УДК 624.539.3

Оптимизация прямоугольной плиты кусочно-постоянной толщины с отверстием

Вербицкая О. Л., Шевчук Л. И.
Белорусский национальный технический институт

Решена задача оптимизации поперечно изогнутой железобетонной прямоугольной плиты с отверстием, подкрепленной ребрами жесткости. Статический расчет плиты выполнен методом конечных элементов (МКЭ) с помощью авторской программы *STURM*. Для построения численной модели использованы прямоугольные плитные конечные элементы с четырьмя узлами и двенадцатью степенями свободы. Для определения жесткости конечных элементов, ширины раскрытия трещин и предельного изгибающего момента использована методика СНБ 5.03.01-02. В связи с этим плиту следует рассматривать как нелинейно-деформируемую.

Для поиска оптимального решения используются результаты анализа целевой функции в окрестности точки поиска. Пусть конструктивные и геометрические особенности плиты описаны n параметрами оптимизации, образующими n-мерное пространство R_n. В качестве целевой функции взята стоимость материала плиты – бетона и арматуры

$$C\left(\vec{X}_0\right) = min C\left(\vec{X}\right), \quad \vec{X} \subseteq R_n, \quad \vec{X} = \left(x_1, x_2, ..., x_n\right)^T. \qquad (1)$$

Поставлены конструктивные ограничения и ограничения по прочности

$$x_k \geq x_{lim}, \qquad k = 1,2,...,n; \qquad M_{Rd} - M_{Sd} \geq 0, \qquad (2)$$

где M_{Rd} – предельный изгибающий момент для сечения плиты, определяемый по СНБ 5.03.01-02; M_{Sd} – расчетный изгибающий момент в сечении плиты вычисляемый с учетом нелинейности деформирования железобетона.

Пусть для сформулированной оптимизационной задачи некоторая точка $\left(\dot{x}_1, \dot{x}_2, ..., \dot{x}_n\right)^T$ многомерного пространства R_n находится вблизи границы, заданной ограничением по условию прочности. В некоторой малой окрестности эту границу представим как гиперплоскость, описанную линейным уравнением.

Около этой точки построим эллипсоид с полуосями $s_1, s_2, \ldots, s_n$ и центром в точке $\{\dot{x}_n\}$.

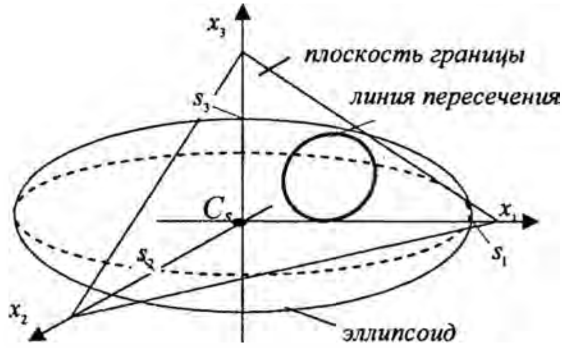

Рисунок 1 – Линия пересечения гиперплоскости и эллипсоида

Линия пересечения гиперплоскости и эллипсоида определяется решением системы уравнений (3)

$$k_1x_1 + k_2x_2 + \ldots + k_nx_n = k_0; \quad \left(\frac{x_1 - \dot{x}_1}{s_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2 - \dot{x}_2}{s_2}\right)^2 + \left(\frac{x_n - \dot{x}_n}{s_n}\right)^2 = 1. \tag{3}$$

Используя уравнения (3), выразим параметры x_n и x_{n-1} через другие параметры оптимизации $x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}$ и получим систему двух уравнений с двумя неизвестными (4)

$$k_{n-1}x_{n-1} + k_nx_n = K; \quad \left(\frac{x_{n-1} - \dot{x}_{n-1}}{s_{n-1}}\right)^2 + \left(\frac{x_n - \dot{x}_n}{s_n}\right)^2 = D, \tag{4}$$

где $K = k_0 - \left(k_1x_1 + k_2x_2 + \ldots + k_{n-2}x_{n-2}\right)$;

$$D = 1 - \left[\left(\frac{x_1 - \dot{x}_1}{s_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2 - \dot{x}_2}{s_2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{x_{n-2} - \dot{x}_{n-2}}{s_{n-2}}\right)^2\right].$$

Решив систему уравнений (4) относительно неизвестных x_{n-1} и x_n, получим функции (5), выражающие эти оба неизвестные через другие параметры оптимизации.

$$x_n = \frac{-b_* \pm \sqrt{b_*^2 - 4ac_*}}{2a}; \qquad x_n = \frac{-b_{**} \pm \sqrt{b_{**}^2 - 4ac_{**}}}{2a}, \qquad (5)$$

