,\ x>0$.	1) $\frac{3}{2}\pi$; 2) $\frac{2}{3}\pi$; 3) 3π; 4) -3π; 5) 3,6.
5.	Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=x^2,\ y=1$.	1) $\frac{3}{4}$; 2) $\frac{2}{3}$; 3) -$\frac{2}{3}$; 4) $\frac{4}{3}$; 5) $\frac{5}{2}$.
6.	Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^2 dy \int\limits_0^3 xydz$.	1) $\frac{3}{4}$; 2) -$\frac{3}{4}$; 3) $\frac{3}{2}$; 4) -3; 5) 3.
7.	Вычислить интеграл $\iiint\limits_V (x+y+z)dxdydz$, если область V ограничена поверхностями: $x+y+z=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0$.	1) $-\frac{1}{8}$; 2) $\frac{1}{8}$; 3) $\frac{1}{4}$; 4) $-\frac{1}{4}$; 5) $\frac{3}{8}$.
8.	Вычислить интеграл $\iiint\limits_V (x+y)dxdydz$, если область V ограничена поверхностями: $x=\sqrt{4-y^2},\ z=0,\ \ z=5$.	1) $\frac{40}{3}$; 2) $-\frac{40}{3}$; 3) $\frac{80}{3}$; 4) $\frac{3}{80}$; 5) $\frac{3}{40}$.
9.	Вычислить интеграл $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$, если область V ограничена поверхностями: $z=\sqrt{4-x^2-y^2},\ z=0$.	1) $\frac{2}{3}\pi$; 2) 4π; 3) $\frac{3}{2}\pi$; 4) 8π; 5) -4π.
10.	Найти массу тела, ограниченного поверхностями $z=\sqrt{25-x^2-y^2},\ z=\sqrt{16-x^2-y^2},\ x\geq 0,\ y\geq 0$, если плотность $\gamma(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.	1) $\frac{4}{9}\pi$; 2) $-\frac{4}{9}\pi$; 3) 9π; 4) 4π; 5) $\frac{9}{4}\pi$.

Тест «Кратные интегралы»

Вариант 22

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Вычислить интеграл: $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-3}^{0} (3-y)dy$.	1) 27; 2) $\frac{27}{2}$; 3) 9; 4) -9; 5) 6.
2.	Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{x/2}^{x} f(x,y)dy + \int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{x/2}^{1} f(x,y)dy$.	
3.	Вычислить интеграл из задания 2, если $f(x,y) = x + y$.	1) $\frac{6}{5}$; 2) -$\frac{6}{5}$; 3) $\frac{5}{6}$; 4)-$\frac{5}{6}$; 5) $\frac{3}{2}$.
4.	Вычислить интеграл $\iint\limits_{D} \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$ область D ограниченна линиями: $x^2+y^2=4$.	1) $\frac{3}{2}\pi$; 2) $\frac{16}{3}\pi$; 3) 2π; 4) $-\frac{2}{3}\pi$; 5) $-\frac{16}{3}\pi$.
5.	Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y+x=2,\ y=0,\ x=0$.	1) $\frac{3}{2}$; 2) $\frac{2}{3}$; 3) -2; 4) 2; 5) 4.
6.	Вычислить интеграл $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{0}^{4} dy \int\limits_{0}^{3} z^2 dz$.	1) 27; 2) 47; 3) 72; 4) 74; 5) 57.
7.	Вычислить интеграл $\iiint\limits_{V} (x+y)dxdydz$, если область V ограничена поверхностями: $x+y=1,\ x=0,\ y=0, z=2,\ z=0$.	1) $\frac{2}{3}$; 2) $\frac{3}{2}$; 3) $-\frac{2}{3}$; 4) $\frac{4}{3}$; 5) $\frac{5}{2}$.
8.	Вычислить интеграл $\iiint\limits_{V} zdxdydz$, если область V ограничена поверхностями: $x^2+y^2=1,\ z=0,\ \ z=2$.	1) 3π; 2) -3π; 3) $\frac{3}{2}\pi$; 4) $\frac{2}{3}\pi$; 5) 2π.
9.	Вычислить интеграл $\iiint\limits_{V} \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, если область V ограничена поверхностями: $z=-\sqrt{9-x^2-y^2},\ z=0$.	1) $\frac{9}{2}\pi$; 2) 9π; 3) 2π; 4) $\frac{2}{5}\pi$; 5) $\frac{2}{9}\pi$.
10.	Найти массу тела, ограниченного поверхностями $x+y+z=2,\ x=0,\ y=0,\ z=0$, если плотность $\gamma(x,y,z)=x+y$.	1) $-\frac{3}{4}$; 2) $\frac{3}{4}$; 3) $\frac{2}{3}$; 4) $\frac{4}{3}$; 5) $\frac{20}{3}$.

Тест «Кратные интегралы»

Вариант 23

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Вычислить интеграл: $\int\limits_2^4 dy \int\limits_0^3 (x-5)dx$.	1) 22; 2) 21; 3) -21; 4) $\frac{22}{5}$; 5) $\frac{6}{7}$.
2.	Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_0^{1/2} dy \int\limits_{y/2}^{2y} f(x,y)dx + \int\limits_{1/2}^{2} dy \int\limits_{y/2}^{1} f(x,y)dx$.	
3.	Вычислить интеграл из задания 2, если $f(x,y) = 1-x$.	1) 4; 2) $\frac{1}{4}$; 3) –4; 4) $\frac{3}{4}$; 5) $\frac{6}{5}$.
4.	Вычислить интеграл $\iint\limits_D \frac{dxdy}{x^2+y^2}$ область D ограниченна линиями: $x^2+y^2=4,\ x^2+y^2=16$.	1) $2\pi\ln 2$; 2) $\ln 4$; 3) 4π; 4) $8\pi\ln 2$; 5) $-4\ln 2$.
5.	Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=x,\ y=2x,\ x=1$.	1) 1; 2) –1; 3) $\frac{3}{2}$; 4) $\frac{2}{3}$; 5) $\frac{1}{2}$.
6.	Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^3 dy \int\limits_0^3 yzdz$.	1) $\frac{45}{2}$; 2) $\frac{51}{2}$; 3) 40; 4) $\frac{81}{4}$; 5) $\frac{91}{2}$.
7.	Вычислить интеграл $\iiint\limits_V (x+z+1)dxdydz$, если область V ограничена поверхностями: $x+z=2,\ x=0,\ y=-2,\ y=2,\ z=0$.	1) $\frac{65}{3}$; 2) $\frac{44}{3}$; 3) $\frac{56}{3}$; 4) $\frac{65}{2}$; 5) $\frac{43}{2}$.
8.	Вычислить интеграл $\iiint\limits_V z^2 dxdydz$, если область V ограничена поверхностями: $x^2+z^2=4,\ y=0,\ y=1$.	1) 4π; 2) 2π; 3) -2π; 4) 3π; 5) 5π.
9.	Вычислить интеграл $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}}$, если область V ограничена поверхностями: $z=\sqrt{25-x^2-y^2}, z=\sqrt{9-x^2-y^2},\ z=0,\ x\ge 0,\ y\ge 0$.	1) $\pi\ln\frac{5}{3}$; 2) $\ln\frac{3}{5}$; 3) $\frac{\pi}{2}\ln\frac{3}{5}$; 4) $\ln\frac{5}{3}$; 5) $\frac{\pi}{2}\ln\frac{5}{3}$.
10.	Найти объем тела, ограниченного поверхностями $x+y+z=3,\ x=0,\ y=0,\ z=0$.	1) $\frac{2}{9}$; 2) $\frac{9}{2}$; 3) $-\frac{9}{2}$; 4) 9; 5) 2.

Тест «Кратные интегралы»

Вариант 24

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Вычислить интеграл: $\int\limits_1^2 dx \int\limits_1^2 (x-y)dy$.	1) 1; 2) –1; 3) 2; 4) –2; 5) 0.
2.	Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x f(x,y)dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{2-x} f(x,y)dy$.	
3.	Вычислить интеграл из задания 2, если $f(x,y) = x - y$.	1) $\frac{3}{2}$; 2) $-\frac{3}{2}$; 3) $-\frac{2}{3}$; 4) $\frac{2}{3}$; 5) $\frac{4}{3}$.
4.	Вычислить интеграл $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$ область D ограниченна линиями: $x^2+y^2=9,\ y=0,\ y>0$.	1) 2π; 2) 3; 3) 3π; 4) -3π; 5) 2.
5.	Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y+x=3,\ y=0,\ x=0$.	1) $\frac{9}{2}$; 2) $\frac{3}{2}$; 3) $\frac{2}{3}$; 4) $\frac{5}{2}$; 5) $\frac{2}{9}$.
6.	Вычислить интеграл $\int\limits_0^5 dx \int\limits_0^6 dy \int\limits_0^1 z^3 dz$.	1) $\frac{5}{2}$; 2) $\frac{15}{2}$; 3) $-\frac{5}{2}$; 4) $\frac{3}{2}$; 5) 15.
7.	Вычислить интеграл $\iiint\limits_V (y+z+2)dxdydz$, если область V ограничена поверхностями: $y+z=3,\ x=-1,\ x=1,\ y=0,\ z=0$.	1) $\frac{9}{4}$; 2) 9; 3) 37; 4) 36; 5) 42.
8.	Вычислить интеграл $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$, если область V ограничена поверхностями: $x^2+y^2=9,\ z=-2,\ z=2$.	1) 36π; 2) 72π; 3) 72; 4) 36; 5) 48π.
9.	Вычислить интеграл $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{\sqrt{1-\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}}$, если область V ограничена поверхностями: $z=\sqrt{1-x^2-y^2},\ z=0$.	1) $\frac{2}{3}\pi$; 2) $\frac{3}{2}\pi$; 3) $\frac{4}{3}\pi$; 4) $\frac{5}{2}$; 5) $\frac{4}{3}$.
10.	Найти массу тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2=4,\ x^2+y^2=16,\ z=4,\ z=0$, если плотность $\gamma(x,y,z)=x^2$.	1) 2π; 2) 300π; 3) 24π; 4) 200π; 5) 240π.

Тест «Кратные интегралы»

Вариант 25

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Вычислить интеграл: $\int_0^1 dx\int_{-2}^{2}(x+1)dy$.	1) $\frac{6}{5}$; 2) $\frac{5}{6}$; 3) 5; 4) 6; 5) 3.
2.	Изменить порядок интегрирования: $\int_0^2 dy\int_0^{y/2} f(x,y)dx+\int_2^3 dy\int_0^{3-y} f(x,y)dx$.	
3.	Вычислить интеграл из задания 2, если $f(x,y)=1+y$.	1) $\frac{4}{3}$; 2) $\frac{25}{3}$; 3) $\frac{3}{4}$; 4) 3; 5) 4.
4.	Вычислить интеграл $\iint_D\sqrt{25-x^2-y^2}\,dxdy$ область D ограниченна линиями: $x^2+y^2=16,\ x=0,\ x<0$.	1) $\frac{98}{3}\pi$; 2) $\frac{3}{98}\pi$; 3) 3π ; 4) 98π; 5) 48π.
5.	Вычислить массу пластинки, ограниченной линиями: $x=a,\ x=b,\ y=c,\ y=d$, если поверхностная плотность $\gamma(x,y)=y$.	1) $(b-a)\frac{(d-c)^2}{2}$; 2) $(b-a)\frac{d^2-c^2}{2}$; 3) $(b^2-a^2)\frac{d^2-c^2}{2}$; 4) $(b-a)\frac{d-c}{2}$; 5) $(b^2-a^2)\frac{d-c}{2}$.
6.	Вычислить интеграл $\int_0^2 dx\int_0^2 dy\int_0^2 xyzdz$.	1) 16; 2) 4; 3) 8; 4) 9; 5) 27.
7.	Вычислить интеграл $\iiint_V(x-y+1)dxdydz$, если область V ограничена поверхностями: $x-y=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0,\ z=1$.	1) $\frac{5}{6}$; 2) $-\frac{6}{5}$; 3) $\frac{6}{5}$; 4) 6; 5) $-\frac{5}{6}$.
8.	Вычислить интеграл $\iiint_V\frac{dxdydz}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$, если область V ограничена поверхностями: $x^2+y^2=4,\ z=-1,\ z=1$.	1) 4π; 2) 12π; 3) $4\sqrt{3}\pi$; 4) $4\pi(3-\sqrt{5})$; 5) $4\pi(\sqrt{3}-5)$.
9.	Вычислить интеграл $\iiint_V\sqrt{1-\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}\,dxdydz$, если область V ограничена поверхностью: $x^2+y^2+z^2=1$.	1) $\frac{8}{9}\pi$; 2) $\frac{9}{8}\pi$; 3) 9π; 4) $\frac{4}{9}\pi$; 5) 8π.
10.	Найти объем тела, ограниченного поверхностями: $x^2+y^2=z,\ x^2+y^2=1,\ z=0$.	1) $\frac{\pi}{3}$; 2) $\frac{4}{3}\pi$; 3) $\frac{\pi}{2}$; 4) $\frac{5\pi}{3}$; 5) $\frac{3\pi}{2}$.

Тест «Кратные интегралы»

Вариант 26

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Вычислить интеграл: $\int\limits_{-1}^{1} dy \int\limits_{-1}^{1} (x^2+y^2)dx$.	1) $\frac{8}{3}$; 2) $-\frac{8}{3}$; 3) $\frac{9}{2}$; 4) $\frac{4}{3}$; 5) $\frac{3}{2}$.
2.	Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_{-2}^{-1} dx \int\limits_{0}^{2+x} f(x,y)dy + \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{0}^{-x} f(x,y)dy$.	
3.	Вычислить интеграл из задания 2, если $f(x,y)=1+x$.	1) 1; 2) –1; 3) 0; 4) 2; 5) –2.
4.	Вычислить интеграл $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{25-x^2-y^2}}$ область D ограниченна кривыми: $x^2+y^2=16,\ x^2+y^2=9$.	1) -2π; 2) 3π; 3) $\frac{3\pi}{2}$; 4) 2π; 5) $\frac{2\pi}{3}$.
5.	Вычислить массу пластинки, ограниченной кривой $x^2+y^2=9$, если поверхностная плотность $\gamma(x,y)=x^2$.	1) $81\frac{\pi}{2}$; 2) $\frac{41\pi}{2}$; 3) $81\frac{\pi}{4}$; 4) $\frac{41\pi}{4}$; 5) $\frac{51\pi}{4}$.
6.	Вычислить интеграл $\int\limits_0^3 dx \int\limits_0^4 dy \int\limits_0^2 xzdz$.	1) 36; 2) 72; 3) 54; 4) 38; 5) 64.
7.	Вычислить интеграл $\iiint\limits_V (1-x-y)dxdydz$, если область V ограничена поверхностями: $x+y=2,\ x=0,\ y=0,\ z=-3,\ z=3$.	1) 4; 2) –4; 3) –2; 4) 2; 5) –6.
8.	Вычислить интеграл $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{\sqrt{4+x^2+y^2}}$, если область V ограничена поверхностями: $x^2+y^2=5,\ z=-4,\ z=4$.	1) 8π; 2) 6π; 3) 12π; 4) 18π; 5) 16π.
9.	Вычислить интеграл $\iiint\limits_V \sqrt{9+\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}\,dxdydz$, если область V ограничена поверхностью: $x^2+y^2+z^2=4$.	1) $\frac{4}{9}\pi$; 2) $\frac{9}{4}\pi(27^{3/2}-17)$; 3) $\frac{9\pi}{4}\left(\sqrt{17}-27\right)$; 4) $\frac{4}{9}\pi(17^{3/2}-27)$; 5) $\frac{17\pi}{4}$.
10.	Найти объем тела, ограниченного поверхностями: $x^2+y^2+z^2=4,\ x^2=y^2+z^2$ (внутри конуса).	1) $\frac{8\pi}{3}(2-\sqrt{2})$; 2) $\frac{16\pi}{3}(2-\sqrt{2})$; 3) $\frac{8\pi}{3}(3-\sqrt{3})$; 4) $\frac{16\pi}{3}(\sqrt{2}-2)$; 5) $8\pi(3-\sqrt{3})$.

Тест «Кратные интегралы»

Вариант 27

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Вычислить интеграл: $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^2 xydy$.	1) –1; 2) 3; 3) 1; 4) 0; 5) 2.
2.	Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_0^1 dy\int\limits_{-2y}^{-y} f(x,y)dx+\int\limits_1^2 dy\int\limits_{-2}^{-y} f(x,y)dx$.	
3.	Вычислить интеграл из задания 2, если $f(x,y)=1-y$.	1) 0; 2) 1; 3) –1; 4) 2; 5) –2.
4.	Вычислить интеграл $\iint\limits_D (4-x^2-y^2)dxdy$ область D ограниченна линиями: $x^2+y^2=4,\ y=0, y>0$.	1) 2π; 2) 4π; 3) -2π; 4) -4π; 5) 3π.
5.	Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми: $x^2+y^2=9,\ x^2+y^2=16$.	1) 5π; 2) 4π; 3) 6π; 4) 3π; 5) 7π.
6.	Вычислить интеграл $\int\limits_0^3 dx\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^2 y^2zdz$.	1) –2; 2) 0; 3) 1; 4) 2; 5) 3.
7.	Вычислить интеграл $\iiint\limits_V (x-y+z)dxdydz$, если область V ограничена поверхностями: $x-y+z=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0$.	1) $-\frac{1}{8}$; 2) $\frac{1}{8}$; 3) $-\frac{1}{4}$; 4) $\frac{1}{4}$; 5) $\frac{1}{16}$.
8.	Вычислить интеграл $\iiint\limits_V (x^2-y^2)dxdydz$, если область V ограничена поверхностями: $x^2+y^2=4,\ x=y,\ y=0,\ z=0,\ z=5$.	1) 20π; 2) 20; 3) 40; 4) 40π; 5) 60.
9.	Вычислить интеграл $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{1+\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}$, если область V ограничена поверхностью: $x^2+y^2+z^2=1$.	1) $\frac{4}{3}\pi$; 2) $\frac{3}{4}\ln 2$; 3) $\frac{4\pi}{3}\ln 2$; 4) $\frac{16}{3}\pi\ln 2$; 5) $\frac{16}{3}\ln 2$.
10.	Найти массу тела, ограниченного поверхностями $4-z=x^2+y^2,\ z=0$, если плотность $\gamma(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2}$.	1) $\frac{64\pi}{5}$; 2) $\frac{64\pi}{15}$; 3) $\frac{128\pi}{5}$; 4) $\frac{128\pi}{15}$; 5) $\frac{72\pi}{15}$.

Тест «Кратные интегралы»

Вариант 28

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Вычислить интеграл: $\int_0^2 dx \int_{-3}^0 xy^2 dy$.	1) $\frac{17}{5}$; 2) 18; 3) $\frac{5}{2}$; 4) 12; 5) 17.
2.	Изменить порядок интегрирования: $\int_0^{2/3} dx \int_0^{2x} f(x,y)dy + \int_{2/3}^2 dx \int_0^{2-x} f(x,y)dy$.	
3.	Вычислить интеграл из задания 2, если $f(x,y)=1-x$.	1) 4; 2) $\frac{2}{27}$; 3) 27; 4) $\frac{4}{27}$; 5) $\frac{2}{57}$.
4.	Вычислить интеграл $\iint_D \frac{dxdy}{25-x^2-y^2}$ область D ограниченна кривыми: $x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=9$.	1) $\ln 2$; 2) $\pi\ln 2$; 3) $\ln\frac{3}{2}$; 4) $\pi\ln\frac{2}{3}$; 5) $\pi\ln\frac{3}{2}$.
5.	Вычислить массу пластинки, ограниченной линиями: $x-y=2,\ x=0,\ y=0$, если поверхностная плотность $\gamma(x,y)=xy$.	1) $\frac{2}{3}$; 2) 3; 3) 2; 4) $\frac{3}{2}$; 5) 5.
6.	Вычислить интеграл $\int_0^3 dx \int_0^2 dy \int_0^6 y^3 dz$.	1) 36; 2) 54; 3) 72; 4) 64; 5) 32.
7.	Вычислить интеграл $\iiint_V (x-y-z)dxdydz$, если область V ограничена поверхностями: $x-y-z=2,\ x=0,\ y=0,\ z=0$.	1) $\frac{2}{3}$; 2) $\frac{3}{2}$; 3) 2; 4) 3; 5) 4.
8.	Вычислить интеграл $\iiint_V \sqrt{9-x^2-y^2}\,dxdydz$, если область V ограничена поверхностями: $x^2+y^2=4,\ z=0,\ z=2$.	1) $\frac{2\pi}{3}(27-\sqrt{5})$; 2) $\frac{2\pi}{3}$; 3) $\frac{4\pi}{3}(\sqrt{5}-9)$; 4) $\frac{4\pi}{3}(27-5^{3/2})$; 5) $\frac{5\pi}{6}(27-\sqrt{7})$.
9.	Вычислить интеграл $\iiint_V \left(1+\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)dxdydz$, если область V ограничена поверхностями: $z=\sqrt{4-x^2-y^2},\ z=0,\ x\ge 0,\ y\ge 0$.	1) $\frac{10}{3}$; 2) $\frac{9}{2}\pi$; 3) $\frac{2\pi}{3}$; 4) $\frac{3}{2}$; 5) $\frac{10}{3}\pi$.
10.	Найти объем тела, ограниченного поверхностями: $x^2+y^2+z^2=16,\ x^2+y^2=4$ (внутри цилиндра).	1) $\frac{32\pi}{3}(8-3\sqrt{3})$; 2) $\frac{52\pi}{3}$; 3) $\frac{16\pi}{3}(8-3^{3/2})$; 4) $\frac{26\pi}{3}$; 5) $\frac{8}{3}(3^{3/2}-8)$.

Тест «Кратные интегралы»

Вариант 29

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Вычислить интеграл: $\int_2^3 dy \int_3^4 (x-y)dx$.	1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{3}{2}$; 3) 2; 4) 1; 5) 0.
2.	Изменить порядок интегрирования: $\int_0^{1/2} dy \int_{-y}^{0} f(x,y)dx + \int_{1/2}^{1} dy \int_{y-1}^{0} f(x,y)dx$.	
3.	Вычислить интеграл из задания 2, если $f(x,y)=y-1$.	1) $\frac{1}{3}$; 2) $-\frac{1}{6}$; 3) $-\frac{1}{3}$; 4) $\frac{2}{3}$; 5) $\frac{1}{6}$.
4.	Вычислить интеграл $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2-9}}$ область D ограниченна кривыми: $x=\sqrt{16-y^2}$, $x=\sqrt{25-y^2}$.	1) $2\pi(\sqrt{7}-8)$; 2) 16π; 3) $\pi(8-\sqrt{7})$; 4) $2\sqrt{7}\pi$; 5) $\pi(4-\sqrt{7})$.
5.	Вычислить массу пластинки, ограниченной кривыми: $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=4$, $x\ge 0$, $y\ge 0$, если поверхностная плотность $\gamma(x,y)=x$.	1) $\frac{4}{3}$; 2) $\frac{3}{4}$; 3) $\frac{7}{3}$; 4) $\frac{2}{3}$; 5) $\frac{7}{4}$.
6.	Вычислить интеграл $\int_0^3 dx \int_0^3 dy \int_0^3 x^2y^2dz$.	1) 243; 2) 443; 3) 125; 4) 349; 5) 228.
7.	Вычислить интеграл $\iiint\limits_V (x+y-z)dxdydz$, если область V ограничена поверхностями: $x+y-z=3$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.	1) $\frac{41}{8}$; 2) $-\frac{41}{8}$; 3) $\frac{21}{4}$; 4) $-\frac{81}{8}$; 5) $\frac{81}{8}$.
8.	Вычислить интеграл $\iiint\limits_V (x-y)dxdydz$, если область V ограничена поверхностями: $y=\sqrt{16-x^2}$, $y=0$, $z=-2$, $z=2$.	1) $\frac{512}{3}$; 2) $-\frac{256}{3}$; 3) $-\frac{512}{3}$; 4) $\frac{256}{3}$; 5) $\frac{624}{5}$.
9.	Вычислить интеграл $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{x^2+y^2+z^2}$, если область V ограничена поверхностями: $x^2+y^2+z^2=4$, $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$.	1) 2π; 2) π; 3) $\frac{3\pi}{2}$; 4) $\frac{2}{3}\pi$; 5) 0.
10.	Найти объем тела, ограниченного поверхностями: $x^2+y^2=z$, $z=4$.	1) 2π; 2) 4π; 3) 6π; 4) 7π; 5) 8π.

Тест «Кратные интегралы»

Вариант 30

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Вычислить интеграл: $\int\limits_{-2}^{1} dx \int\limits_{2}^{3} (x+y-1)dy$.	1) 0; 2) 1; 3) 5; 4) 2; 5) 3.
2.	Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_{0}^{2} dy \int\limits_{y/3}^{y/2} f(x,y)dx + \int\limits_{2}^{3} dy \int\limits_{y/3}^{1} f(x,y)dx$.	
3.	Вычислить интеграл из задания 2, если $f(x,y) = y+2$.	1) $\frac{11}{6}$; 2) $\frac{11}{3}$; 3) $\frac{6}{11}$; 4) $\frac{5}{6}$; 5) $\frac{7}{5}$.
4.	Вычислить интеграл $\iint\limits_{D} \sqrt{x^2+y^2-4}dxdy$ область D ограниченна кривыми: $x^2+y^2=16,\ x^2+y^2=9,\ y\ge 0$.	1) $4\sqrt{12}\pi$; 2) $\pi\left(12^{3/2}-5^{3/2}\right)$; 3) $\frac{\pi}{3}\left(\sqrt{5}-\sqrt{12}\right)$; 4) $\frac{\pi}{3}\left(12^{3/2}-5^{3/2}\right)$; 5) $4\sqrt{5}\pi$.
5.	Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=x^2,\ x=1,\ y=0$.	1) $\frac{2}{3}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) $\frac{3}{2}$; 4) $\frac{1}{2}$; 5) $\frac{1}{6}$.
6.	Вычислить интеграл $\int\limits_{0}^{9} dx \int\limits_{0}^{2} dy \int\limits_{0}^{1} xyzdz$.	1) $\frac{41}{2}$; 2) $\frac{51}{2}$; 3) $\frac{91}{3}$; 4) $\frac{61}{2}$; 5) $\frac{81}{2}$.
7.	Вычислить интеграл $\iiint\limits_{V} (y-x-z)dxdydz$, если область V ограничена поверхностями: $y-z-x=4,\ x=0,\ y=0,\ z=0$.	1) $\frac{416}{3}$; 2) $\frac{314}{3}$; 3) $-\frac{416}{3}$; 4) $-\frac{314}{3}$; 5) $\frac{214}{3}$.
8.	Вычислить интеграл $\iiint\limits_{V} (z+x)dxdydz$, если область V ограничена поверхностями: $x=\sqrt{4-z^2},\ y=3,\ y=0$.	1) 16; 2) 8; 3) –8; 4) 32; 5) –16.
9.	Вычислить интеграл $\iiint\limits_{V} \left(4+x^2+y^2+z^2\right)dxdydz$, если область V ограничена поверхностями: $z=\sqrt{4-x^2-y^2},\ z=0$.	1) $\frac{256}{15}\pi$; 2) $\frac{256\pi}{5}$; 3) $\frac{512\pi}{3}$; 4) $\frac{512}{15}\pi$; 5) $\frac{482}{5}\pi$.
10.	Найти объем тела, ограниченного поверхностями: $x^2+y^2+z^2=2,\ x^2+y^2=z$ (внутри параболоида).	1) $\frac{\pi}{3}(4\sqrt{2}-7)$; 2) $\frac{4\sqrt{2}\pi}{3}$; 3) $\frac{\pi}{6}(8\sqrt{2}-7)$; 4) $\frac{\pi}{6}(7-4\sqrt{2})$; 5) $\frac{\pi}{3}(4\sqrt{2}-5)$.

Тест «Кратные интегралы»

Ответы

Варианты	Задания 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	$\int_0^2 dx \int_x^{2x} f(x,y)dy$	1	3	4	5	2	3	4	5
2	1	$\int_0^1 dy \int_y^{2y} f(x,y)dx$	3	2	4	3	1	5	2	4
3	3	$\int_0^1 dx \int_{x/2}^{2x} f(x,y)dy$	2	1	5	4	3	1	5	2
4	5	$\int_0^1 dy \int_y^{2-y} f(x,y)dx$	4	3	1	2	4	2	3	5
5	4	$\int_0^1 dx \int_{2x}^{3-x} f(x,y)dy$	5	1	2	3	5	4	1	3
6	1	$\int_0^1 dy \int_{y-2}^{-y} f(x,y)dx$	3	4	3	1	2	5	4	2
7	3	$\int_{-2}^0 dx \int_{-x/2}^{-x} f(x,y)dy$	1	2	5	4	1	2	3	4
8	2	$\int_0^{4/3} dy \int_{y/2}^{2-y} f(x,y)dx$	4	5	1	3	3	4	5	1
9	4	$\int_{-1/2}^0 dx \int_{-x}^{x+1} f(x,y)dy$	2	5	3	1	4	3	2	5
10	5	$\int_0^1 dx \int_{2x}^{3x} f(x,y)dy$	1	4	2	5	3	1	4	3
11	2	$\int_0^2 dx \int_x^{2x} f(x,y)dy$	1	3	4	5	2	3	4	5
12	1	$\int_0^1 dy \int_y^{2y} f(x,y)dx$	3	2	4	3	1	5	2	4
13	3	$\int_0^1 dx \int_{x/2}^{2x} f(x,y)dy$	2	1	5	4	3	1	5	2
14	5	$\int_0^1 dy \int_y^{2-y} f(x,y)dx$	4	3	1	2	4	2	3	5
15	4	$\int_0^1 dx \int_{2x}^{3-x} f(x,y)dy$	5	1	2	3	5	4	1	3
16	1	$\int_0^1 dy \int_{y-2}^{-y} f(x,y)dx$	3	4	3	1	2	5	4	2

Вари-анты	Задания									
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
17	3	$\int_{-2}^{0} dx \int_{-x/2}^{-x} f(x,y)dy$	1	2	5	4	1	2	3	4
18	2	$\int_{0}^{4/3} dy \int_{y/2}^{2-y} f(x,y)dx$	4	5	1	3	3	4	5	1
19	4	$\int_{-1/2}^{0} dx \int_{-x}^{x+1} f(x,y)dy$	2	5	3	1	4	3	2	5
20	5	$\int_{0}^{1} dx \int_{2x}^{3x} f(x,y)dy$	1	4	2	5	3	1	4	3
21	2	$\int_{0}^{2} dx \int_{x}^{2x} f(x,y)dy$	1	3	4	5	2	3	4	5
22	1	$\int_{0}^{1} dy \int_{y}^{2y} f(x,y)dx$	3	2	4	3	1	5	2	4
23	3	$\int_{0}^{1} dx \int_{x/2}^{2x} f(x,y)dy$	2	1	5	4	3	1	5	2
24	5	$\int_{0}^{1} dy \int_{y}^{2-y} f(x,y)dx$	4	3	1	2	4	2	3	5
25	4	$\int_{0}^{1} dx \int_{2x}^{3-x} f(x,y)dy$	5	1	2	3	5	4	1	3
26	1	$\int_{0}^{1} dy \int_{y-2}^{-y} f(x,y)dx$	3	4	3	1	2	5	4	2
27	3	$\int_{-2}^{0} dx \int_{-x/2}^{-x} f(x,y)dy$	1	2	5	4	1	2	3	4
28	2	$\int_{0}^{4/3} dy \int_{y/2}^{2-y} f(x,y)dx$	4	5	1	3	3	4	5	1
29	4	$\int_{-1/2}^{0} dx \int_{-x}^{x+1} f(x,y)dy$	2	5	3	1	4	3	2	5
30	5	$\int_{0}^{1} dx \int_{2x}^{3x} f(x,y)dy$	1	4	2	5	3	1	4	3

ТЕСТ: «ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ»

Вариант 1

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Проверить, является ли функция $y = Ce^{-2x}$ решением уравнением $y' + 2y = 0$	
2.	Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения $xydx + (x+1)dy = 0$	1) $y = C(x+1)e^{-x}$; 2) $y = Ce^{-x}$; 3) $y = C + e^{x}$; 4) $y = x+1$; 5) $y = C$.
3.	Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения $xy' = y - xe^{y/x}$	1) $y = \ln y/x$; 2) $x = C\ln y/x$; 3) $e^{-y/x} = \ln Cx$;4) $-y/x = \ln Cx$; 5) $C = y/x$.
4.	Решить задачу Коши $xy' - 2y = 2x^4, y(1) = 0$	1) $y = x^4 - x^2$; 2) $y = Cx^2$; 3) $y = x^2$;4) $x = y^2 - y^4$; 5) $y = x^4$.
5	Решить дифференциальное уравнение $(e^x + y + \sin y)dx + (e^y + x + x\cos y)dy = 0$	1) $y + y/4 = C$; 2) $y^4/4 = C$; 3) $y\ln x + y^4/4 = C$; 4) $y\ln x = C$ 5) $y\ln x - C = 0$
6.	Найти частное решение дифференциального уравнения $y''' = \sin x, y(0) = 1, y'(0) = 0, y''(0) = 0$	1) $y = \sin x$;2) $y = \cos x + x^2/2$; 3) $y = \cos x$; 4) $y = \cos x + x$; 5) $y = x^2/2$.
7.	Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения $(1 - x^2)y'' - xy = 2$	1) $y = \arcsin^2 x + C$; 2) $y = C_1 \arcsin x + C_2$; 3) $y = C\arcsin x$; 4) $y = \arcsin^2 x + C_1 \arcsin x + C_2$; 5) $y = C_1 + C_2 \arcsin x$
8	Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + y' = 2x - 1$	1) $y = C_1 + C_2 + x^2 - 3x$ 2) $y = C_1 + C_2 e^{-x} + x^2$ 3) $y = C_1 + C_2 e^{-x} + x^2 - 3x$ 4) $y = x^2 - 3x$ 5) $y = C_1 x^2 - 3xC_2$
9	Решить дифференциальное уравнение $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$	1) $y = e^x(x\ln\|x\| + C_1 + C_2 x)$; 2) $y = x\ln\|x\| + C_1$ 3) $y = C_1 + C_2 x$ 4) $y = e^x x\ln\|x\|$; 5) $y = e^x(C_1 + C_2 x)$
10	Решить систему дифференциальных уравнений $\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = 3x + 4y. \end{cases}$	1) $x = C_1 + C_2 e^t, y = C_1 + C_2$ 2) $x = C_1 e^{5t} + C_2 e^t, y = 3C_1 e^{5t} - C_2 e^t$ 3) $x = C_1 e^t + C_2 e^{5t}, y = 3C_1 + C_2 e^t$ 4) $x = C_1 e^{5t} + C_2 e^{5t}, y = C_1 e^t - C_2 e^t$ 5) $x = C_1 e^{5t} + C_2 e^t, y = C_1 e^{5t} - C_2 e^t$

Тест: «Дифференциальные уравнения»

Вариант 2

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Проверить, является ли функция $y = Cx^3$ решением уравнением $3y - xy' = 0$	
2.	Найти частное решение (чстный интеграл) дифференциального уравнения $y'ctgx + y = 2, y(0) = -1$	1) $y = \sin x$; 2) $y = -3\cos x + 2$; 3) $y = -\cos x$; 4) $y = -\sin x + 1$; 5) $y = \sin xC$.
3.	Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения $y^2 + x^2 y' = xyy'$	1) $Cy = e^{y/x}$; 2) $x = Ce^{y/x}$; 3) $e^{-y/x} = C$; 4) $e^x C = y$; 5) $xC = y$.
4.	Решить задачу Коши $xy' + y + xe^{-x^2} = 0, y(1) = 1/(2e)$	1) $y = e^{-x^2}$; 2) $y = x^2$; 3) $y = e^x$; 4) $y = e^{-x^2}/2x$; 5) $y = e^{x^4}$.
5	Решить дифференциальное уравнение $(10xy - 8y + 1)dx + (5x^2 - 8x + 3)dy = 0$	1) $x^2 = y\ln(C/y)$; 2) $y^2 = x\ln(C/x)$; 3) $x = \ln y$; 4) $y = C\ln x$; 5) $y = Cx$
6	Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' = xe^x, y(0) = 1, y'(0) = 0$	1) $y = e^x(x-2) + x + 3$; 2) $y = e^x \cos x$; 3) $y = e^x(x-2)$; 4) $y = x + 3$; 5) $y = x - 2$.
7	Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' = y'e^y, y(0) = 0, y'(0) = 1$	1) $y = \ln x$; 2) $y = \ln\|1-x\|$; 3) $y = -\ln\|1-x\|, y = 0$; 4) $y = \ln\|x\|, y = 0$; 5) $y = 0$
8	Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 2y' + 5y = 10e^{-x}\cos 2x$	1) $y = e^x(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x) + e^{-x}\cos 2x$; 2) $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + e^x\cos 2x$; 3) $y = C_1 e^{-x} + \cos 2x$; 4) $y = e^x(C_1\cos 2x + \sin 2x + \cos 2x)$ 5) $y = C_1 e^{-x} - 3xC_2 + \cos 2x$
9	Решить дифференциальное уравнение $y'' + 3y' + 2y = 1/(e^x + 1)$	1) $y = (e^{-x} + e^{-2x})\ln(e^x + 1)$; 2) $y = \ln e^x + C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$; 3) $y = (e^{-x} + e^{-2x})\ln(e^x + 1) + C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$ 4) $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$ 5) $y = \ln(e^x + 1) + C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$
10	Решить систему дифференциальных уравнений $\begin{cases} x' = -2x - y + \sin t, \\ y' = -4x + 2y + \cos t. \end{cases}$	1) $x = C_1 + C_2 t, y = -2C_1 + C_2(2t+1)$ 2) $x = C_1 + C_2 t +, y = -2C_1 + C_2(2t+1) - 2\cos t$ 3) $x = C_1 + C_2 t + 2\sin t, y = -2C_1 + C_2(2t+1)$ 4) $x = C_1 + C_2 t, y = -2C_1 + C_2(2t+1) - 3\sin t - 2\cos t$ 5) $x = C_1 + C_2 t + 2\sin t, y = -2C_1 + C_2(2t+1) - 3\sin t - 2\cos t$

Тест: «Дифференциальные уравнения»
Вариант 3

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Проверить, является ли функция $y=\frac{1}{x}$ решением уравнением $xy'+y=y^2$	
2.	Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения $(x+2x^3)dx+(y+2y^3)dy=0$	1) $y^4=C$; 2) $x^2+y^2+x^4+y^4=C$; 3) $y=C-x^2-y^2$; 4) $y=Cx^2+y^2$; 5) $x^2-y^2-x^4-y^4=C$.
3.	Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения $xy'=y\cos\ln(y/x)$	1) $Cy=\ln y/x$; 2) $ctg(\frac{1}{2}\ln y)=x$; 3) $tg(\ln y/x)=\ln x$; 4) $-y/x=\ln Cx$; 5) $ctg(\frac{1}{2}\ln\frac{y}{x})=\ln Cx$
4.	Решить задачу Коши $xy'+x=4y^3+3y^2, y(2)=1$	1) $x=y^3+y^2$; 2) $y=x^2+x^3$; 3) $y=x^2+x$; 4) $y=x^2-x^4$; 5) $y=x^2$.
5	Найти частное решение дифференциального уравнения $ye^x dx+(y+e^x)dy=0, y(0)=0$	1) $ye^x=3/2$; 2) $e^x+y^2/2=1/2$; 3) $y+y^2/2=1/2$; 4) $y^2/2=3/2$; 5) $ye^x+y^2=3/2$
6.	Найти общее решение дифференциального уравнения $y'''=x+\cos x$	1) $y=\sin x$; 2) $y=x^4-\sin x+C_1x+C_2$; 3) $y=\frac{1}{24}x^4-\sin x+C_1x^2$; 4) $y=\frac{1}{24}x^4-\sin x+C_1x^2+C_2x+C_3$; 5) $y=x_4/24-\sin x+C_1x+C_2$.
7.	Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения $x^3y''+x^2y'=1$	1) $y=C_1\ln x+1/x+C_2$; 2) $y=C_1\ln x+C_2$; 3) $y=C_1\ln x$; 4) $y=C_1+C_2/x$; 5) $y=C\ln x$
8.	$y''+y=\frac{1}{\sin x}$	1) $y=(C_1+\ln\|\sin x\|)+(C_2-x)\cos x$; 2) $y=(C_1+\ln\|\sin x\|)\sin x+(C_2-x)$; 3) $y=(C_1+\ln\|\sin x\|)\sin x+(C_2-x)\cos x$; 4) $y=C_1\sin x+C_2\cos x$; 5) $y=C_1+C_2$.
9	Найти общее решение дифференциального уравнения $y''-12y'+36y=14e^x$	1) $y=C_1e^{6x}+C_2xe^{6x}+7x^2e^{6x}$ 2) $y=C_1+C_2e^{6x}+x^2$ 3) $y=xe^{6x}C_1+C_2e^{6x}+x^2-3x$ 4) $y=7x^2e^{6x}$ 5) $y=e^{6x}C_1x^2-e^{6x}C_2$
10	Решить систему дифференциальных уравнений $\begin{cases}x'=x-y,\\ y'=-4x+4y.\end{cases}$	1) $x=C_1+C_2e^t, y=C_1+C_2$ 2) $x=C_1e^{5t}+C_2e^t, y=3C_1e^{5t}-C_2e^t$ 3) $x=C_1e^t+C_2e^{5t}, y=3C_1+C_2e^t$ 4) $x=C_1e^{5t}+C_2e^{5t}, y=C_1e^t-C_2e^t$ 5) $x=C_1+C_2e^{5t}, y=C_1-4C_2e^{5t}$

Тест: «Дифференциальные уравнения»