где $\quad a = s_n^2 k_n^2 + s_{n-1}^2 k_{n-1}^2;$

$$b_* = -2\left(s_n^2 k_n K - s_n^2 \dot{x}_{n-1} k_{n-1} k_n + s_{n-1}^2 k_{n-1}^2 \dot{x}_n\right);$$

$$b_* = -2\left(s_{n-1}^2 k_{n-1} K - s_{n-1}^2 \dot{x}_n k_{n-1} k_n + s_n^2 k_n^2 \dot{x}_{n-1}\right);$$

$$c_* = s_2^2 K^2 - 2 s_n^2 \dot{x}_{n-1} k_{n-1} K + s_n^2 \dot{x}_{n-1}^2 k_{n-1}^2 + s_{n-1}^2 \dot{x}_n^2 k_{n-1}^2 - k_{n-1}^2 s_n^2 s_{n-1}^2 D;$$

$$c_{**} = s_{n-1}^2 K^2 - 2 s_{n-1}^2 \dot{x}_n k_n K + s_{n-1}^2 \dot{x}_n^2 k_n^2 + s_n^2 \dot{x}_{n-1}^2 k_n^2 - k_n^2 s_n^2 s_{n-1}^2 D.$$

Выполняя полученные условия (5), мы можем задавать произвольную комбинацию параметров $x_1, x_2, \dots, x_{n-2}$ и всегда при этом оставаться на границе определенной условием прочности. Это обеспечивает при поиске оптимального решения движение только по границе. Для повышения эффективности поиска оптимального решения следует использовать метод градиентного спуска [1] в пространстве R_{n-2}.

После выполнения изложенных выше действий в первом приближении следует повторить их во втором приближении, приняв в качестве центра эллипсоида найденную точку пространства R_n. Расчет должен продолжаться до тех пор, пока результаты следующих друг за другом приближений не станут меньше некоторой наперед заданной величины.

Используя предложенный нами метод, рассмотрен пример оптимизации прямоугольной железобетонной плиты $(5{,}6 \times 5{,}6\,м)$ с отверстием, подкрепленной ребрами жесткости ($b_r = 0{,}5\,м$) и шарнирно опертой по краю. Нагрузка представлена в виде четырех сил, приложенных в местах пересечения ребер. Были приняты следующие данные: класс бетона – $C^{20}/_{25}$; класс арматуры – $S400$; нагрузка – четыре силы по $150\,кН$; количество приближений при решении нелинейной задачи – 30; множитель релаксации – 0,3; цена бетона – 120 тыс.руб/м^3; цена арматуры – 1200 тыс.руб/т. В качестве параметров оптимизации приняты три величины: x_1 – высота ребра; x_2 – толщина полки; x_3 – площадь сечения арматуры в ребрах. Поэтому поиск оптимального решения происходит в трехмерном пространстве R_3.

Для определения оптимального решения при заданной погрешности 6% достаточно было выполнить три приближения. В результате расчета и в соответствии с принятыми исходными данными получена рациональная конструкция монолитной ребристой плиты с отверстием при следующих параметрах – $x_1 = 90\,мм$; $x_2 = 60\,мм$; $x_3 = 6{,}5\,см^2$. На рисунке 2 показан характер распределения изгибающих моментов в этой плите.

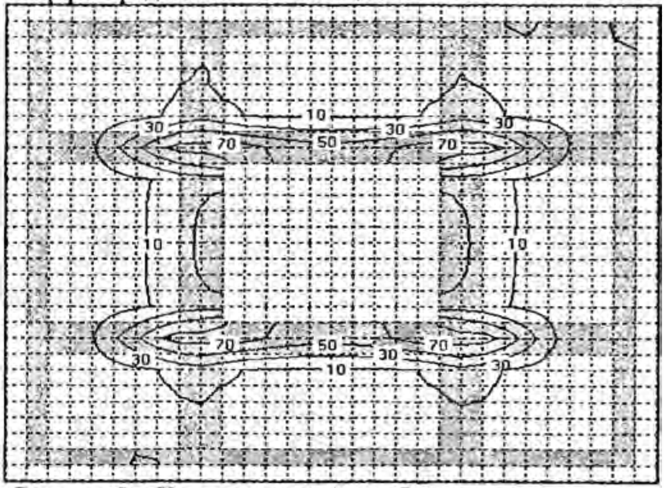

Рисунок 2 – Карта изолиний изгибающих моментов M_x

Выводы

1. В соответствии с принятыми исходными данными найдена оптимальная конструкция железобетонной плиты с отверстием, подкрепленной ребрами жесткости.
2. По характеру расположения изолиний изгибающих моментов M_X очевидно, что моменты сосредоточены в ребрах плиты. Полка плиты служит в большей степени для связи ребер и для передачи местных нагрузок на ребра.

Литература

1. Оптимизация прямоугольных железобетонных плит кусочно-постоянного сечения методом градиентного спуска по границе // Материалы Третьей международной научно-технической конференции: в 2 т. – Минск, 2006. – Том 1. – С. 400–402.