Вариант 4

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Проверить, является ли функция $y = 3\sin x$ решением уравнением $y'tgx - y = 1$	
2.	Решить задачу Коши $(xy^2 + x)dx + (x^2 y - y)dy = 0, y(0) = 1$	1) $y^2 = 1$; 2) $x^2 + y^2 = 2/(1 - x^2)$; 3) $1 + y^2 = 2/(1 - x^2)$; 4) $1 = x^2 + y^2$; 5) $x^2 - y^2 = 1$.
3.	Решить задачу Коши $(xy' - y)arctg\; y/x = x, y(1) = 0$	1) $\sqrt{x^2 + y^2} = e^{\frac{y}{x}arctg\frac{y}{x}}$; 2) $\ln\frac{y}{x} = \frac{x}{y}$; 3) $tg(\ln y/x) = \ln\frac{x}{y}$; 4) $y/x = Cx$; 5) $e^{\frac{y}{x}arctg\frac{y}{x}} = \frac{y}{x}$
4.	Найти общее решение дифференциального уравнения $y' + y = x\sqrt{y}$	1) $y = (xe^{x/2} - 2e^{x/2} + C)e^{-x}$; 2) $y = xe^{x/2} + C$; 3) $y = 2e^{x/2} + C$; 4) $y = x^2 e^{x/2} - 2e^{-x}$; 5) $y = Ce^{x/2}$.
5	Найти общее решение дифференциального уравнения $(3x^2 y + \sin x)dx + (x^3 - \cos y)dy = 0$	1) $x^3 y - \cos x = C$; 2) $x^3 y - \cos x - \sin y = C$; 3) $x^3 y - \sin y = C$; 4) $x^3 y = C$ 5) $x^3 y + \cos x + \sin y = C$
6.	Найти общее решение дифференциального уравнения $y''' = x\sin x$	1) $y = -x\sin x$; 2) $y = -x\cos x + C_1 x + C_2$; 3) $y = -\sin x + C_1$; 4) $y = -\sin x + C_1 x^2$; 5) $y = -x\sin x - 2\cos x + C_1 x + C_2$.
7.	Решить задачу Коши $y'^2 + 2yy'' = 0, y(0) = 1, y'(0) = 1$	1) $y = (1 + 3x/2)^{2/3}$; 2) $y = 1 \pm 3x/2$; 3) $y = 2$; 4) $y = (1 \pm 3x/2)^{2/3}, y = 1$; 5) $y = 1$
8	Найти общее решение однородного дифференциального уравнения $y'' + 2y' + y = 3e^{-x}\sqrt{x+1}$	1) $y = e^{-x}(C_1 + C_2 x)$; 2) $y = e^{-x}(4(x+1)^{5/2}/5)$; 3) $y = (4(x+1)^{5/2}/5 + C_1 + C_2 x)$; 4) $y = e^{-x}(4(x+1)^{5/2}/5 + C_1 + C_2 x)$; 5) $y = e^{-x}Cx$.
9	Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 3y' + 2y = 3\cos x + 19\sin x$	1) $y = C_1 e^{6x} + C_2 xe^{6x}$ 2) $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{6x} + \cos x$ 3) $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x} + 6\cos x + \sin x$ 4) $y = e^{2x} + e^{x}$ 5) $y = C_1 x - e^{2x} C_2$
10	Решить систему дифференциальных уравнений $\begin{cases} x' = -x - 2y + 2e^{-t}, \\ y' = 3x + 4y + e^{-t}. \end{cases}$	1) $x = -2e^{-t}, y = e^{-t}$ 2) $x = -2e^{-t} + C_1 e^{t} + 2C_2 e^{2t}, y = e^{-t} - C_1 e^{t} - 3C_2 e^{2t}$ 3) $x = C_1 e^{t} + 2C_2 e^{2t}, y = C_1 e^{t} - 3C_2 e^{2t}$ 4) $x = -2e^{-t} + 2C\,e^{2t}, y = e^{-t} - C\,e^{t}$ 5) $x = -2e^{-t} + C_1 e^{t} - C_2 e^{2t}, y = e^{-t} - C_1 e^{t} + C_2 e^{2t}$

Тест: «Дифференциальные уравнения»

Вариант 5

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Проверить, является ли функция $y = x(5 - \ln x)$ решением уравнением $(x - y)dx + xdy = 0$	
2.	Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения $\sin xy' = y\cos x + 2\cos x$	1) $y = C\sin x - 2$; 2) $y = C\cos x$; 3) $y = \sin x + 2$; 4) $C = \sin x + \cos x$; 5) $y = C\cos x + 2$.
3.	Решить задачу Коши $(y^2 - 2xy - x^2)dx + (x^2 - 2xy - y^2)dy = 0, y(1) = -1$	1) $y = x$; 2) $y = \ln x$; 3) $y = -x$; 4) $y = Cx$; 5) $Cx + 1 = y$
4.	Найти общее решение дифференциального уравнения $y' + 2y = y^2 e^x$	1) $y = Ce^{2x} + e^x$; 2) $y = Ce^{x/2}$; 3) $y = e^x$; 4) $y = 1/(Ce^{2x} + e^x)$; 5) $y = e^{2x} + Ce^x$.
5	Найти общее решение дифференциального уравнения $(e^{x+y} + 3x^2)dx + (e^{x+y} + 4y^3)dy = 0$	1) $e^{x+y} + x^3 + y^4 = C$; 2) $x^3 + y^4 = C$; 3) $e^{x+y} = C$; 4) $e^{x+y} + x^3 = C$; 5) $e^{x+y} + y^4 = C$
6.	Решить задачу Коши $y'' = \cos x + e^{-x}, y(0) = -e^{-\pi}, y'(0) = 1$	1) $y = -\cos x$; 2) $y = -\cos x + e^{-x} + 2x - e^{-\pi}$; 3) $y = -\cos x + 2x - e^{-\pi}$; 4) $y = -\cos x + e^{-\pi}$; 5) $y = e^{-\pi} + C_1 x + C_2$.
7.	Найти общее решение дифференциального уравнения $xy'' = y'$	1) $y = x^2/2$; 2) $y = C_1 + C_2$; 3) $y = C_1$; 4) $y = C_1\dfrac{x^2}{2} + C_2$; 5) $y = C_1\dfrac{x^2}{2}$
8.	Найти общее решение однородного дифференциального уравнения $y'' - 2y' + y = x^{-2}e^x$	1) $y = C_1 - \ln x + C_2 x$; 2) $y = (C_1 + C_2 x)e^x$; 3) $y = e^x$; 4) $y = (C_1 + C_2)e^x$; 5) $y = (C_1 - \ln x + C_2 x)e^x$.
9	Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 8y' + 17y = 10e^{2x}$	1) $y = C_1 e^{4x} + C_2 x e^{4x}$ 2) $y = e^{4x}(C_1\cos x + C_2\sin x) + 2e^{2x}$ 3) $y = e^{4x}(C_1\cos x + C_2\sin x)$ 4) $y = \cos x + \sin x + 2e^{2x}$ 5) $y = 2e^{2x}$
10	Решить систему дифференциальных уравнений $\begin{cases} x' = -2x, \\ y' = y. \end{cases}$	1) $x = C_1 + C_2 e^{-2t}, y = C_1 e^t + C_2$ 2) $x = C_2 e^{-2t}, y = C_1 e^t + C_2$ 3) $x = C_1 + C_2 e^{-4t}, y = C_1 e^{4t} + C_2$ 4) $x = C_1, y = C_1 e^t$ 5) $x = C_1 + C_2, y = C_1 + C_2$

Тест: «Дифференциальные уравнения»

Вариант 6

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Проверить, является ли функция $y=5e^{-2x}+\dfrac{e^x}{3}$ решением уравнением $dy+(2y-e^x)dx=0$	
2.	Решить задачу Коши $xy'=\dfrac{y}{\ln x},\, y(e)=1$	1) $y=C\ln x$; 2) $y=\ln x$; 3) $y=\ln x+C$; 4) $x=\ln y$; 5) $y=\ln x+1$.
3.	Решить задачу Коши $(y^2+x^2)dx=2xydy,\, y(4)=0$	1) $(x-2)^2-y^2=4$; 2) $y=(x-2)^2$; 3) $x-2=y$;4) $x=(y-2)^2$; 5) $(x-2)^2+y^2=4$
4.	Найти общее решение дифференциального уравнения $xy'+2y+x^5y^3e^x=0$	1) $y=1/(x^2\sqrt{2(e^x+C)})$; 2) $y=1/(x^2\sqrt{2})$;3) $y=1/x^2\sqrt{e^x}$; 4) $y=1/\sqrt{(C+e^x)}$;5) $y=x^2$.
5.	Решить задачу Коши $(x^2+y^2+y)dx+(2xy+x+e^y)dy=0,$ $y(0)=0$	1) $x^3/3+xy^2+xy=1$; 2) $xy+e^y=1$; 3) $x^3/3+e^y=1$; 4) $x^3/3+xy+e^y=1$ 5) $x^3/3+xy^2+xy+e^y=1$
6.	Найти общее решение дифференциального уравнения $y''=1/x^2$	1) $y=-\ln\|x\|$; 2) $y=-\ln\|x\|+C$; 3) $y=-\ln\|x\|+2x+5$; 4) $y=-\ln\|x\|+5$; 5) $y=2x+5$.
7.	Найти частное решение дифференциального уравнения $y''=2-y,\, y(0)=2,\, y'(0)=2$	1) $y=2\cos x$; 2) $y=2\sin x$;3) $y=2$; 4) $y=2\cos x+2$;5) $y=2\sin x+2$
8.	Найти общее решение однородного дифференциального уравнения $y''+4y'+4y=e^{-2x}/x^3$	1) $y=e^{-2x}(C_1+C_2x)$; 2) $y=e^{-2x}(C_1+C_2x+1/x)$; 3) $y=e^{-2x}(C_1+C_2x+1/2x)$; 4) $y=e^{-2x}/2x$; 5) $y=e^{-2x}(C+1/2x)$.
9	Найти общее решение дифференциального уравнения $y''-14y'+49y=144\sin 7x$	1) $y=C_1e^{7x}+C_2xe^{7x}$ 2) $y=C_1e^{7x}+C_2xe^{7x}+2\cos 7x$ 3) $y=2\cos 7x$ 4) $y=e^{7x}+xe^{7x}$ 5) $y=C_1+2\cos 7x$
10	Решить систему дифференциальных уравнений $\begin{cases} x'=-y+e^{3t}, \\ y'=-x+2e^{3t}. \end{cases}$	1) $x=C_1e^t+C_2e^{-t},\, y=-C_1e^t+C_2e^{-t}$ 2) $x=C_1e^t+C_2e^{-t}+e^{3t},\, y=-C_1e^t+C_2e^{-t}+5e^{3t}$ 3) $x=C_1e^t+C_2e^{-t}+e^{3t}/8,\, y=-C_1e^t+C_2e^{-t}+5e^{3t}/8$ 4) $x=C_1e^t+C_2e^{-t}+1/8,\, y=-C_1e^t+C_2e^{-t}+5/8$ 5) $x=C_1e^t+C_2e^{-t}+3e^{3t}/8,\, y=-C_1e^t+C_2e^{-t}+e^{3t}/8$

Тест: «Дифференциальные уравнения»

Вариант 7

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Проверить, является ли функция $y = x^2 + 3$ решением уравнением $xy'' = y'$	
2.	Найти общее решение (общий интеграл) уравнения $y' = \dfrac{4}{x^2 - 4}$	1) $y = \ln\|x-2\| + C$; 2) $y = \ln x$; 3) $y = \ln\|(x-2)/(x+2)\| + C$; 4) $y = \ln\|1/(x+2)\| + C$; 5) $y = \ln\|x+2\|$.
3.	Решить задачу Коши $y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{y}, y(1) = 1$	1) $(x-2)^2 - y^2 = 4$; 2) $y^2 = x^2$; 3) $y^2 = 2\ln x + 1$;4) $x = 2\ln y$; 5) $y^2 = x^2(2\ln x + 1)$
4.	Найти общее решение дифференциального уравнения $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2$	1) $y = (C+x)(1+x^2)$; 2) $y = C + x$;3) $y = C + x^2$; 4) $y = 1 + x^2$;5) $x = (C+1)(y^2+1)$.
5	Найти общее решение дифференциального уравнения $2x\cos^2 y dx + (2y - x^2 \sin 2y)dy = 0$	1) $y = -1/(x^2(x^2+C))$; 2) $y = -1/(x^2+C)$; 3) $y = -1/x^2$; 4) $y = -C/x^4$; 5) $y = -C/(x^2+1)$
6	Найти общее решение дифференциального уравнения $y''ctgx + y' = 2$	1) $y = C_1 \sin x$; 2) $y = 2x + C_1 \sin x$; 3) $y = 2x + C_1 \sin x + C_2$; 4) $y = C_1 + C_2$; 5) $y = 2x$.
7.	Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' = 1/\cos^2(x/2), y(0) = 0, y'(0) = 1$	1) $y = x$; 2) $y = -4\ln\|\cos x/2\| + x$; 3) $y = \cos x/2$; 4) $y = -4\ln\|\cos x/2\|$;5) $y = \ln\|\cos x/2\|$
8.	Найти общее решение однородного дифференциального уравнения $y'' - y' = e^{2x}\cos(e^x)$	1) $y = \cos(e^x) + \sin(e^x)$; 2) $y = C + \cos(e^x)$; 3) $y = -\cos(e^x)$; 4) $y = C_1 + C_2 e^x - \cos(e^x)$; 5) $y = C_1 + C_2 e^x$.
9	Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + 4y = 15e^x$	1) $y = C_1 + C_2 e^{-4x}$;2) $y = C_1 + C_2 e^{-4x} + 3e^x$; 3) $y = 3e^x$; 4) $y = C_1 e^x + C_2 x e^{-4x}$; 5) $y = C_1 + C_2 e^x$
10	Решить систему дифференциальных уравнений $\begin{cases} x' = 4x - 8y, \\ y' = -8x + 4y. \end{cases}$	1) $x = C_1 + C_2 e^{-4t}, y = C_1 e^{12t} + C_2$ 2) $x = C_2, y = C_1 e^{12t} + C_2$ 3) $x = C_1 e^{12t}, y = -C_1 e^{12t}$ 4) $x = C_1 e^{-4t} + C_2 e^{12t}, y = C_1 e^{-4t} - C_2 e^{12t}$ 5) $x = C_1 e^{-4t} + C_2 e^{4t}, y = C_1 e^{-4t} - e^{4t} C_2$

Тест: «Дифференциальные уравнения»

Вариант 8

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Проверить, является ли функция $y=\dfrac{x^3}{12}+1$ решением уравнением $(y'')^2=y^2$	
2.	Решить задачу Коши $y'tgx-y=1, y(\pi/2)=1$	1) $y=\sin x$; 2) $y=2\sin x-1$; 3) $y=\cos x$; 4) $y=\cos x+1$; 5) $y=2\cos x-1$.
3.	Решить задачу Коши $xy'=y(1+\ln\dfrac{y}{x}), y(1)=e^{-1/2}$	1) $x=ye^{x/2}$; 2) $y=x$; 3) $y=e^{-x/2}$;4) $y=xe^{-x/2}$;5) $y=e^x$
4.	Найти общее решение дифференциального уравнения $2xy'-y=3x^2$	1) $y=C\sqrt{x}+x^2$; 2) $y=x^2$;3) $y=Cx^2$; 4) $y=C\sqrt{x}$;5) $y=Cx^2-x$.
5	Найти общее решение дифференциального уравнения $(1/x-y^3+4)dx+(-1/y-3xy)dy=0$	1) $\ln\lvert x/y\rvert=C$; 2) $\ln\lvert x/y\rvert-xy^3=C$; 3) $\ln\lvert x/y\rvert+4x=C$; 4) $xy^3+4x=C$ 5) $\ln\lvert x/y\rvert-xy^3+4x=C$
6.	Найти общее решение дифференциального уравнения $y'''=\cos 3x$	1) $y=-\sin 3x/27$; 2) $y=C_1x^2/2$; 3) $y=-\sin 3x/27+C_1x^2/2+C_2x+C_3$; 4) $y=-\sin 3x/27+C_1x^2/2$; 5) $y=-\sin 3x/27++C_3$.
7.	Найти частное решение дифференциального уравнения $y''=1/\sqrt{y}, y(0)=y'(0)=0$	1) $x=2y^{3/4}/3$; 2) $y=2x^{3/4}/3$; 3) $x=2y^{3/4}/3+C$; 4) $y=2x/3$;5) $y=x^{3/4}$
8.	Найти общее решение однородного дифференциального уравнения $y''-2y'+y=e^x/\sqrt{4-x^2}$	1) $y=\sqrt{4-x^2}+x\arcsin(x/2)$; 2) $y=e^x(\sqrt{4-x^2}+x\arcsin(x/2))$; 3) $y=e^x(C+\sqrt{4-x^2}+x\arcsin(x/2))$; 4) $y=e^x(C_1+C_2x)$; 5) $y=e^x(C_1+C_2x+\sqrt{4-x^2}+x\arcsin(x/2))$.
9	Найти общее решение дифференциального уравнения $y''-4y'=8-16x$	1) $y=C_1+C_2e^{4x}$;2) $y=C_1+C_2e^{4x}+2x^2-x$ 3) $y=C_1+2x^2-x$; 4) $y=C_1+C_2e^{4x}-x$ 5) $y=2x^2-x$
10	Решить систему дифференциальных уравнений $\begin{cases}5x'-2y'+4x-y=e^{-t},\\ x'+8x-3y=5e^{-t}.\end{cases}$	1) $x=2e^{-t}-C_1e^t-C_2e^{-2t}, y=3e^{-t}-C_1e^t-e^{-2t}2C_2$ 2) $x=2e^{-t}+Ce^{-2t}, y=3e^{-t}+e^{-2t}2C$ 3) $x=C_1e^t+C_2e^{-2t}, y=C_1e^t+e^{-2t}2C_2$ 4) $x=2e^{-t}, y=3e^{-t}$ 5) $x=2e^{-t}+C_1e^t+C_2e^{-2t}, y=3e^{-t}+C_1e^t+e^{-2t}2C_2$

Тест: «Дифференциальные уравнения»
Вариант 9

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Проверить, является ли функция $y=4e^{x}+2e^{3x}$ решением уравнением $y''-4y'+3y=0$	
2.	Найти общее решение (общий интеграл) уравнения $y'=y^2\cos x$	1) $y=1/(C-\sin x)$; 2) $y=1/\cos x$; 3) $y=\cos x$; 4) $y=1/(\cos x+C)$; 5) $y=1/C$.
3.	Найти общее решение (общий интеграл) уравнения $(x^2-2xy)y'=xy-y^2$	1) $x/y+2\ln x=y$; 2) $x/y=C$; 3) $x/y+2\ln y/x=-\ln Cx$; 4) $y=2\ln y/x$;5) $x/y=-\ln Cx$
4.	Решить задачу Коши $y'+2xy=xe^{-x^2}, y(0)=0$	1) $y=0,5x^2e^{-x^2}$; 2) $y=0,5x^2$;3) $y=0,5e^{-x^2}$; 4) $y=x^2e^{-x^2}$;5) $y=0,5x$.
5	Найти честное решение дифференциального уравнения $(2x+ye^{xy})dx+(1+xe^{xy})dy=0, y(0)=1$	1) $y+e^{xy}=0$; 2) $e^{xy}+x^2-2=0$; 3) $y+e^{xy}+x^2-2=0$; 4) $e^{xy}+x^2=0$; 5) $y=e^{xy}$
6.	Найти общее решение дифференциального уравнения $y''-\dfrac{y'}{x-1}=x(x-1)$	1) $y=x^4/8-x^3/6$; 2) $y=x^4/8-x^3/6+C_1x^2/2-C_1/x+C_2$; 3) $y=x^4/8-C_1/x+C_2$; 4) $y=C_1x^2/2-C_1/x+C_2$; 5) $y=C_1/x+C_2$.
7.	Найти частное решение дифференциального уравнения $y''=1/x^2, y(1)=3, y'(1)=1$	1) $y=-\ln\|x\|$; 2) $y=-\ln\|x\|+2x$; 3) $x=-\ln\|y\|$; 4) $y=-\ln\|x\|+2x+1$; 5) $y=-\ln\|x\|+1$
8.	Найти общее решение однородного дифференциального уравнения $y''+y=1/(\cos 2x)^{3/2}$	1) $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\sqrt{\cos 2x}$; 2) $y=C_1\cos x+C_2\sin x$; 3) $y=C_1\cos x+C_2\sin x-\sqrt{\cos x}$; 4) $y=C_1\cos x+C_2\sin x-\sqrt{\cos 2x}$; 5) $y=C_1\cos x+C_2\sin x-\sqrt{\sin 2x}$.
9	Найти общее решение дифференциального уравнения $y''+4y'-6y=(6x+1)e^{3x}$	1) $y=C_1e^{-3x}+C_2e^{2x}$;2) $y=C_1e^{-3x}+(x-1)e^{2x}$ 3) $y=C_1e^{-3x}+C_2e^{-3x}x$ 4) $y=C_1e^{-3x}+C_2e^{2x}+xe^{3x}$ 5) $y=C_1e^{-3x}+C_2e^{2x}+(x-1)e^{3x}$
10	Решить систему дифференциальных уравнений $\begin{cases} x'=4x-y, \\ y'=-x+4y. \end{cases}$	1) $x=C_1e^{3t}+C_2e^{5t}, y=C_1e^{3t}-C_2e^{5t}$ 2) $x=C_1e^{3t}-C_2e^{5t}, y=C_1e^{3t}$ 3) $x=C_1e^{3t}-C_2e^{5t}, y=C_1e^{3t}-C_2e^{5t}$ 4) $x=C_1, y=C_1e^{3t}-C_2e^{5t}$ 5) $x=C_1e^{3t}, y=C_1e^{3t}$

Тест: «Дифференциальные уравнения»

Вариант 10

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Проверить, является ли функция $y=1/4$ решением уравнением $y''-4y'+4y=1$	
2.	Найти частное решение (частный интеграл) уравнения $y'=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}, y(0)=1$	1) $y=\sqrt{x}+2$; 2) $y=-\sqrt{1-x^2}+2$; 3) $y=-\sqrt{1-x^2}$; 4) $y=+2$; 5) $y=\sqrt{C}$.
3.	Найти частное решение (частный интеграл) уравнения $xy'+y=\sin x, y(\pi/2)=2/\pi$	1) $y=1/x$; 2) $y=(1-\cos x)$; 3) $y=(1-\cos x)/x$; 4) $y=(1+\cos x)/x$; 5) $y=(1-\sin x)/x$
4.	Найти общее решение дифференциального уравнения $xdy-ydx=\sqrt{x^2+y^2}dx$	1) $y=Cx^2$; 2) $\sqrt{x^2+y^2}=Cx^2$; 3) $y+\sqrt{x}=Cx^2$; 4) $y+\sqrt{x^2+y^2}=1$; 5) $y+\sqrt{x^2+y^2}=Cx^2$.
5.	Найти общее решение дифференциального уравнения $dx/y-xdy/y^2=0$	1) $x/y=C$; 2) $x^2/y=C$; 3) $x/y^2=C$; 4) $x=C$; 5) $y=C$
6.	Найти общее решение дифференциального уравнения $y''=\cos^2 x$	1) $y=C_1x$; 2) $y=C_1x+C_2$; 3) $y=\cos 2x/8+C_1x+C_2$; 4) $y=x^2/4-\cos 2x/8+C_1x+C_2$; 5) $y=x^2/4+C_1x+C_2$.
7.	Найти частное решение дифференциального уравнения $y^3y''=-1, y(1)=1, y'(1)=0$	1) $y=\sqrt{2x-x^2}$; 2) $y=\sqrt{2x}$; 3) $x=\sqrt{2y-y^2}$; 4) $x=\sqrt{2y}$; 5) $y=\sqrt{x}$
8.	Найти общее решение однородного дифференциального уравнения $y''+y=1/\cos^3 x$	1) $y=C_1\sin x+C_2\cos x$; 2) $y=C_1\sin x+C_2\cos x+1/(2\cos x)$; 3) $y=C\cos x$; 4) $y=C\sin x+1/(2\cos x)$; 5) $y=1/(2\cos x)$.
9	Найти общее решение дифференциального уравнения $4y''-4y'+y=-25\cos x$	1) $y=3\cos x+4\sin x$ 2) $y=C_1e^{x/2}+C_2xe^{x/2}+3\cos x$ 3) $y=C_2xe^{x/2}+3\cos x+4\sin x$ 4) $y=C_1e^{x/2}+C_2xe^{x/2}$ 5) $y=C_1e^{x/2}+C_2xe^{x/2}+3\cos x+4\sin x$
10	Решить систему дифференциальных уравнений $\begin{cases} x'-y=-\cos t, \\ y'+x=\sin t. \end{cases}$	1) $x=C_1+C_2-t\cos t, y=-C_1+C_2+t\,\mathrm{sint}$ 2) $x=C\sin t-t\cos t, y=C\cos t+t\,\mathrm{sint}$ 3) $x=C\cos t-t\cos t, y=-C\sin t+t\,\mathrm{sint}$; 4) $x=C_1\cos t+C_2\sin t, y=-C_1\sin t+C_2\cos t+t\,\mathrm{sint}$ 5) $x=C_1\cos t+C_2\sin t-t\cos t, y=-C_1\sin t+C_2\cos t+t\,\mathrm{sint}$

Тест: «Дифференциальные уравнения»

Вариант 11

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Проверить, является ли функция $y = Ce^{-2x}$ решением уравнением $y' + 2y = 0$	
2.	Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения $xydx + (x+1)dy = 0$	1) $y = C(x+1)e^{-x}$; 2) $y = Ce^{-x}$; 3) $y = C + e^{x}$; 4) $y = x+1$; 5) $y = C$.
3.	Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения $xy' = y - xe^{y/x}$	1) $y = \ln y/x$; 2) $x = C\ln y/x$; 3) $e^{-y/x} = \ln Cx$; 4) $-y/x = \ln Cx$; 5) $C = y/x$.
4.	Решить задачу Коши $xy' - 2y = 2x^4, y(1) = 0$	1) $y = x^4 - x^2$; 2) $y = Cx^2$; 3) $y = x^2$; 4) $x = y^2 - y^4$; 5) $y = x^4$.
5	Решить дифференциальное уравнение $(e^x + y + \sin y)dx + (e^y + x + x\cos y)dy = 0$	1) $y + y/4 = C$; 2) $y^4/4 = C$; 3) $y\ln x + y^4/4 = C$; 4) $y\ln x = C$ 5) $y\ln x - C = 0$
6.	Найти частное решение дифференциального уравнения $y''' = \sin x, y(0) = 1, y'(0) = 0, y''(0) = 0$	1) $y = \sin x$; 2) $y = \cos x + x^2/2$; 3) $y = \cos x$; 4) $y = \cos x + x$; 5) $y = x^2/2$.
7.	Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения $(1-x^2)y'' - xy = 2$	1) $y = \arcsin^2 x + C$; 2) $y = C_1 \arcsin x + C_2$; 3) $y = C\arcsin x$; 4) $y = \arcsin^2 x + C_1 \arcsin x + C_2$; 5) $y = C_1 + C_2 \arcsin x$
8	Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + y' = 2x - 1$	1) $y = C_1 + C_2 + x^2 - 3x$ 2) $y = C_1 + C_2 e^{-x} + x^2$ 3) $y = C_1 + C_2 e^{-x} + x^2 - 3x$ 4) $y = x^2 - 3x$ 5) $y = C_1 x^2 - 3xC_2$
9	Решить дифференциальное уравнение $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$	1) $y = e^x(x\ln\lvert x\rvert + C_1 + C_2 x)$; 2) $y = x\ln\lvert x\rvert + C_1$ 3) $y = C_1 + C_2 x$ 4) $y = e^x x\ln\lvert x\rvert$; 5) $y = e^x(C_1 + C_2 x)$
10	Решить систему дифференциальных уравнений $\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = 3x + 4y. \end{cases}$	1) $x = C_1 + C_2 e^t, y = C_1 + C_2$ 2) $x = C_1 e^{5t} + C_2 e^t, y = 3C_1 e^{5t} - C_2 e^t$ 3) $x = C_1 e^t + C_2 e^{5t}, y = 3C_1 + C_2 e^t$ 4) $x = C_1 e^{5t} + C_2 e^{5t}, y = C_1 e^t - C_2 e^t$ 5) $x = C_1 e^{5t} + C_2 e^t, y = C_1 e^{5t} - C_2 e^t$

Тест: «Дифференциальные уравнения»

Вариант 12

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Проверить, является ли функция $y = Cx^3$ решением уравнением $3y - xy' = 0$	
2.	Найти частное решение (чстный интеграл) дифференциального уравнения $y'ctgx + y = 2, y(0) = -1$	1) $y = \sin x$; 2) $y = -3\cos x + 2$; 3) $y = -\cos x$; 4) $y = -\sin x + 1$; 5) $y = \sin xC$.
3.	Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения $y^2 + x^2 y' = xyy'$	1) $Cy = e^{y/x}$; 2) $x = Ce^{y/x}$; 3) $e^{-y/x} = C$;4) $e^x C = y$; 5) $xC = y$.
4.	Решить задачу Коши $xy' + y + xe^{-x^2} = 0, y(1) = 1/(2e)$	1) $y = e^{-x^2}$; 2) $y = x^2$; 3) $y = e^x$;4) $y = e^{-x^2} / 2x$; 5) $y = e^{x^4}$.
5	Решить дифференциальное уравнение $(10xy - 8y + 1)dx + (5x^2 - 8x + 3)dy = 0$	1) $x^2 = y\ln(C/y)$; 2) $y^2 = x\ln(C/x)$; 3) $x = \ln y$; 4) $y = C\ln x$; 5) $y = Cx$
6	Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' = xe^x, y(0) = 1, y'(0) = 0$	1) $y = e^x(x-2) + x + 3$; 2) $y = e^x \cos x$; 3) $y = e^x(x-2)$; 4) $y = x + 3$; 5) $y = x - 2$.
7	Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' = y'e^y, y(0) = 0, y'(0) = 1$	1) $y = \ln x$; 2) $y = \ln\|1 - x\|$; 3) $y = -\ln\|1 - x\|, y = 0$; 4) $y = \ln\|x\|, y = 0$;5) $y = 0$
8	Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 2y' + 5y = 10e^{-x}\cos 2x$	1) $y = e^x(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x) + e^{-x}\cos 2x$; 2) $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + e^x\cos 2x$; 3) $y = C_1 e^{-x} + \cos 2x$; 4) $y = e^x(C_1\cos 2x + \sin 2x + \cos 2x)$ 5) $y = C_1 e^{-x} - 3xC_2 + \cos 2x$
9	Решить дифференциальное уравнение $y'' + 3y' + 2y = 1/(e^x + 1)$	1) $y = (e^{-x} + e^{-2x})\ln(e^x + 1)$; 2) $y = \ln e^x + C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$; 3) $y = (e^{-x} + e^{-2x})\ln(e^x + 1) + C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$ 4) $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$ 5) $y = \ln(e^x + 1) + C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$
10	Решить систему дифференциальных уравнений $\begin{cases} x' = -2x - y + \sin t, \\ y' = -4x + 2y + \cos t. \end{cases}$	1) $x = C_1 + C_2 t, y = -2C_1 + C_2(2t+1)$ 2) $x = C_1 + C_2 t +, y = -2C_1 + C_2(2t+1) - 2\cos t$ 3) $x = C_1 + C_2 t + 2\sin t, y = -2C_1 + C_2(2t+1)$ 4) $x = C_1 + C_2 t, y = -2C_1 + C_2(2t+1) - 3\sin t - 2\cos t$ 5) $x = C_1 + C_2 t + 2\sin t, y = -2C_1 + C_2(2t+1) - 3\sin t - 2\cos t$

Тест: «Дифференциальные уравнения»
Вариант 13

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Проверить, является ли функция $y=\frac{1}{x}$ решением уравнением $xy'+y=y^2$	
2.	Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения $(x+2x^3)dx+(y+2y^3)dy=0$	1) $y^4=C$; 2) $x^2+y^2+x^4+y^4=C$; 3) $y=C-x^2-y^2$; 4) $y=Cx^2+y^2$; 5) $x^2-y^2-x^4-y^4=C$.
3.	Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения $xy'=y\cos\ln(y/x)$	1) $Cy=\ln y/x$; 2) $ctg(\frac{1}{2}\ln y)=x$; 3) $tg(\ln y/x)=\ln x$;4) $-y/x=\ln Cx$; 5) $ctg(\frac{1}{2}\ln\frac{y}{x})=\ln Cx$
4.	Решить задачу Коши $xy'+x=4y^3+3y^2, y(2)=1$	1) $x=y^3+y^2$; 2) $y=x^2+x^3$; 3) $y=x^2+x$;4) $y=x^2-x^4$; 5) $y=x^2$.
5	Найти частное решение дифференциального уравнения $ye^x dx+(y+e^x)dy=0, y(0)=0$	1) $ye^x=3/2$; 2) $e^x+y^2/2=1/2$; 3) $y+y^2/2=1/2$;4) $y^2/2=3/2$; 5) $ye^x+y^2=3/2$
6.	Найти общее решение дифференциального уравнения $y'''=x+\cos x$	1) $y=\sin x$; 2) $y=x^4-\sin x+C_1x+C_2$; 3) $y=\frac{1}{24}x^4-\sin x+C_1x^2$; 4) $y=\frac{1}{24}x^4-\sin x+C_1x^2+C_2x+C_3$; 5) $y=x_4/24-\sin x+C_1x+C_2$.
7.	Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения $x^3y''+x^2y'=1$	1) $y=C_1\ln x+1/x+C_2$; 2) $y=C_1\ln x+C_2$;3) $y=C_1\ln x$; 4) $y=C_1+C_2/x$;5) $y=C\ln x$
8.	$y''+y=\frac{1}{\sin x}$	1) $y=(C_1+\ln\lvert\sin x\rvert)+(C_2-x)\cos x$; 2) $y=(C_1+\ln\lvert\sin x\rvert)\sin x+(C_2-x)$; 3) $y=(C_1+\ln\lvert\sin x\rvert)\sin x+(C_2-x)\cos x$; 4) $y=C_1\sin x+C_2\cos x$; 5) $y=C_1+C_2$.
9	Найти общее решение дифференциального уравнения $y''-12y'+36y=14e^x$	1) $y=C_1e^{6x}+C_2xe^{6x}+7x^2e^{6x}$ 2) $y=C_1+C_2e^{6x}+x^2$ 3) $y=xe^{6x}C_1+C_2e^{6x}+x^2-3x$ 4) $y=7x^2e^{6x}$ 5) $y=e^{6x}C_1x^2-e^{6x}C_2$
10	Решить систему дифференциальных уравнений $\begin{cases}x'=x-y,\\y'=-4x+4y.\end{cases}$	1) $x=C_1+C_2e^t, y=C_1+C_2$ 2) $x=C_1e^{5t}+C_2e^t, y=3C_1e^{5t}-C_2e^t$ 3) $x=C_1e^t+C_2e^{5t}, y=3C_1+C_2e^t$ 4) $x=C_1e^{5t}+C_2e^{5t}, y=C_1e^t-C_2e^t$ 5) $x=C_1+C_2e^{5t}, y=C_1-4C_2e^{5t}$

Тест: «Дифференциальные уравнения»

Вариант 14

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Проверить, является ли функция $y = 3\sin x$ решением уравнением $y' tgx - y = 1$	
2.	Решить задачу Коши $(xy^2 + x)dx + (x^2 y - y)dy = 0, y(0) = 1$	1) $y^2 = 1$; 2) $x^2 + y^2 = 2/(1-x^2)$; 3) $1 + y^2 = 2/(1-x^2)$; 4) $1 = x^2 + y^2$; 5) $x^2 - y^2 = 1$.
3.	Решить задачу Коши $(xy' - y)arctg\, y/x = x, y(1) = 0$	1) $\sqrt{x^2+y^2} = e^{\frac{y}{x}arctg\frac{y}{x}}$; 2) $\ln\frac{y}{x} = \frac{x}{y}$; 3) $tg(\ln y/x) = \ln\frac{x}{y}$; 4) $y/x = Cx$; 5) $e^{\frac{y}{x}arctg\frac{y}{x}} = \frac{y}{x}$
4.	Найти общее решение дифференциального уравнения $y' + y = x\sqrt{y}$	1) $y = (xe^{x/2} - 2e^{x/2} + C)e^{-x}$; 2) $y = xe^{x/2} + C$; 3) $y = 2e^{x/2} + C$; 4) $y = x^2 e^{x/2} - 2e^{-x}$; 5) $y = Ce^{x/2}$.
5	Найти общее решение дифференциального уравнения $(3x^2 y + \sin x)dx + (x^3 - \cos y)dy = 0$	1) $x^3 y - \cos x = C$; 2) $x^3 y - \cos x - \sin y = C$; 3) $x^3 y - \sin y = C$; 4) $x^3 y = C$ 5) $x^3 y + \cos x + \sin y = C$
6.	Найти общее решение дифференциального уравнения $y''' = x\sin x$	1) $y = -x\sin x$; 2) $y = -x\cos x + C_1 x + C_2$; 3) $y = -\sin x + C_1$; 4) $y = -\sin x + C_1 x^2$; 5) $y = -x\sin x - 2\cos x + C_1 x + C_2$.
7.	Решить задачу Коши $y'^2 + 2yy'' = 0, y(0) = 1, y'(0) = 1$	1) $y = (1 + 3x/2)^{2/3}$; 2) $y = 1 \pm 3x/2$; 3) $y = 2$; 4) $y = (1 \pm 3x/2)^{2/3}, y = 1$; 5) $y = 1$
8	Найти общее решение однородного дифференциального уравнения $y'' + 2y' + y = 3e^{-x}\sqrt{x+1}$	1) $y = e^{-x}(C_1 + C_2 x)$; 2) $y = e^{-x}(4(x+1)^{5/2}/5)$; 3) $y = (4(x+1)^{5/2}/5 + C_1 + C_2 x)$; 4) $y = e^{-x}(4(x+1)^{5/2}/5 + C_1 + C_2 x)$; 5) $y = e^{-x}Cx$.
9	Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 3y' + 2y = 3\cos x + 19\sin x$	1) $y = C_1 e^{6x} + C_2 xe^{6x}$ 2) $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{6x} + \cos x$ 3) $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x} + 6\cos x + \sin x$ 4) $y = e^{2x} + e^{x}$ 5) $y = C_1 x - e^{2x} C_2$
10	Решить систему дифференциальных уравнений $\begin{cases} x' = -x - 2y + 2e^{-t}, \\ y' = 3x + 4y + e^{-t}. \end{cases}$	1) $x = -2e^{-t}, y = e^{-t}$ 2) $x = -2e^{-t} + C_1 e^{t} + 2C_2 e^{2t}, y = e^{-t} - C_1 e^{t} - 3C_2 e^{2t}$ 3) $x = C_1 e^{t} + 2C_2 e^{2t}, y = C_1 e^{t} - 3C_2 e^{2t}$ 4) $x = -2e^{-t} + 2C\, e^{2t}, y = e^{-t} - C\, e^{t}$ 5) $x = -2e^{-t} + C_1 e^{t} - C_2 e^{2t}, y = e^{-t} - C_1 e^{t} + C_2 e^{2t}$

Тест: «Дифференциальные уравнения»

Вариант 15

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Проверить, является ли функция $y = x(5 - \ln x)$ решением уравнением $(x - y)dx + xdy = 0$	
2.	Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения $\sin xy' = y\cos x + 2\cos x$	1) $y = C\sin x - 2$; 2) $y = C\cos x$; 3) $y = \sin x + 2$; 4) $C = \sin x + \cos x$; 5) $y = C\cos x + 2$.
3.	Решить задачу Коши $(y^2 - 2xy - x^2)dx + (x^2 - 2xy - y^2)dy = 0, y(1) = -1$	1) $y = x$; 2) $y = \ln x$; 3) $y = -x$;4) $y = Cx$; 5) $Cx + 1 = y$
4.	Найти общее решение дифференциального уравнения $y' + 2y = y^2 e^x$	1) $y = Ce^{2x} + e^x$; 2) $y = Ce^{x/2}$; 3) $y = e^x$; 4) $y = 1/(Ce^{2x} + e^x)$; 5) $y = e^{2x} + Ce^x$.
5	Найти общее решение дифференциального уравнения $(e^{x+y} + 3x^2)dx + (e^{x+y} + 4y^3)dy = 0$	1) $e^{x+y} + x^3 + y^4 = C$;2) $x^3 + y^4 = C$; 3) $e^{x+y} = C$; 4) $e^{x+y} + x^3 = C$; 5) $e^{x+y} + y^4 = C$
6.	Решить задачу Коши $y'' = \cos x + e^{-x}, y(0) = -e^{-\pi}, y'(0) = 1$	1) $y = -\cos x$; 2) $y = -\cos x + e^{-x} + 2x - e^{-\pi}$; 3) $y = -\cos x + 2x - e^{-\pi}$; 4) $y = -\cos x + e^{-\pi}$; 5) $y = e^{-\pi} + C_1 x + C_2$.
7.	Найти общее решение дифференциального уравнения $xy'' = y'$	1) $y = x^2/2$; 2) $y = C_1 + C_2$;3) $y = C_1$; 4) $y = C_1\dfrac{x^2}{2} + C_2$;5) $y = C_1\dfrac{x^2}{2}$
8.	Найти общее решение однородного дифференциального уравнения $y'' - 2y' + y = x^{-2}e^x$	1) $y = C_1 - \ln x + C_2 x$; 2) $y = (C_1 + C_2 x)e^x$; 3) $y = e^x$; 4) $y = (C_1 + C_2)e^x$; 5) $y = (C_1 - \ln x + C_2 x)e^x$.
9	Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 8y' + 17y = 10e^{2x}$	1) $y = C_1 e^{4x} + C_2 xe^{4x}$ 2) $y = e^{4x}(C_1\cos x + C_2\sin x) + 2e^{2x}$ 3) $y = e^{4x}(C_1\cos x + C_2\sin x)$ 4) $y = \cos x + \sin x + 2e^{2x}$ 5) $y = 2e^{2x}$
10	Решить систему дифференциальных уравнений $\begin{cases} x' = -2x, \\ y' = y. \end{cases}$	1) $x = C_1 + C_2 e^{-2t}, y = C_1 e^t + C_2$ 2) $x = C_2 e^{-2t}, y = C_1 e^t + C_2$ 3) $x = C_1 + C_2 e^{-4t}, y = C_1 e^{4t} + C_2$ 4) $x = C_1, y = C_1 e^t$ 5) $x = C_1 + C_2, y = C_1 + C_2$

Тест: «Дифференциальные уравнения»

Вариант 16

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Проверить, является ли функция $y=5e^{-2x}+\frac{e^x}{3}$ решением уравнением $dy+(2y-e^x)dx=0$	
2.	Решить задачу Коши $xy'=\frac{y}{\ln x}, y(e)=1$	1) $y=C\ln x$; 2) $y=\ln x$; 3) $y=\ln x+C$; 4) $x=\ln y$; 5) $y=\ln x+1$.
3.	Решить задачу Коши $(y^2+x^2)dx=2xydy, y(4)=0$	1) $(x-2)^2-y^2=4$; 2) $y=(x-2)^2$; 3) $x-2=y$;4) $x=(y-2)^2$; 5) $(x-2)^2+y^2=4$
4.	Найти общее решение дифференциального уравнения $xy'+2y+x^5y^3e^x=0$	1) $y=1/(x^2\sqrt{2(e^x+C)})$; 2) $y=1/(x^2\sqrt{2})$;3) $y=1/x^2\sqrt{e^x}$; 4) $y=1/\sqrt{(C+e^x)}$;5) $y=x^2$.
5.	Решить задачу Коши $(x^2+y^2+y)dx+(2xy+x+e^y)dy=0,$ $y(0)=0$	1) $x^3/3+xy^2+xy=1$; 2) $xy+e^y=1$; 3) $x^3/3+e^y=1$; 4) $x^3/3+xy+e^y=1$ 5) $x^3/3+xy^2+xy+e^y=1$
6.	Найти общее решение дифференциального уравнения $y''=1/x^2$	1) $y=-\ln\lvert x\rvert$; 2) $y=-\ln\lvert x\rvert+C$; 3) $y=-\ln\lvert x\rvert+2x+5$; 4) $y=-\ln\lvert x\rvert+5$; 5) $y=2x+5$.
7.	Найти частное решение дифференциального уравнения $y''=2-y, y(0)=2, y'(0)=2$	1) $y=2\cos x$; 2) $y=2\sin x$;3) $y=2$; 4) $y=2\cos x+2$;5) $y=2\sin x+2$
8.	Найти общее решение однородного дифференциального уравнения $y''+4y'+4y=e^{-2x}/x^3$	1) $y=e^{-2x}(C_1+C_2x)$; 2) $y=e^{-2x}(C_1+C_2x+1/x)$; 3) $y=e^{-2x}(C_1+C_2x+1/2x)$; 4) $y=e^{-2x}/2x$; 5) $y=e^{-2x}(C+1/2x)$.
9	Найти общее решение дифференциального уравнения $y''-14y'+49y=144\sin 7x$	1) $y=C_1e^{7x}+C_2xe^{7x}$ 2) $y=C_1e^{7x}+C_2xe^{7x}+2\cos 7x$ 3) $y=2\cos 7x$ 4) $y=e^{7x}+xe^{7x}$ 5) $y=C_1+2\cos 7x$
10	Решить систему дифференциальных уравнений $\begin{cases} x'=-y+e^{3t}, \\ y'=-x+2e^{3t}. \end{cases}$	1) $x=C_1e^t+C_2e^{-t}, y=-C_1e^t+C_2e^{-t}$ 2) $x=C_1e^t+C_2e^{-t}+e^{3t}, y=-C_1e^t+C_2e^{-t}+5e^{3t}$ 3) $x=C_1e^t+C_2e^{-t}+e^{3t}/8, y=-C_1e^t+C_2e^{-t}+5e^{3t}/8$ 4) $x=C_1e^t+C_2e^{-t}+1/8, y=-C_1e^t+C_2e^{-t}+5/8$ 5) $x=C_1e^t+C_2e^{-t}+3e^{3t}/8, y=-C_1e^t+C_2e^{-t}+e^{3t}/8$

Тест: «Дифференциальные уравнения»

Вариант 17

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Проверить, является ли функция $y = x^2 + 3$ решением уравнением $xy'' = y'$	
2.	Найти общее решение (общий интеграл) уравнения $y' = \dfrac{4}{x^2 - 4}$	1) $y = \ln\lvert x-2\rvert + C$; 2) $y = \ln x$; 3) $y = \ln\lvert (x-2)/(x+2)\rvert + C$; 4) $y = \ln\lvert 1/(x+2)\rvert + C$; 5) $y = \ln\lvert x+2\rvert$.
3.	Решить задачу Коши $y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{y}, y(1) = 1$	1) $(x-2)^2 - y^2 = 4$; 2) $y^2 = x^2$; 3) $y^2 = 2\ln x + 1$; 4) $x = 2\ln y$; 5) $y^2 = x^2(2\ln x + 1)$
4.	Найти общее решение дифференциального уравнения $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2$	1) $y = (C+x)(1+x^2)$; 2) $y = C + x$; 3) $y = C + x^2$; 4) $y = 1 + x^2$; 5) $x = (C+1)(y^2+1)$.
5	Найти общее решение дифференциального уравнения $2x\cos^2 y dx + (2y - x^2 \sin 2y)dy = 0$	1) $y = -1/(x^2(x^2 + C))$; 2) $y = -1/(x^2 + C)$; 3) $y = -1/x^2$; 4) $y = -C/x^4$; 5) $y = -C/(x^2+1)$
6	Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' ctgx + y' = 2$	1) $y = C_1 \sin x$; 2) $y = 2x + C_1 \sin x$; 3) $y = 2x + C_1 \sin x + C_2$; 4) $y = C_1 + C_2$; 5) $y = 2x$.
7.	Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' = 1/\cos^2(x/2), y(0) = 0, y'(0) = 1$	1) $y = x$; 2) $y = -4\ln\lvert \cos x/2\rvert + x$; 3) $y = \cos x/2$; 4) $y = -4\ln\lvert \cos x/2\rvert$; 5) $y = \ln\lvert \cos x/2\rvert$
8.	Найти общее решение однородного дифференциального уравнения $y'' - y' = e^{2x}\cos(e^x)$	1) $y = \cos(e^x) + \sin(e^x)$; 2) $y = C + \cos(e^x)$; 3) $y = -\cos(e^x)$; 4) $y = C_1 + C_2 e^x - \cos(e^x)$; 5) $y = C_1 + C_2 e^x$.
9	Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + 4y = 15e^x$	1) $y = C_1 + C_2 e^{-4x}$; 2) $y = C_1 + C_2 e^{-4x} + 3e^x$; 3) $y = 3e^x$; 4) $y = C_1 e^x + C_2 x e^{-4x}$; 5) $y = C_1 + C_2 e^x$
10	Решить систему дифференциальных уравнений $\begin{cases} x' = 4x - 8y, \\ y' = -8x + 4y. \end{cases}$	1) $x = C_1 + C_2 e^{-4t}, y = C_1 e^{12t} + C_2$ 2) $x = C_2, y = C_1 e^{12t} + C_2$ 3) $x = C_1 e^{12t}, y = -C_1 e^{12t}$ 4) $x = C_1 e^{-4t} + C_2 e^{12t}, y = C_1 e^{-4t} - C_2 e^{12t}$ 5) $x = C_1 e^{-4t} + C_2 e^{4t}, y = C_1 e^{-4t} - e^{4t} C_2$

Тест: «Дифференциальные уравнения»

Вариант 18

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Проверить, является ли функция $y=\dfrac{x^3}{12}+1$ решением уравнением $(y'')^2=y^2$	
2.	Решить задачу Коши $y'tgx-y=1, y(\pi/2)=1$	1) $y=\sin x$; 2) $y=2\sin x-1$; 3) $y=\cos x$; 4) $y=\cos x+1$; 5) $y=2\cos x-1$.
3.	Решить задачу Коши $xy'=y(1+\ln\dfrac{y}{x}), y(1)=e^{-1/2}$	1) $x=ye^{x/2}$; 2) $y=x$; 3) $y=e^{-x/2}$;4) $y=xe^{-x/2}$;5) $y=e^x$
4.	Найти общее решение дифференциального уравнения $2xy'-y=3x^2$	1) $y=C\sqrt{x}+x^2$; 2) $y=x^2$;3) $y=Cx^2$; 4) $y=C\sqrt{x}$;5) $y=Cx^2-x$.
5	Найти общее решение дифференциального уравнения $(1/x-y^3+4)dx+(-1/y-3xy)dy=0$	1) $\ln\lvert x/y\rvert=C$; 2) $\ln\lvert x/y\rvert-xy^3=C$; 3) $\ln\lvert x/y\rvert+4x=C$; 4) $xy^3+4x=C$ 5) $\ln\lvert x/y\rvert-xy^3+4x=C$
6.	Найти общее решение дифференциального уравнения $y'''=\cos 3x$	1) $y=-\sin 3x/27$; 2) $y=C_1x^2/2$; 3) $y=-\sin 3x/27+C_1x^2/2+C_2x+C_3$; 4) $y=-\sin 3x/27+C_1x^2/2$; 5) $y=-\sin 3x/27++C_3$.
7.	Найти частное решение дифференциального уравнения $y''=1/\sqrt{y}, y(0)=y'(0)=0$	1) $x=2y^{3/4}/3$; 2) $y=2x^{3/4}/3$; 3) $x=2y^{3/4}/3+C$; 4) $y=2x/3$;5) $y=x^{3/4}$
8.	Найти общее решение однородного дифференциального уравнения $y''-2y'+y=e^x/\sqrt{4-x^2}$	1) $y=\sqrt{4-x^2}+x\arcsin(x/2)$; 2) $y=e^x(\sqrt{4-x^2}+x\arcsin(x/2))$; 3) $y=e^x(C+\sqrt{4-x^2}+x\arcsin(x/2))$; 4) $y=e^x(C_1+C_2x)$; 5) $y=e^x(C_1+C_2x+\sqrt{4-x^2}+x\arcsin(x/2))$.
9	Найти общее решение дифференциального уравнения $y''-4y'=8-16x$	1) $y=C_1+C_2e^{4x}$;2) $y=C_1+C_2e^{4x}+2x^2-x$ 3) $y=C_1+2x^2-x$; 4) $y=C_1+C_2e^{4x}-x$ 5) $y=2x^2-x$
10	Решить систему дифференциальных уравнений $\begin{cases}5x'-2y'+4x-y=e^{-t},\\ x'+8x-3y=5e^{-t}.\end{cases}$	1) $x=2e^{-t}-C_1e^t-C_2e^{-2t}, y=3e^{-t}-C_1e^t-e^{-2t}2C_2$ 2) $x=2e^{-t}+Ce^{-2t}, y=3e^{-t}+e^{-2t}2C$ 3) $x=C_1e^t+C_2e^{-2t}, y=C_1e^t+e^{-2t}2C_2$ 4) $x=2e^{-t}, y=3e^{-t}$ 5) $x=2e^{-t}+C_1e^t+C_2e^{-2t}, y=3e^{-t}+C_1e^t+e^{-2t}2C_2$

Тест: «Дифференциальные уравнения»
Вариант 19

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Проверить, является ли функция $y = 4e^{x} + 2e^{3x}$ решением уравнением $y'' - 4y' + 3y = 0$	
2.	Найти общее решение (общий интеграл) уравнения $y' = y^2 \cos x$	1) $y = 1/(C - \sin x)$; 2) $y = 1/\cos x$; 3) $y = \cos x$; 4) $y = 1/(\cos x + C)$; 5) $y = 1/C$.
3.	Найти общее решение (общий интеграл) уравнения $(x^2 - 2xy)y' = xy - y^2$	1) $x/y + 2\ln x = y$; 2) $x/y = C$; 3) $x/y + 2\ln y/x = -\ln Cx$; 4) $y = 2\ln y/x$;5) $x/y = -\ln Cx$
4.	Решить задачу Коши $y' + 2xy = xe^{-x^2}$, $y(0) = 0$	1) $y = 0,5x^2e^{-x^2}$; 2) $y = 0,5x^2$;3) $y = 0,5e^{-x^2}$; 4) $y = x^2e^{-x^2}$;5) $y = 0,5x$.
5	Найти честное решение дифференциального уравнения $(2x + ye^{xy})dx + (1 + xe^{xy})dy = 0, y(0) = 1$	1) $y + e^{xy} = 0$; 2) $e^{xy} + x^2 - 2 = 0$; 3) $y + e^{xy} + x^2 - 2 = 0$; 4) $e^{xy} + x^2 = 0$; 5) $y = e^{xy}$
6.	Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - \dfrac{y'}{x-1} = x(x-1)$	1) $y = x^4/8 - x^3/6$; 2) $y = x^4/8 - x^3/6 + C_1x^2/2 - C_1/x + C_2$; 3) $y = x^4/8 - C_1/x + C_2$; 4) $y = C_1x^2/2 - C_1/x + C_2$; 5) $y = C_1/x + C_2$.
7.	Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' = 1/x^2, y(1) = 3, y'(1) = 1$	1) $y = -\ln\|x\|$; 2) $y = -\ln\|x\| + 2x$; 3) $x = -\ln\|y\|$; 4) $y = -\ln\|x\| + 2x + 1$; 5) $y = -\ln\|x\| + 1$
8.	Найти общее решение однородного дифференциального уравнения $y'' + y = 1/(\cos 2x)^{3/2}$	1) $y = C_1\cos x + C_2\sin x + \sqrt{\cos 2x}$; 2) $y = C_1\cos x + C_2\sin x$; 3) $y = C_1\cos x + C_2\sin x - \sqrt{\cos x}$; 4) $y = C_1\cos x + C_2\sin x - \sqrt{\cos 2x}$; 5) $y = C_1\cos x + C_2\sin x - \sqrt{\sin 2x}$.
9	Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + 4y' - 6y = (6x+1)e^{3x}$	1) $y = C_1e^{-3x} + C_2e^{2x}$;2) $y = C_1e^{-3x} + (x-1)e^{2x}$ 3) $y = C_1e^{-3x} + C_2e^{-3x}x$ 4) $y = C_1e^{-3x} + C_2e^{2x} + xe^{3x}$ 5) $y = C_1e^{-3x} + C_2e^{2x} + (x-1)e^{3x}$
10	Решить систему дифференциальных уравнений $\begin{cases} x' = 4x - y, \\ y' = -x + 4y. \end{cases}$	1) $x = C_1e^{3t} + C_2e^{5t}, y = C_1e^{3t} - C_2e^{5t}$ 2) $x = C_1e^{3t} - C_2e^{5t}, y = C_1e^{3t}$ 3) $x = C_1e^{3t} - C_2e^{5t}, y = C_1e^{3t} - C_2e^{5t}$ 4) $x = C_1, y = C_1e^{3t} - C_2e^{5t}$ 5) $x = C_1e^{3t}, y = C_1e^{3t}$

Тест: «Дифференциальные уравнения»

Вариант 20

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Проверить, является ли функция $y=1/4$ решением уравнением $y''-4y'+4y=1$	
2.	Найти частное решение (частный интеграл) уравнения $y'=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, y(0)=1$	1) $y=\sqrt{x}+2$; 2) $y=-\sqrt{1-x^2}+2$; 3) $y=-\sqrt{1-x^2}$; 4) $y=+2$; 5) $y=\sqrt{C}$.
3.	Найти частное решение (частный интеграл) уравнения $xy'+y=\sin x, y(\pi/2)=2/\pi$	1) $y=1/x$; 2) $y=(1-\cos x)$; 3) $y=(1-\cos x)/x$; 4) $y=(1+\cos x)/x$;5) $y=(1-\sin x)/x$
4.	Найти общее решение дифференциального уравнения $xdy-ydx=\sqrt{x^2+y^2}dx$	1) $y=Cx^2$; 2) $\sqrt{x^2+y^2}=Cx^2$; 3) $y+\sqrt{x}=Cx^2$; 4) $y+\sqrt{x^2+y^2}=1$; 5) $y+\sqrt{x^2+y^2}=Cx^2$.
5.	Найти общее решение дифференциального уравнения $dx/y-xdy/y^2=0$	1) $x/y=C$; 2) $x^2/y=C$;3) $x/y^2=C$; 4) $x=C$; 5) $y=C$
6.	Найти общее решение дифференциального уравнения $y''=\cos^2 x$	1) $y=C_1x$; 2) $y=C_1x+C_2$; 3) $y=\cos 2x/8+C_1x+C_2$; 4) $y=x^2/4-\cos 2x/8+C_1x+C_2$; 5) $y=x^2/4+C_1x+C_2$.
7.	Найти частное решение дифференциального уравнения $y^3y''=-1, y(1)=1, y'(1)=0$	1) $y=\sqrt{2x-x^2}$; 2) $y=\sqrt{2x}$; 3) $x=\sqrt{2y-y^2}$; 4) $x=\sqrt{2y}$; 5) $y=\sqrt{x}$
8.	Найти общее решение однородного дифференциального уравнения $y''+y=1/\cos^3 x$	1) $y=C_1\sin x+C_2\cos x$; 2) $y=C_1\sin x+C_2\cos x+1/(2\cos x)$; 3) $y=C\cos x$; 4) $y=C\sin x+1/(2\cos x)$; 5) $y=1/(2\cos x)$.
9	Найти общее решение дифференциального уравнения $4y''-4y'+y=-25\cos x$	1) $y=3\cos x+4\sin x$ 2) $y=C_1e^{x/2}+C_2xe^{x/2}+3\cos x$ 3) $y=C_2xe^{x/2}+3\cos x+4\sin x$ 4) $y=C_1e^{x/2}+C_2xe^{x/2}$ 5) $y=C_1e^{x/2}+C_2xe^{x/2}+3\cos x+4\sin x$
10	Решить систему дифференциальных уравнений $\begin{cases} x'-y=-\cos t, \\ y'+x=\sin t. \end{cases}$	1) $x=C_1+C_2-t\cos t, y=-C_1+C_2+t\,\mathrm{sint}$ 2) $x=C\sin t-t\cos t, y=C\cos t+t\,\mathrm{sint}$ 3) $x=C\cos t-t\cos t, y=-C\sin t+t\,\mathrm{sint}$; 4) $x=C_1\cos t+C_2\sin t, y=-C_1\sin t+C_2\cos t+t\,\mathrm{sint}$ 5) $x=C_1\cos t+C_2\sin t-t\cos t, y=-C_1\sin t+C_2\cos t+t\,\mathrm{sint}$

Тест: «Дифференциальные уравнения»

Вариант 21

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Проверить, является ли функция $y = Ce^{-2x}$ решением уравнением $y' + 2y = 0$	
2.	Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения $xydx + (x+1)dy = 0$	1) $y = C(x+1)e^{-x}$; 2) $y = Ce^{-x}$; 3) $y = C + e^x$; 4) $y = x+1$; 5) $y = C$.
3.	Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения $xy' = y - xe^{y/x}$	1) $y = \ln y/x$; 2) $x = C\ln y/x$; 3) $e^{-y/x} = \ln Cx$; 4) $-y/x = \ln Cx$; 5) $C = y/x$.
4.	Решить задачу Коши $xy' - 2y = 2x^4, y(1) = 0$	1) $y = x^4 - x^2$; 2) $y = Cx^2$; 3) $y = x^2$; 4) $x = y^2 - y^4$; 5) $y = x^4$.
5	Решить дифференциальное уравнение $(e^x + y + \sin y)dx + (e^y + x + x\cos y)dy = 0$	1) $y + y/4 = C$; 2) $y^4/4 = C$; 3) $y\ln x + y^4/4 = C$; 4) $y\ln x = C$ 5) $y\ln x - C = 0$
6.	Найти частное решение дифференциального уравнения $y''' = \sin x, y(0) = 1, y'(0) = 0, y''(0) = 0$	1) $y = \sin x$; 2) $y = \cos x + x^2/2$; 3) $y = \cos x$; 4) $y = \cos x + x$; 5) $y = x^2/2$.
7.	Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения $(1-x^2)y'' - xy = 2$	1) $y = \arcsin^2 x + C$; 2) $y = C_1\arcsin x + C_2$; 3) $y = C\arcsin x$; 4) $y = \arcsin^2 x + C_1\arcsin x + C_2$; 5) $y = C_1 + C_2\arcsin x$
8	Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + y' = 2x - 1$	1) $y = C_1 + C_2 + x^2 - 3x$ 2) $y = C_1 + C_2e^{-x} + x^2$ 3) $y = C_1 + C_2e^{-x} + x^2 - 3x$ 4) $y = x^2 - 3x$ 5) $y = C_1x^2 - 3xC_2$
9	Решить дифференциальное уравнение $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$	1) $y = e^x(x\ln\|x\| + C_1 + C_2x)$; 2) $y = x\ln\|x\| + C_1$ 3) $y = C_1 + C_2x$ 4) $y = e^x x\ln\|x\|$; 5) $y = e^x(C_1 + C_2x)$
10	Решить систему дифференциальных уравнений $\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = 3x + 4y. \end{cases}$	1) $x = C_1 + C_2e^t, y = C_1 + C_2$ 2) $x = C_1e^{5t} + C_2e^t, y = 3C_1e^{5t} - C_2e^t$ 3) $x = C_1e^t + C_2e^{5t}, y = 3C_1 + C_2e^t$ 4) $x = C_1e^{5t} + C_2e^{5t}, y = C_1e^t - C_2e^t$ 5) $x = C_1e^{5t} + C_2e^t, y = C_1e^{5t} - C_2e^t$

Тест: «Дифференциальные уравнения»

Вариант 22

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Проверить, является ли функция $y = Cx^3$ решением уравнением $3y - xy' = 0$	
2.	Найти частное решение (чстный интеграл) дифференциального уравнения $y' ctgx + y = 2, y(0) = -1$	1) $y = \sin x$; 2) $y = -3\cos x + 2$; 3) $y = -\cos x$; 4) $y = -\sin x + 1$; 5) $y = \sin xC$.
3.	Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения $y^2 + x^2 y' = xyy'$	1) $Cy = e^{y/x}$; 2) $x = Ce^{y/x}$; 3) $e^{-y/x} = C$;4) $e^x C = y$; 5) $xC = y$.
4.	Решить задачу Коши $xy' + y + xe^{-x^2} = 0, y(1) = 1/(2e)$	1) $y = e^{-x^2}$; 2) $y = x^2$; 3) $y = e^x$;4) $y = e^{-x^2}/2x$; 5) $y = e^{x^4}$.
5	Решить дифференциальное уравнение $(10xy - 8y + 1)dx + (5x^2 - 8x + 3)dy = 0$	1) $x^2 = y\ln(C/y)$; 2) $y^2 = x\ln(C/x)$; 3) $x = \ln y$; 4) $y = C\ln x$; 5) $y = Cx$
6	Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' = xe^x, y(0) = 1, y'(0) = 0$	1) $y = e^x(x-2) + x + 3$; 2) $y = e^x \cos x$; 3) $y = e^x(x-2)$; 4) $y = x + 3$; 5) $y = x - 2$.
7	Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' = y'e^y, y(0) = 0, y'(0) = 1$	1) $y = \ln x$; 2) $y = \ln\|1-x\|$; 3) $y = -\ln\|1-x\|, y = 0$; 4) $y = \ln\|x\|, y = 0$;5) $y = 0$
8	Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 2y' + 5y = 10e^{-x}\cos 2x$	1) $y = e^x(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x) + e^{-x}\cos 2x$; 2) $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + e^x\cos 2x$; 3) $y = C_1e^{-x} + \cos 2x$; 4) $y = e^x(C_1\cos 2x + \sin 2x + \cos 2x)$ 5) $y = C_1e^{-x} - 3xC_2 + \cos 2x$
9	Решить дифференциальное уравнение $y'' + 3y' + 2y = 1/(e^x + 1)$	1) $y = (e^{-x} + e^{-2x})\ln(e^x + 1)$; 2) $y = \ln e^x + C_1e^{-x} + C_2e^{-2x}$; 3) $y = (e^{-x} + e^{-2x})\ln(e^x + 1) + C_1e^{-x} + C_2e^{-2x}$ 4) $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x}$ 5) $y = \ln(e^x + 1) + C_1e^{-x} + C_2e^{-2x}$
10	Решить систему дифференциальных уравнений $\begin{cases} x' = -2x - y + \sin t, \\ y' = -4x + 2y + \cos t. \end{cases}$	1) $x = C_1 + C_2t, y = -2C_1 + C_2(2t+1)$ 2) $x = C_1 + C_2t +, y = -2C_1 + C_2(2t+1) - 2\cos t$ 3) $x = C_1 + C_2t + 2\sin t, y = -2C_1 + C_2(2t+1)$ 4) $x = C_1 + C_2t, y = -2C_1 + C_2(2t+1) - 3\sin t - 2\cos t$ 5) $x = C_1 + C_2t + 2\sin t, y = -2C_1 + C_2(2t+1) - 3\sin t - 2\cos t$

Тест: «Дифференциальные уравнения»
Вариант 23

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Проверить, является ли функция $y=\dfrac{1}{x}$ решением уравнением $xy'+y=y^2$	
2.	Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения $(x+2x^3)dx+(y+2y^3)dy=0$	1) $y^4=C$; 2) $x^2+y^2+x^4+y^4=C$; 3) $y=C-x^2-y^2$; 4) $y=Cx^2+y^2$; 5) $x^2-y^2-x^4-y^4=C$.
3.	Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения $xy'=y\cos\ln(y/x)$	1) $Cy=\ln y/x$; 2) $ctg(\frac{1}{2}\ln y)=x$; 3) $tg(\ln y/x)=\ln x$;4) $-y/x=\ln Cx$; 5) $ctg(\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{y}{x})=\ln Cx$
4.	Решить задачу Коши $xy'+x=4y^3+3y^2, y(2)=1$	1) $x=y^3+y^2$; 2) $y=x^2+x^3$; 3) $y=x^2+x$;4) $y=x^2-x^4$; 5) $y=x^2$.
5	Найти частное решение дифференциального уравнения $ye^xdx+(y+e^x)dy=0, y(0)=0$	1) $ye^x=3/2$; 2) $e^x+y^2/2=1/2$; 3) $y+y^2/2=1/2$;4) $y^2/2=3/2$; 5) $ye^x+y^2=3/2$
6.	Найти общее решение дифференциального уравнения $y'''=x+\cos x$	1) $y=\sin x$; 2) $y=x^4-\sin x+C_1x+C_2$; 3) $y=\dfrac{1}{24}x^4-\sin x+C_1x^2$; 4) $y=\dfrac{1}{24}x^4-\sin x+C_1x^2+C_2x+C_3$; 5) $y=x_4/24-\sin x+C_1x+C_2$.
7.	Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения $x^3y''+x^2y'=1$	1) $y=C_1\ln x+1/x+C_2$; 2) $y=C_1\ln x+C_2$;3) $y=C_1\ln x$; 4) $y=C_1+C_2/x$;5) $y=C\ln x$
8.	$y''+y=\dfrac{1}{\sin x}$	1) $y=(C_1+\ln\|\sin x\|)+(C_2-x)\cos x$; 2) $y=(C_1+\ln\|\sin x\|)\sin x+(C_2-x)$; 3) $y=(C_1+\ln\|\sin x\|)\sin x+(C_2-x)\cos x$; 4) $y=C_1\sin x+C_2\cos x$; 5) $y=C_1+C_2$.
9	Найти общее решение дифференциального уравнения $y''-12y'+36y=14e^x$	1) $y=C_1e^{6x}+C_2xe^{6x}+7x^2e^{6x}$ 2) $y=C_1+C_2e^{6x}+x^2$ 3) $y=xe^{6x}C_1+C_2e^{6x}+x^2-3x$ 4) $y=7x^2e^{6x}$ 5) $y=e^{6x}C_1x^2-e^{6x}C_2$
10	Решить систему дифференциальных уравнений $\begin{cases}x'=x-y,\\ y'=-4x+4y.\end{cases}$	1) $x=C_1+C_2e^t, y=C_1+C_2$ 2) $x=C_1e^{5t}+C_2e^t, y=3C_1e^{5t}-C_2e^t$ 3) $x=C_1e^t+C_2e^{5t}, y=3C_1+C_2e^t$ 4) $x=C_1e^{5t}+C_2e^{5t}, y=C_1e^t-C_2e^t$ 5) $x=C_1+C_2e^{5t}, y=C_1-4C_2e^{5t}$

Тест: «Дифференциальные уравнения»

Вариант 24

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Проверить, является ли функция $y=3\sin x$ решением уравнением $y'tgx-y=1$	
2.	Решить задачу Коши $(xy^2+x)dx+(x^2y-y)dy=0, y(0)=1$	1) $y^2=1$; 2) $x^2+y^2=2/(1-x^2)$; 3) $1+y^2=2/(1-x^2)$; 4) $1=x^2+y^2$; 5) $x^2-y^2=1$.
3.	Решить задачу Коши $(xy'-y)arctg\, y/x=x, y(1)=0$	1) $\sqrt{x^2+y^2}=e^{\frac{y}{x}arctg\frac{y}{x}}$; 2) $\ln\frac{y}{x}=\frac{x}{y}$; 3) $tg(\ln y/x)=\ln\frac{x}{y}$; 4) $y/x=Cx$; 5) $e^{\frac{y}{x}arctg\frac{y}{x}}=\frac{y}{x}$
4.	Найти общее решение дифференциального уравнения $y'+y=x\sqrt{y}$	1) $y=(xe^{x/2}-2e^{x/2}+C)e^{-x}$; 2) $y=xe^{x/2}+C$; 3) $y=2e^{x/2}+C$; 4) $y=x^2e^{x/2}-2e^{-x}$; 5) $y=Ce^{x/2}$.
5	Найти общее решение дифференциального уравнения $(3x^2y+\sin x)dx+(x^3-\cos y)dy=0$	1) $x^3y-\cos x=C$; 2) $x^3y-\cos x-\sin y=C$; 3) $x^3y-\sin y=C$; 4) $x^3y=C$ 5) $x^3y+\cos x+\sin y=C$
6.	Найти общее решение дифференциального уравнения $y'''=x\sin x$	1) $y=-x\sin x$; 2) $y=-x\cos x+C_1x+C_2$; 3) $y=-\sin x+C_1$; 4) $y=-\sin x+C_1x^2$; 5) $y=-x\sin x-2\cos x+C_1x+C_2$.
7.	Решить задачу Коши $y'^2+2yy''=0, y(0)=1, y'(0)=1$	1) $y=(1+3x/2)^{2/3}$; 2) $y=1\pm 3x/2$; 3) $y=2$; 4) $y=(1\pm 3x/2)^{2/3}, y=1$; 5) $y=1$
8	Найти общее решение однородного дифференциального уравнения $y''+2y'+y=3e^{-x}\sqrt{x+1}$	1) $y=e^{-x}(C_1+C_2x)$; 2) $y=e^{-x}(4(x+1)^{5/2}/5)$; 3) $y=(4(x+1)^{5/2}/5+C_1+C_2x)$; 4) $y=e^{-x}(4(x+1)^{5/2}/5+C_1+C_2x)$; 5) $y=e^{-x}Cx$.
9	Найти общее решение дифференциального уравнения $y''-3y'+2y=3\cos x+19\sin x$	1) $y=C_1e^{6x}+C_2xe^{6x}$ 2) $y=C_1e^{x}+C_2e^{6x}+\cos x$ 3) $y=C_1e^{x}+C_2e^{2x}+6\cos x+\sin x$ 4) $y=e^{2x}+e^{x}$ 5) $y=C_1x-e^{2x}C_2$
10	Решить систему дифференциальных уравнений $\begin{cases} x'=-x-2y+2e^{-t}, \\ y'=3x+4y+e^{-t}. \end{cases}$	1) $x=-2e^{-t}, y=e^{-t}$ 2) $x=-2e^{-t}+C_1e^{t}+2C_2e^{2t}, y=e^{-t}-C_1e^{t}-3C_2e^{2t}$ 3) $x=C_1e^{t}+2C_2e^{2t}, y=C_1e^{t}-3C_2e^{2t}$ 4) $x=-2e^{-t}+2C\,e^{2t}, y=e^{-t}-C\,e^{t}$ 5) $x=-2e^{-t}+C_1e^{t}-C_2e^{2t}, y=e^{-t}-C_1e^{t}+C_2e^{2t}$

Тест: «Дифференциальные уравнения»

Вариант 25

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Проверить, является ли функция $y = x(5 - \ln x)$ решением уравнением $(x - y)dx + xdy = 0$	
2.	Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения $\sin xy' = y\cos x + 2\cos x$	1) $y = C\sin x - 2$; 2) $y = C\cos x$; 3) $y = \sin x + 2$; 4) $C = \sin x + \cos x$; 5) $y = C\cos x + 2$.
3.	Решить задачу Коши $(y^2 - 2xy - x^2)dx + (x^2 - 2xy - y^2)dy = 0, y(1) = -1$	1) $y = x$; 2) $y = \ln x$; 3) $y = -x$;4) $y = Cx$; 5) $Cx + 1 = y$
4.	Найти общее решение дифференциального уравнения $y' + 2y = y^2 e^x$	1) $y = Ce^{2x} + e^x$; 2) $y = Ce^{x/2}$; 3) $y = e^x$; 4) $y = 1/(Ce^{2x} + e^x)$; 5) $y = e^{2x} + Ce^x$.
5	Найти общее решение дифференциального уравнения $(e^{x+y} + 3x^2)dx + (e^{x+y} + 4y^3)dy = 0$	1) $e^{x+y} + x^3 + y^4 = C$;2) $x^3 + y^4 = C$; 3) $e^{x+y} = C$; 4) $e^{x+y} + x^3 = C$; 5) $e^{x+y} + y^4 = C$
6.	Решить задачу Коши $y'' = \cos x + e^{-x}, y(0) = -e^{-\pi}, y'(0) = 1$	1) $y = -\cos x$; 2) $y = -\cos x + e^{-x} + 2x - e^{-\pi}$; 3) $y = -\cos x + 2x - e^{-\pi}$; 4) $y = -\cos x + e^{-\pi}$; 5) $y = e^{-\pi} + C_1 x + C_2$.
7.	Найти общее решение дифференциального уравнения $xy'' = y'$	1) $y = x^2/2$; 2) $y = C_1 + C_2$;3) $y = C_1$; 4) $y = C_1\dfrac{x^2}{2} + C_2$;5) $y = C_1\dfrac{x^2}{2}$
8.	Найти общее решение однородного дифференциального уравнения $y'' - 2y' + y = x^{-2}e^x$	1) $y = C_1 - \ln x + C_2 x$; 2) $y = (C_1 + C_2 x)e^x$; 3) $y = e^x$; 4) $y = (C_1 + C_2)e^x$; 5) $y = (C_1 - \ln x + C_2 x)e^x$.
9	Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 8y' + 17y = 10e^{2x}$	1) $y = C_1 e^{4x} + C_2 x e^{4x}$ 2) $y = e^{4x}(C_1\cos x + C_2\sin x) + 2e^{2x}$ 3) $y = e^{4x}(C_1\cos x + C_2\sin x)$ 4) $y = \cos x + \sin x + 2e^{2x}$ 5) $y = 2e^{2x}$
10	Решить систему дифференциальных уравнений $\begin{cases} x' = -2x, \\ y' = y. \end{cases}$	1) $x = C_1 + C_2 e^{-2t}, y = C_1 e^t + C_2$ 2) $x = C_2 e^{-2t}, y = C_1 e^t + C_2$ 3) $x = C_1 + C_2 e^{-4t}, y = C_1 e^{4t} + C_2$ 4) $x = C_1, y = C_1 e^t$ 5) $x = C_1 + C_2, y = C_1 + C_2$

Тест: «Дифференциальные уравнения»

Вариант 26

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Проверить, является ли функция $y=5e^{-2x}+\dfrac{e^x}{3}$ решением уравнением $dy+(2y-e^x)dx=0$	
2.	Решить задачу Коши $xy'=\dfrac{y}{\ln x}, y(e)=1$	1) $y=C\ln x$; 2) $y=\ln x$; 3) $y=\ln x+C$; 4) $x=\ln y$; 5) $y=\ln x+1$.
3.	Решить задачу Коши $(y^2+x^2)dx=2xydy, y(4)=0$	1) $(x-2)^2-y^2=4$; 2) $y=(x-2)^2$; 3) $x-2=y$;4) $x=(y-2)^2$; 5) $(x-2)^2+y^2=4$
4.	Найти общее решение дифференциального уравнения $xy'+2y+x^5y^3e^x=0$	1) $y=1/(x^2\sqrt{2(e^x+C)})$; 2) $y=1/(x^2\sqrt{2})$;3) $y=1/x^2\sqrt{e^x}$; 4) $y=1/\sqrt{(C+e^x)}$;5) $y=x^2$.
5.	Решить задачу Коши $(x^2+y^2+y)dx+(2xy+x+e^y)dy=0,$ $y(0)=0$	1) $x^3/3+xy^2+xy=1$; 2) $xy+e^y=1$; 3) $x^3/3+e^y=1$; 4) $x^3/3+xy+e^y=1$ 5) $x^3/3+xy^2+xy+e^y=1$
6.	Найти общее решение дифференциального уравнения $y''=1/x^2$	1) $y=-\ln\lvert x\rvert$; 2) $y=-\ln\lvert x\rvert+C$; 3) $y=-\ln\lvert x\rvert+2x+5$; 4) $y=-\ln\lvert x\rvert+5$; 5) $y=2x+5$.
7.	Найти частное решение дифференциального уравнения $y''=2-y, y(0)=2, y'(0)=2$	1) $y=2\cos x$; 2) $y=2\sin x$;3) $y=2$; 4) $y=2\cos x+2$;5) $y=2\sin x+2$
8.	Найти общее решение однородного дифференциального уравнения $y''+4y'+4y=e^{-2x}/x^3$	1) $y=e^{-2x}(C_1+C_2x)$; 2) $y=e^{-2x}(C_1+C_2x+1/x)$; 3) $y=e^{-2x}(C_1+C_2x+1/2x)$; 4) $y=e^{-2x}/2x$; 5) $y=e^{-2x}(C+1/2x)$.
9	Найти общее решение дифференциального уравнения $y''-14y'+49y=144\sin 7x$	1) $y=C_1e^{7x}+C_2xe^{7x}$ 2) $y=C_1e^{7x}+C_2xe^{7x}+2\cos 7x$ 3) $y=2\cos 7x$ 4) $y=e^{7x}+xe^{7x}$ 5) $y=C_1+2\cos 7x$
10	Решить систему дифференциальных уравнений $\begin{cases} x'=-y+e^{3t}, \\ y'=-x+2e^{3t}. \end{cases}$	1) $x=C_1e^t+C_2e^{-t}, y=-C_1e^t+C_2e^{-t}$ 2) $x=C_1e^t+C_2e^{-t}+e^{3t}, y=-C_1e^t+C_2e^{-t}+5e^{3t}$ 3) $x=C_1e^t+C_2e^{-t}+e^{3t}/8, y=-C_1e^t+C_2e^{-t}+5e^{3t}/8$ 4) $x=C_1e^t+C_2e^{-t}+1/8, y=-C_1e^t+C_2e^{-t}+5/8$ 5) $x=C_1e^t+C_2e^{-t}+3e^{3t}/8, y=-C_1e^t+C_2e^{-t}+e^{3t}/8$

Тест: «Дифференциальные уравнения»

Вариант 27

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Проверить, является ли функция $y = x^2 + 3$ решением уравнением $xy'' = y'$	
2.	Найти общее решение (общий интеграл) уравнения $y' = \dfrac{4}{x^2 - 4}$	1) $y = \ln\lvert x-2\rvert + C$; 2) $y = \ln x$; 3) $y = \ln\lvert (x-2)/(x+2)\rvert + C$; 4) $y = \ln\lvert 1/(x+2)\rvert + C$; 5) $y = \ln\lvert x+2\rvert$.
3.	Решить задачу Коши $y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{y}, y(1) = 1$	1) $(x-2)^2 - y^2 = 4$; 2) $y^2 = x^2$; 3) $y^2 = 2\ln x + 1$;4) $x = 2\ln y$; 5) $y^2 = x^2(2\ln x + 1)$
4.	Найти общее решение дифференциального уравнения $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2$	1) $y = (C+x)(1+x^2)$; 2) $y = C + x$;3) $y = C + x^2$; 4) $y = 1 + x^2$;5) $x = (C+1)(y^2+1)$.
5	Найти общее решение дифференциального уравнения $2x\cos^2 y dx + (2y - x^2 \sin 2y)dy = 0$	1) $y = -1/(x^2(x^2+C))$; 2) $y = -1/(x^2+C)$; 3) $y = -1/x^2$; 4) $y = -C/x^4$; 5) $y = -C/(x^2+1)$
6	Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' ctgx + y' = 2$	1) $y = C_1 \sin x$; 2) $y = 2x + C_1 \sin x$; 3) $y = 2x + C_1 \sin x + C_2$; 4) $y = C_1 + C_2$; 5) $y = 2x$.
7.	Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' = 1/\cos^2(x/2), y(0) = 0, y'(0) = 1$	1) $y = x$; 2) $y = -4\ln\lvert\cos x/2\rvert + x$; 3) $y = \cos x/2$; 4) $y = -4\ln\lvert\cos x/2\rvert$;5) $y = \ln\lvert\cos x/2\rvert$
8.	Найти общее решение однородного дифференциального уравнения $y'' - y' = e^{2x}\cos(e^x)$	1) $y = \cos(e^x) + \sin(e^x)$; 2) $y = C + \cos(e^x)$; 3) $y = -\cos(e^x)$; 4) $y = C_1 + C_2 e^x - \cos(e^x)$; 5) $y = C_1 + C_2 e^x$.
9	Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + 4y = 15e^x$	1) $y = C_1 + C_2 e^{-4x}$;2) $y = C_1 + C_2 e^{-4x} + 3e^x$; 3) $y = 3e^x$; 4) $y = C_1 e^x + C_2 x e^{-4x}$; 5) $y = C_1 + C_2 e^x$
10	Решить систему дифференциальных уравнений $\begin{cases} x' = 4x - 8y, \\ y' = -8x + 4y. \end{cases}$	1) $x = C_1 + C_2 e^{-4t}, y = C_1 e^{12t} + C_2$ 2) $x = C_2, y = C_1 e^{12t} + C_2$ 3) $x = C_1 e^{12t}, y = -C_1 e^{12t}$ 4) $x = C_1 e^{-4t} + C_2 e^{12t}, y = C_1 e^{-4t} - C_2 e^{12t}$ 5) $x = C_1 e^{-4t} + C_2 e^{4t}, y = C_1 e^{-4t} - e^{4t} C_2$

Тест: «Дифференциальные уравнения»

Вариант 28

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Проверить, является ли функция $y=\frac{x^3}{12}+1$ решением уравнением $(y'')^2=y^2$	
2.	Решить задачу Коши $y'tgx-y=1, y(\pi/2)=1$	1) $y=\sin x$; 2) $y=2\sin x-1$; 3) $y=\cos x$; 4) $y=\cos x+1$; 5) $y=2\cos x-1$.
3.	Решить задачу Коши $xy'=y(1+\ln\frac{y}{x}), y(1)=e^{-1/2}$	1) $x=ye^{x/2}$; 2) $y=x$; 3) $y=e^{-x/2}$;4) $y=xe^{-x/2}$;5) $y=e^x$
4.	Найти общее решение дифференциального уравнения $2xy'-y=3x^2$	1) $y=C\sqrt{x}+x^2$; 2) $y=x^2$;3) $y=Cx^2$; 4) $y=C\sqrt{x}$;5) $y=Cx^2-x$.
5	Найти общее решение дифференциального уравнения $(1/x-y^3+4)dx+(-1/y-3xy)dy=0$	1) $\ln\|x/y\|=C$; 2) $\ln\|x/y\|-xy^3=C$; 3) $\ln\|x/y\|+4x=C$; 4) $xy^3+4x=C$ 5) $\ln\|x/y\|-xy^3+4x=C$
6.	Найти общее решение дифференциального уравнения $y'''=\cos 3x$	1) $y=-\sin 3x/27$; 2) $y=C_1x^2/2$; 3) $y=-\sin 3x/27+C_1x^2/2+C_2x+C_3$; 4) $y=-\sin 3x/27+C_1x^2/2$; 5) $y=-\sin 3x/27++C_3$.
7.	Найти частное решение дифференциального уравнения $y''=1/\sqrt{y}, y(0)=y'(0)=0$	1) $x=2y^{3/4}/3$; 2) $y=2x^{3/4}/3$; 3) $x=2y^{3/4}/3+C$; 4) $y=2x/3$;5) $y=x^{3/4}$
8.	Найти общее решение однородного дифференциального уравнения $y''-2y'+y=e^x/\sqrt{4-x^2}$	1) $y=\sqrt{4-x^2}+x\arcsin(x/2)$; 2) $y=e^x(\sqrt{4-x^2}+x\arcsin(x/2))$; 3) $y=e^x(C+\sqrt{4-x^2}+x\arcsin(x/2))$; 4) $y=e^x(C_1+C_2x)$; 5) $y=e^x(C_1+C_2x+\sqrt{4-x^2}+x\arcsin(x/2))$.
9	Найти общее решение дифференциального уравнения $y''-4y'=8-16x$	1) $y=C_1+C_2e^{4x}$;2) $y=C_1+C_2e^{4x}+2x^2-x$ 3) $y=C_1+2x^2-x$; 4) $y=C_1+C_2e^{4x}-x$ 5) $y=2x^2-x$
10	Решить систему дифференциальных уравнений $\begin{cases}5x'-2y'+4x-y=e^{-t},\\x'+8x-3y=5e^{-t}.\end{cases}$	1) $x=2e^{-t}-C_1e^t-C_2e^{-2t}, y=3e^{-t}-C_1e^t-e^{-2t}2C_2$ 2) $x=2e^{-t}+Ce^{-2t}, y=3e^{-t}+e^{-2t}2C$ 3) $x=C_1e^t+C_2e^{-2t}, y=C_1e^t+e^{-2t}2C_2$ 4) $x=2e^{-t}, y=3e^{-t}$ 5) $x=2e^{-t}+C_1e^t+C_2e^{-2t}, y=3e^{-t}+C_1e^t+e^{-2t}2C_2$

Тест: «Дифференциальные уравнения»
Вариант 29

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Проверить, является ли функция $y=4e^{x}+2e^{3x}$ решением уравнением $y''-4y'+3y=0$	
2.	Найти общее решение (общий интеграл) уравнения $y'=y^2\cos x$	1) $y=1/(C-\sin x)$; 2) $y=1/\cos x$; 3) $y=\cos x$; 4) $y=1/(\cos x+C)$; 5) $y=1/C$.
3.	Найти общее решение (общий интеграл) уравнения $(x^2-2xy)y'=xy-y^2$	1) $x/y+2\ln x=y$; 2) $x/y=C$; 3) $x/y+2\ln y/x=-\ln Cx$; 4) $y=2\ln y/x$;5) $x/y=-\ln Cx$
4.	Решить задачу Коши $y'+2xy=xe^{-x^2}$, $y(0)=0$	1) $y=0,5x^2e^{-x^2}$; 2) $y=0,5x^2$;3) $y=0,5e^{-x^2}$; 4) $y=x^2e^{-x^2}$;5) $y=0,5x$.
5	Найти честное решение дифференциального уравнения $(2x+ye^{xy})dx+(1+xe^{xy})dy=0, y(0)=1$	1) $y+e^{xy}=0$; 2) $e^{xy}+x^2-2=0$; 3) $y+e^{xy}+x^2-2=0$; 4) $e^{xy}+x^2=0$; 5) $y=e^{xy}$
6.	Найти общее решение дифференциального уравнения $y''-\dfrac{y'}{x-1}=x(x-1)$	1) $y=x^4/8-x^3/6$; 2) $y=x^4/8-x^3/6+C_1x^2/2-C_1/x+C_2$; 3) $y=x^4/8-C_1/x+C_2$; 4) $y=C_1x^2/2-C_1/x+C_2$; 5) $y=C_1/x+C_2$.
7.	Найти частное решение дифференциального уравнения $y''=1/x^2, y(1)=3, y'(1)=1$	1) $y=-\ln\lvert x\rvert$; 2) $y=-\ln\lvert x\rvert+2x$; 3) $x=-\ln\lvert y\rvert$; 4) $y=-\ln\lvert x\rvert+2x+1$; 5) $y=-\ln\lvert x\rvert+1$
8.	Найти общее решение однородного дифференциального уравнения $y''+y=1/(\cos 2x)^{3/2}$	1) $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\sqrt{\cos 2x}$; 2) $y=C_1\cos x+C_2\sin x$; 3) $y=C_1\cos x+C_2\sin x-\sqrt{\cos x}$; 4) $y=C_1\cos x+C_2\sin x-\sqrt{\cos 2x}$; 5) $y=C_1\cos x+C_2\sin x-\sqrt{\sin 2x}$.
9	Найти общее решение дифференциального уравнения $y''+4y'-6y=(6x+1)e^{3x}$	1) $y=C_1e^{-3x}+C_2e^{2x}$;2) $y=C_1e^{-3x}+(x-1)e^{2x}$ 3) $y=C_1e^{-3x}+C_2e^{-3x}x$ 4) $y=C_1e^{-3x}+C_2e^{2x}+xe^{3x}$ 5) $y=C_1e^{-3x}+C_2e^{2x}+(x-1)e^{3x}$
10	Решить систему дифференциальных уравнений $\begin{cases} x'=4x-y, \\ y'=-x+4y. \end{cases}$	1) $x=C_1e^{3t}+C_2e^{5t}, y=C_1e^{3t}-C_2e^{5t}$ 2) $x=C_1e^{3t}-C_2e^{5t}, y=C_1e^{3t}$ 3) $x=C_1e^{3t}-C_2e^{5t}, y=C_1e^{3t}-C_2e^{5t}$ 4) $x=C_1, y=C_1e^{3t}-C_2e^{5t}$ 5) $x=C_1e^{3t}, y=C_1e^{3t}$

Тест: «Дифференциальные уравнения»

Вариант 30

№	ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ
1.	Проверить, является ли функция $y = 1/4$ решением уравнением $y'' - 4y' + 4y = 1$	
2.	Найти частное решение (частный интеграл) уравнения $y' = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}, y(0) = 1$	1) $y = \sqrt{x} + 2$; 2) $y = -\sqrt{1-x^2} + 2$; 3) $y = -\sqrt{1-x^2}$; 4) $y = +2$; 5) $y = \sqrt{C}$.
3.	Найти частное решение (частный интеграл) уравнения $xy' + y = \sin x, y(\pi/2) = 2/\pi$	1) $y = 1/x$; 2) $y = (1 - \cos x)$; 3) $y = (1 - \cos x)/x$; 4) $y = (1 + \cos x)/x$;5) $y = (1 - \sin x)/x$
4.	Найти общее решение дифференциального уравнения $xdy - ydx = \sqrt{x^2 + y^2}dx$	1) $y = Cx^2$; 2) $\sqrt{x^2 + y^2} = Cx^2$; 3) $y + \sqrt{x} = Cx^2$; 4) $y + \sqrt{x^2 + y^2} = 1$; 5) $y + \sqrt{x^2 + y^2} = Cx^2$.
5.	Найти общее решение дифференциального уравнения $dx/y - xdy/y^2 = 0$	1) $x/y = C$; 2) $x^2/y = C$;3) $x/y^2 = C$; 4) $x = C$; 5) $y = C$
6.	Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' = \cos^2 x$	1) $y = C_1x$; 2) $y = C_1x + C_2$; 3) $y = \cos 2x/8 + C_1x + C_2$; 4) $y = x^2/4 - \cos 2x/8 + C_1x + C_2$; 5) $y = x^2/4 + C_1x + C_2$.
7.	Найти частное решение дифференциального уравнения $y^3y'' = -1, y(1) = 1, y'(1) = 0$	1) $y = \sqrt{2x - x^2}$; 2) $y = \sqrt{2x}$; 3) $x = \sqrt{2y - y^2}$; 4) $x = \sqrt{2y}$; 5) $y = \sqrt{x}$
8.	Найти общее решение однородного дифференциального уравнения $y'' + y = 1/\cos^3 x$	1) $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$; 2) $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x + 1/(2\cos x)$; 3) $y = C \cos x$; 4) $y = C \sin x + 1/(2\cos x)$; 5) $y = 1/(2\cos x)$.
9	Найти общее решение дифференциального уравнения $4y'' - 4y' + y = -25\cos x$	1) $y = 3\cos x + 4\sin x$ 2) $y = C_1e^{x/2} + C_2xe^{x/2} + 3\cos x$ 3) $y = C_2xe^{x/2} + 3\cos x + 4\sin x$ 4) $y = C_1e^{x/2} + C_2xe^{x/2}$ 5) $y = C_1e^{x/2} + C_2xe^{x/2} + 3\cos x + 4\sin x$
10	Решить систему дифференциальных уравнений $\begin{cases} x' - y = -\cos t, \\ y' + x = \sin t. \end{cases}$	1) $x = C_1 + C_2 - t\cos t, y = -C_1 + C_2 + t\,\mathrm{sint}$ 2) $x = C\sin t - t\cos t, y = C\cos t + t\,\mathrm{sint}$ 3) $x = C\cos t - t\cos t, y = -C\sin t + t\,\mathrm{sint}$; 4) $x = C_1\cos t + C_2\sin t, y = -C_1\sin t + C_2\cos t + t\,\mathrm{sint}$ 5) $x = C_1\cos t + C_2\sin t - t\cos t, y = -C_1\sin t + C_2\cos t + t\,\mathrm{sint}$

Тест: «Дифференциальные уравнения»

Ответы

Вариант	Задания							
	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	3	1	3	2	4	3	1	2
2	2	1	4	2	1	3	1	3	5
3	2	5	1	2	4	1	3	1	5
4	3	1	1	2	5	4	4	3	2
5	1	3	4	1	2	4	5	2	1
6	2	1	1	5	3	5	3	2	3
7	3	5	1	1	3	2	4	2	4
8	2	4	1	5	3	1	5	2	5
9	1	3	1	3	2	4	4	5	1
10	2	3	5	1	4	1	2	5	5
11	1	3	1	3	2	4	3	1	2
12	2	1	4	2	1	3	1	3	5
13	2	5	1	2	4	1	3	1	5
14	3	1	1	2	5	4	4	3	2
15	1	3	4	1	2	4	5	2	1
16	2	1	1	5	3	5	3	2	3
17	3	5	1	1	3	2	4	2	4
18	2	4	1	5	3	1	5	2	5
19	1	3	1	3	2	4	4	5	1
20	2	3	5	1	4	1	2	5	5
21	1	3	1	3	2	4	3	1	2
22	2	1	4	2	1	3	1	3	5
23	2	5	1	2	4	1	3	1	5
24	3	1	1	2	5	4	4	3	2
25	1	3	4	1	2	4	5	2	1
26	2	1	1	5	3	5	3	2	3
27	3	5	1	1	3	2	4	2	4
28	2	4	1	5	3	1	5	2	5
29	1	3	1	3	2	4	4	5	1
30	2	3	5	1	4	1	2	5	5

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2

1–20. Найти неопределенные интегралы:

1. а) $\int \sin 2x e^{\cos 2x} dx$; б) $\int \frac{\ln x}{x^4} dx$; в) $\int \frac{14dx}{(x^2 - x + 1)(x+2)}$; г) $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$.

2. а) $\int \frac{\cos\sqrt{x} dx}{\sqrt{x}}$; б) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx$; в) $\int \frac{60dx}{(x^2+4)(x+4)^2}$; г) $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$.

3. а) $\int x^2 e^{-x^3} dx$; б) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx$; в) $\int \frac{11x+16}{(x-1)(x^2+4x+4)} dx$; г) $\int (x^2-4)\sin 5x dx$.

4. а) $\int \cos x e^{-\sin x} dx$; б) $\int \cos^6 x \sin^3 x dx$; в) $\int \frac{2x^2+x+3}{(x+1)(x^2+x+1)} dx$; г) $\int \arccos 2x dx$.

5. а) $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$; б) $\int \frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x} dx$; в) $\int \frac{x+2}{x^3 - 2x^2} dx$; г) $\int x \ln(x^2+4) dx$.

6. а) $\int \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx$; б) $\int x^3 e^{x^2} dx$; в) $\int \frac{10dx}{(x^2+1)(x-2)(x-1)}$; г) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2} - \sqrt{2x+1}}$.

7. а) $\int \frac{e^{\operatorname{ctg} 2x}}{\sin^2 2x} dx$; б) $\int (x^2+2x-3)e^{-x} dx$; в) $\int \frac{5dx}{(x^2+4)(x-1)}$; г) $\int \frac{x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}{x(1+\sqrt[3]{x})} dx$.

8. а) $\int \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$; б) $\int \operatorname{arctg}\sqrt{x} dx$; в) $\int \frac{4dx}{(x+1)^2(x+3)}$; г) $\int \sin^4 x \cos^2 x dx$.

9. а) $\int \frac{e^{\operatorname{arctg} 3x}}{1+9x^2} dx$; б) $\int (x^2-3x)\ln(x+2) dx$; в) $\int \frac{5x^2-28x+44}{(x-2)^2(x-4)^2} dx$;

г) $\int \sin^5 x \sqrt[5]{\cos^3 x} dx$.

10. а) $\int \frac{\operatorname{arctg}^2 2x}{1+4x^2} dx$; б) $\int x\cos^2 3x dx$; в) $\int \frac{2x^2-5x+1}{x^3-2x^2+x} dx$; г) $\int \frac{\cos^3 2x}{\sqrt[3]{\sin^2 2x}} dx$.

11. а) $\int \frac{\arcsin 3x}{\sqrt{1-9x^2}} dx$; б) $\int x^2 e^{-3x} dx$; в) $\int \frac{x^3+x^2-x-4}{(x-1)(x+2)} dx$; г) $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^4 x}} dx$.

12. а) $\int \frac{\operatorname{tg}^3 3x}{\cos^2 3x} dx$; б) $\int x^2 \sin 2x dx$; в) $\int \frac{2x^2+10x-4}{(x-1)^2(x+3)} dx$; г) $\int \frac{dx}{\cos x - 3\sin x}$.

13. а) $\int \frac{6x^5+1}{x^6+x+1}dx$; б) $\int x\ln(x^2+2)dx$; в) $\int \frac{2x^2-x-18}{(x^2+4)(x+2)(x+1)}dx$;

г) $\int \frac{dx}{\sin^2 x-16\sin x\cos x}$.

14. а) $\int \frac{x^2}{\sin^2(2+x^3)}dx$; б) $\int x^2e^{3x}dx$; в) $\int \frac{x^3-3x+1}{(x+1)(x-2)}dx$; г) $\int \frac{dx}{4\sin^2 x-5\cos^2 x}$.

15. а) $\int \frac{xdx}{\cos x^2}$; б) $\int x\ln(x^2-2x+3)dx$; в) $\int \frac{-x^2-5x}{(x^2+x+1)(x-2)}dx$; г) $\int \frac{dx}{5+4\sin x}$.

16. а) $\int x\sin(1-3x^2)dx$; б) $\int 2xe^{-x}dx$; в) $\int \frac{5x^4+1}{x^3+x}dx$; г) $\int \frac{dx}{3\sin^2 x+5\sin x\cos x+\cos^2 x}$.

17. а) $\int x\cos(3x^2+2)dx$, б) $\int x\,\mathrm{arctg}\,2xdx$, в) $\int \frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}dx$, г) $\int \sin 5x\cos 4xdx$.

18. а) $\int \frac{e^{\sqrt{x+3}}}{\sqrt{x+3}}dx$, б) $\int x\ln xdx$, в) $\int \frac{x^3+5x+2}{x(x+2)}dx$, г) $\int \cos^2 3xdx$.

19. а) $\int \frac{x^6dx}{4+x^7}$, б) $\int x\sin^2 2xdx$, в) $\int \frac{3x+2}{x^2(x+4)}dx$, г) $\int \sqrt{\sin x}\cos^5 xdx$.

20. а) $\int x^2\sqrt{3-4x^3}dx$, б) $\int \frac{x}{\sin^2 x}dx$, в) $\int \frac{x+4}{x(x^2+4)}dx$, г) $\int \frac{dx}{4-3\cos^2 x+5\sin^2 x}$.

21–40. (Приложения определенного интеграла)

21–26. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

21. $y=\sin x,\ x\in\left[-\frac{3}{2}\pi;\frac{\pi}{2}\right],\ y=1$. **22.** $y=e^x,\quad y=e^{-x},\quad x=1$.

23. $y=e^x,\ y=e^{-x},\ y=2$. **24.** $\begin{cases} y=2\sin t; \\ x=3\cos t. \end{cases}$ **25.** $\begin{cases} x=t^3; \\ y=t^2, \end{cases}$ $x=-1;\ x=1;\ y=0$ **26.** $\rho=2\sin 2\varphi$.

27–33. Найти длину дуги кривой:

27. $y=\ln\cos x,\quad x\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$. **28.** $\begin{cases} x=t^2; \\ y=t^3, \end{cases}$ $t\in[0;1]$. **29.** $\begin{cases} x=\cos^3 t \\ y=\sin^3 t \end{cases}$, $t\in[0;2\pi]$.

30. $\begin{cases} x=t-\sin t; \\ y=1+\cos t, \end{cases}$ $t\in[0;\ 2\pi]$. **31.** $\rho=1+\sin\varphi;\ \varphi\in[0;\pi]$.

32. $\rho=3(1-\cos\varphi),\quad \varphi\in[0;\pi]$. **33.** $\rho=e^{2\varphi},\quad \varphi\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

34–40. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями:

34. $y = \sin x;\ y = 0;\ x \in [0; \pi]$. **35.** $y = -x^2 + 5, y = 1$. **36.** $y = x^2, \quad y = 0, \quad x = 2$.

37. $y = e^{-x}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 1$. **38.** $y = \ln x, \quad x = 4, \quad y = 0$.

39. $\begin{cases} x = \cos t; \\ y = 3\sin t. \end{cases}$ **40.** $\begin{cases} x = 2(t - 2\sin t); \\ y = 2(1 - \cos t); \end{cases} \quad t \in [0; 2\pi];\ y = 0$.

41–60. Найти $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ для функции $z = z(x, y)$.

41. $z = e^{\frac{y^2}{x}}$. **42.** $z = \dfrac{y}{x} - 2\sin 2x$. **43.** $z = \dfrac{y^2}{x} + tg^2 y$. **44.** $z = e^{-\frac{x}{y}}$. **45.** $z = e^{\frac{x^2}{y}}$.

46. $z = e^{\frac{x}{y^2}}$. **47.** $z = xe^{\frac{x}{y}}$. **48.** $z = ye^{\frac{x}{y}}$. **49.** $z = xe^{\frac{x^2}{y}}$. **50.** $z = \cos^2(x + y)$.

51. $z = \sin^2(x + y)$. **52.** $z = \ln(x^3 - 2y)$. **53.** $z = \ln(x^3 - 3y^3)$. **54.** $z = \dfrac{x}{y^2} + y^3$.

55. $z = \dfrac{x^2}{y} + y$. **56.** $z = \dfrac{x^2}{y^2} + x^3 - y$. **57.** $z = \dfrac{1}{x} + 2x^2 y$. **58.** $z = \cos(x + y^2)$.

59. $z = \sin(y + x^2)$. **60.** $z = \cos(x^2 + y)$.

61–80. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = z(x, y)$ в заданной замкнутой области $\overline{D}$.

61. $z = x^2 y(4 - x - y), \quad \overline{D} : x \ge 0, y \ge 0, x + y \le 6$.

62. $z = x^2 - y^2, \quad \overline{D} : x^2 + y^2 \le 1$.

63. $z = 2x^2 - 2y^2, \quad \overline{D} : x^2 + y^2 \le 9$.

64. $z = 1 - x + x^2 + 2y, \quad \overline{D} : x \ge 0, y \ge 0, x + y \le 1$.

65. $z = 2x^3 - 6xy + 3y^2, \quad \overline{D} : x \ge 0, y \le 2, y \ge \dfrac{1}{2}x^2$.

66. $z = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy, \quad \overline{D} : y \ge x^2, 0 \le y \le 4$.

67. $z = x^2 - y^2 + 8, \quad \overline{D} : x^2 + y^2 \le 4$.

68. $z = x^3 + y^3 - 9xy + 27, \quad \overline{D} : 0 \le x \le 4, 0 \le y \le 4$.

69. $z = x^2 + 4xy - y^2 - 6x - 2y, \quad \overline{D} : x \ge 0, y \ge 0, 0 \le x + y \le 4$.

70. $z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x + 5, \quad \overline{D}: x \geq 0, y \geq 0, 0 \leq x + y \leq 3$.

71. $z = x^2 + xy - 3x - y, \quad \overline{D}: 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3$.

72. $z = x^2 + 2xy - y^2 - 2x + 2y + 3, \quad \overline{D}: x \leq 2, y \geq 0, y \leq x + 2$.

73. $z = x^2 + y^2 - 6x + 4y + 2, \quad \overline{D}: 0 \leq x \leq 4, -3 \leq y \leq 2$.

74. $z = x^2 - 2xy + 3, \quad \overline{D}: 0 \leq y \leq 4 - x^2$.

75. $z = 5x^2 - 3xy + y^2 + 4, \quad \overline{D}: -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$.

76. $z = x^2 - y^2 + 2xy + 4x, \quad \overline{D}: x \leq 0, y \leq 0, y \geq -x - 2$.

77. $z = x^2 + 2xy - y^2 - 2x + 2y, \quad \overline{D}: x \leq 2, y \geq 0, y \leq x + 2$.

78. $z = 6xy - 9x^2 - 9y^2 + 4x + 4y, \quad \overline{D}: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$.

79. $z = xy - 3x - 2y, \quad \overline{D}: 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 4$.

80. $z = 3x^2 + 3y^2 - 2x - 2y - 2, \quad \overline{D}: x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1$.

81–120. Проинтегрировать дифференциальное уравнение. При заданном начальном условии найти соответствующий частный интеграл или частное решение.

81. $x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2}\,y' = 0$.

82. $\sin x \sin y dx + \cos x \cos y dy = 0$.

83. $y' = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2}$.

84. $(1+y^2)dx = xydy; \quad y\big|_{x=2} = 1$.

85. $y' = \dfrac{2y}{x} - x^3$.

86. $(x + e^{x/y})dx + e^{x/y}\left(1 - \dfrac{x}{y}\right)dy = 0$.

87. $y' + \dfrac{4y}{x} + x = 0$.

88. $y' - 7y = 8e^{3x}; \ y\big|_{x=0} = 0$.

89. $3e^y \cos x dy - \sin(9 + e^y)dx = 0$.

90. $\operatorname{ctg} x \cos^2 y dx + \sin^2 x \operatorname{tg} y dy = 0$.

91. $y' \sin x = y \cos x + 2\cos x$.

92. $\sin x \operatorname{tg} y dx - \dfrac{dy}{\sin y} = 0$.

93. $e^x \operatorname{tg} y dx = (1 - e^x)\sec^2 y dy$.

94. $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{3}{x}y = -x^3 y^2$.

95. $(x^2 - 2xy)y' = xy - y^2$.

96. $y' + ytgx = \sec x; \quad y(0) = 0$.

97. $x^2 y' + xy + 1 = 0; \quad y(1) = 0$.

98. $y' + x\sqrt[3]{y} = 3y$.

99. $y' - y + y^2 \cos x = 0$.

100. $xy' = \dfrac{y}{\ln x}$; $\quad y\big|_{x=e} = 1$.

101. $2yy'' = 3(y')^2 + 4y^2$; $\quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0$. **102.** $3y'y'' = 2y$; $\quad y(0) = y'(0) = 1$

103. $y''y^3 = 1$; $\quad y(0{,}5) = y'(0{,}5) = 1$. **104.** $y''(1 + \ln x) + \dfrac{y'}{x} = 2 + \ln x$; $\quad y(1) = 0{,}5,\quad y'(1) = 1$.

105. $yy'' + (y')^2 = 1$; $\quad y(0) = y'(0) = 1$. **106.** $y'' = \dfrac{y'}{x}(1 + \ln\dfrac{y'}{x})$; $\quad y(1) = 0{,}5,\ y'(1) = 1$.

107. $2yy'' + y^2 = (y')^2$; $\quad y(0) = y'(0) = 1$. **108.** $2yy'' = (y')^2 + y^2$; $\quad y(0) = y'(0) = 1$.

109. $e^y(y'' + (y')^2) = 2; y(1) = 0,\ y'(1) = 2$. **110.** $2y' = (x + \dfrac{1}{x})y''$; $\quad y(1) = 4,\ y'(1) = 6$.

111. $xy'' = y'\ln y'$; $\quad y(1) = e,\ y'(1) = e$. **112.** $x^2y'' + xy' = 1$.

113. $y'' = e^{2y}$; $\quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1$. **114.** $x(y'' - x) = y'$; $\quad y(1) = y'(1) = 1$.

115. $y'' + y = (y')^2; y(1) = -0{,}25,\ y'(1) = 0{,}5$. **116.** $1 - yy'' = (y')^2$; $\quad y(-1) = 1,\ y'(-1) = 1$.

117. $y''x\ln x = 2y'$. **118.** $y'' + y'\operatorname{tg} x = \sin 2x$.

119. $x(y'' + y') = y'; y(1) = -1,\ y'(1) = 1$. **120.** $x(y'' + 1) + y' = 2; y(1) = \dfrac{7}{4},\ y'(1) = \dfrac{5}{2}$.

121–140. Найти общие решения уравнений.

121. $y'' - 4y' + 4y = x^2$.

122. $y'' + 8y' = 8x$.

123. $y'' + 4y' + 4y = 8e^{-2x}$.

124. $y'' + 4y' + 3y = 9e^{-3x}$.

125. $7y'' - y' = 14x$.

126. $y'' + 3y' = 3xe^{-3x}$.

127. $y'' + 5y' + 6y = 10(1 - x)e^{-2x}$.

128. $y'' + 2y' + 2y = 1 + x$.

129. $y'' - 3y' + 2y = xe^x$.

130. $y'' + y' - 2y = x^2e^{4x}$.

131. $y'' - 3y' + 2y = (x^2 + x)e^{3x}$.

132. $y'' - 2y' + y = x^3$.

133. $y'' - 4y' - 5y = (27x - 39)e^{-4x}$.

134. $y'' - 4y' + 3y = 10e^{3x}$.

135. $y'' + 4y' = -2xe^{-4x}$.

136. $y'' + 4y' + 4y = 3xe^{-2x}$.

137. $y'' + y' - 6y = xe^{2x}$.

138. $y'' - y' + y = x^3 + 6$.

139. $y'' + 2y' + y = e^{2x}$.

140. $y'' + 3y' - 10y = 10x^2 + 4x - 5$.

ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Интегральное исчисление функций одной переменной

1. Первообразная функция. Неопределённый интеграл и его свойства. Таблица основных неопределённых интегралов. Замена переменной в неопределённом интеграле и интегрирование по частям.

2. Интегрирование рациональных функций разложением на сумму простых дробей.

3. Интегрирование выражений, содержащих тригонометрические функции и некоторые иррациональные функции.

4. Понятие определённого интеграла. Суммы Дарбу и их свойства. Необходимые и достаточные условия интегрируемости функций. Интегрирование непрерывных и кусочно-непрерывных функций.

5. Интеграл с переменным верхним пределом и его дифференцирование. Формула Ньютона-Лейбница.

6. Замена переменной в определённом интеграле. Формула интегрирования по частям в определённом интеграле.

7. Геометрические приложения определённого интеграла: вычисление площадей плоских фигур; объемов тел; длин дуг; площадей поверхностей вращения.

8. Физические приложения определённых интегралов: вычисление работы; пути; давления; массы; центра тяжести; статических моментов и моментов инерции.

9. Несобственные интегралы первого и второго рода. Определения, признаки сходимости, абсолютная и условная сходимость.

Дифференциальное исчисление функций многих переменных

1. Множества на плоскости и в пространстве. Функции многих переменных (ФМП). Предел ФМП в точке и его свойства. Повторные пределы. Непрерывность ФМП в точке и на множестве.

2. Частные производные ФМП. Дифференциал ФМП и его связь с частными производными. Дифференциал сложной функции. Инвариантность формы первого дифференциала.

3. Линии и поверхности уровня. Производная по направлению ФМП и градиент. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Геометрический смысл дифференциала функции двух переменных.

4. Частные производные высших порядков. Теорема о равенстве смешанных производных. Дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора для ФМП. Понятие неявной ФМП, её существование и дифференцирование.

5. Понятие экстремума ФМП. Необходимое и достаточное условие экстремума. Метод наименьших квадратов. Наибольшее и наименьшее значение функции в замкнутой области. Условный экстремум; метод множителей Лагранжа.

Интегральное исчисление функций многих переменных

1. Определение двойного интеграла и его свойства. Геометрический и физический смысл двойного интеграла. Вычисление двойных интегралов в декартовой системе координат. Перемена порядка интегрирования в повторном интеграле.

2. Тройной интеграл, его определение, свойства, вычисление в декартовой системе координат.

3. Криволинейные координаты на плоскости и в пространстве. Якобиан и его геометрический смысл. Замена переменных в двойном и тройном интегралах. Двойной интеграл в полярной системе координат. Тройной интеграл в цилиндрической и сферической системах координат.

4. Приложения кратных интегралов: вычисление объёмов; площадей; статических моментов; центра тяжести; моментов инерции.

5. Определение, свойства и вычисление криволинейных интегралов первого рода. Приложения криволинейных интегралов первого рода.

6. Определение, свойства и вычисление криволинейных интегралов второго рода. Приложения криволинейных интегралов второго рода. Связь криволинейных интегралов первого и второго рода.

7. Формула Грина. Независимость криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования.

8. Площадь поверхности. Поверхностный интеграл первого рода, его вычисление, свойства, приложения.

9. Нормаль к поверхности. Односторонние и двусторонние поверхности. Ориентация двусторонней поверхности. Поверхностный интеграл второго рода, его вычисление и свойства. Формулы Остроградского и Стокса. Связь ПОВИ-1 и ПОВИ-2.

Обыкновенные дифференциальные уравнения и системы дифференциальных уравнений

1. Основные понятия теории обыкновенных дифференциальных уравнений (ДУ). Общее и частное решение ДУ. ДУ 1-го порядка. Задача Коши для ДУ первого порядка. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для ДУ первого порядка. Метод изоклин.

2. Примеры ДУ первого порядка, интегрируемых в квадратурах: с разделяющимися переменными; однородные; в полных дифференциалах; линейное; Бернулли.

3. Общие понятия о ДУ высших порядков. Задача Коши. Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Уравнения, допускающие понижение порядка. Понятие о краевых задачах. Линейные однородные ДУ и свойства их решений. Структура общего решения неоднородных линейных ДУ высших порядков.

4. Линейные однородные ДУ высших порядков, свойства их решений. Линейная зависимость и независимость системы функций. Определитель Вронского. Линейные однородные ДУ с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение. Линейное неоднородное ДУ с постоянными коэффициентами и специальной правой частью. Метод вариации произвольных постоянных.

5. Линейные однородные системы ДУ с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение. Линейное неоднородные системы ДУ с постоянными коэффициентами.

6. Устойчивость по Ляпунову решений линейных систем второго порядка. Устойчивость нелинейных систем по первому приближению. Фазовая плоскость и особые точки двумерных систем.

Векторный анализ и элементы теории поля

1. Скалярные и векторные поля. Векторные линии поля и их дифференциальные уравнения.

2. Потенциальное поле. Потенциальная функция поля. Поток векторного поля.

3. Дивергенция векторного поля. Физический смысл формулы Остроградского.

4. Линейный интеграл в векторном поле. Работа силового поля. Циркуляция и ротор векторного поля. Физический смысл формулы Стокса.

5. Оператор Гамильтона. Дифференциальные операции второго порядка. Оператор Лапласа. Дифференциальные операции первого и второго порядков в цилиндрических и сферических координатах.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ ВОПРОСЫ ДЛЯ СТУДЕНТОВ 1 КУРСА (2 СЕМЕСТР)

Неопределенный и определенный интегралы

1. Первообразная и ее свойства.
2. Неопределенный интеграл и его свойства.
3. Основные правила интегрирования.
4. Замена переменной в неопределенном интеграле.
5. Интегрирование по частям в неопределенном интеграле.
6. Комплексные числа и действия над ними.
7. Формы записи комплексных чисел.
8. Теорема Безу.
9. Основная теорема алгебры и следствия из нее.
10. Разложение многочлена на множители.
11. Простейшие дроби и их интегрирование.
12. Теоремы о разложении правильной рациональной дроби на простейшие.
13. Вывод рекуррентной формулы для $\int \frac{dx}{\left(a^2+x^2\right)^n}$.
14. Нахождение интегралов вида $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx; \int \frac{Ax+B}{\sqrt{x^2+px+q}}dx$.
15. Нахождение интегралов вида $\int \sin^n x \cos^m x dx$.
16. Нахождение интегралов вида $\int \mathrm{tg}^n x dx, \int \mathrm{ctg}^n x dx$.
17. Нахождение интегралов вида $\int R(\sin x; \cos x)dx$. Универсальная тригонометрическая подстановка.
18. Интегрирование простейших иррациональных функций

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p}{q}}\right)dx.$$

19. Интегрирование биномиального дифференциала.
20. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла.
21. Определение определенного интеграла и его свойства.
22. Теорема о производной от определенного интеграла с переменным верхним пределом интегрирования.
23. Формула Ньютона-Лейбница.
24. Замена переменной в определенном интеграле.

25. Интегрирование по частям в определенном интеграле.

26. Вычисление площадей криволинейных трапеций с помощью определенного интеграла в декартовой и полярной системах координат.

27. Вычисление длины дуги кривой с помощью определенного интеграла:

   а) в декартовой системе координат;

   б) в полярной системе координат;

   в) кривой, заданной параметрически.

28. Вычисление объема тел по площадям поперечных сечений.

29. Вычисление объемов тел вращения.

30. Несобственные интегралы по бесконечному промежутку интегрирования.

31. Несобственные интегралы от неограниченных функций.

Двойные и тройные интегралы

32. Геометрический и физический смысл двойного интеграла. Основные свойства.

33. Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах.

34. Замена переменных в двойном интеграле. Вычисление двойного интеграла в полярных координатах.

35. Тройной интеграл. Основные понятия. Свойства.

36. Вычисление тройного интеграла в цилиндрических координатах.

37. Вычисление тройного интеграла в сферических координатах.

Криволинейные и поверхностные интегралы

38. Криволинейные интегралы первого рода. Основные понятия. Свойства.

39. Вычисление криволинейных интегралов первого рода.

40. Криволинейные интегралы второго рода. Основные понятия. Свойства.

41. Вычисление криволинейного интеграла второго рода.

42. Формула Грина.

43. Условия независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования.

44. Поверхностные интегралы первого рода. Основные понятия. Свойства.

45. Вычисление поверхностных интегралов первого рода.

46. Поверхностные интегралы второго рода. Основные понятия. Свойства.

47. Формула Остроградского.

48. Формула Стокса.

Элементы теории поля

49. Скалярное поле. Поверхности и линии уровня. Производная по направлению.
50. Градиент скалярного поля.
51. Векторное поле. Силовые линии поля.
52. Поток векторного поля.
53. Дивергенция поля. Формула Остроградского.
54. Циркуляция поля. Физический смысл.
55. Ротор поля. Формула Стокса.
56. Соленоидальное поле. Свойство векторной трубки.
57. Потенциальное и гармоническое поля.
58. Оператор Гамильтона. Векторные дифференциальные операции первого порядка.
59. Векторные дифференциальные операции второго порядка.
60. Дифференциальное исчисление функций многих переменных
61. Предел функций нескольких переменных.
62. Непрерывность функций нескольких переменных.
63. Частные производные функций нескольких переменных и их геометрический смысл.
64. Полный дифференциал.
65. Частные производные высших порядков.
66. Полные дифференциалы высших порядков.
67. Дифференцирование сложных функций.
68. Дифференцирование неявно заданных функций.
69. Инвариантность формы полного дифференциала.
70. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.
71. Производная по направлению.
72. Градиент и его свойства.
73. Теорема о связи производной по направлению и градиента.
74. Экстремум функции нескольких переменных. Необходимое условие существования.
75. Достаточное условие существования экстремума.
76. Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции в замкнутой области.
77. Условный экстремум. Необходимое и достаточное условия существования.
78. Метод наименьших квадратов.
79. Линейная аппроксимация.

Дифференциальные уравнения и системы дифференциальных уравнений

80. ДУ 1-го порядка. Решение, общее решение, задача Коши, теорема существования и единственности решения задачи Коши.
81. ДУ с разделяющимися переменными.
82. Однородные ДУ 1-го порядка.
83. Линейные ДУ 1-го порядка.
84. Уравнение Бернулли.
85. ДУ в полных дифференциалах.
86. ДУ n-го порядка, решение, общее решение, задача Коши, теорема существования и единственности решения задачи Коши.
87. ДУ высших порядков, допускающие понижение порядка.
88. Линейный дифференциальный оператор и его свойства.
89. Свойства решений линейных однородных ДУ.
90. Линейная зависимость решений. Определитель Вронского и его свойства.
91. Теорема о структуре общего решения линейного однородного ДУ.
92. Построение общего решения линейного однородного ДУ с постоянными коэффициентами.
93. Теорема о структуре общего решения линейного неоднородного ДУ.
94. Метод Лагранжа для нахождения частного решения линейного неоднородного ДУ.
95. Нахождение частных решений линейных неоднородных ДУ с постоянными коэффициентами и специальной правой частью.
96. Системы ДУ. Решение, общее решение, задача Коши, теорема существования и единственности решения задачи Коши.
97. Метод исключений для решения систем ДУ.

ПЕРЕЧЕНЬ УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИХ ПОСОБИЙ

1. Белько, И. В. Высшая математика для инженеров в 2 ч. Ч. 2 / И. В. Белько, К. К. Кузьмич, Р. М. Жевняк – М.: Новое знание, 2007.

2. Гусак, А. А. Высшая математика. Т. 2. / А. А. Гусак. – Мн.: ТетраСистемс, 2009.

3. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 2 // П. Е. Данко [и др.] – М.: Оникс, 2005.

4. Минюк, С. А. Математика для инженеров: учебник в 2 т. / С. А. Минюк, Н. С. Березкина, А. В. Метельский. – Т. 1. – Минск: Элайда, 2006.

5. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления (для втузов). Т. 2 / Н. С. Пискунов. – М.: Наука, 1985.

6. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике / Д. Т. Письменный. – М.: Айрис Пресс, 2010.

7. Рябушко, А. П. Индивидуальные задания по высшей математике: учебное пособие: в 4 ч. / А. П. Рябушко [и др.]. – Ч. 1. – Минск: Вышэйшая школа, 2009.

8. Сборник задач по математике для втузов. Ч. 2 / Под редакцией А. В. Ефимова и Б. П. Демидовича. – М.: Наука, 1985.