

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОЦЕНКИ СОСТОЯНИЯ  
МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ В ДИНАМИКЕ**

*Канд. техн. наук МИРОНОВ Д. Н.*

*Белорусский национальный технический университет*

Проблема длительной прочности сложных механических систем для каждого нового поколения машин становится все более актуальной в связи с ростом их стоимости и необходимостью более рентабельно реализовать их ресурс.

Вопрос оценки состояния механической системы в динамике представляет собой сложную математическую задачу, для решения которой разработаны различные методы [1, 2]. Сложность проблемы заключается в оценке и учете всех динамических и температурных нагрузок, действующих на рассматриваемую механическую систему с учетом многих факторов.

Рассмотрим слоистую оболочку, находящуюся под действием нагрузки. Считаем, что боковая поверхность  $k$ -го слоя состоит из линейчатых поверхностей, нормали которых перпендикулярны координатным линиям  $(\alpha, \beta)$  (рис. 1).

В многослойных конструкциях при действии поверхностных  $q(\alpha, \beta, t)$  и объемных  $q(\alpha, \beta, z, t)$  источников теплоты, обусловленных воздействиями концентрированных пото-

ков энергии, в случаях учета зависимости теплофизических характеристик материалов от температуры, лучистого теплового потока, разрушения материалов (вследствие накопления повреждений) для каждого слоя используются уравнения динамики и теплопроводности [1–3], записанные в системе криволинейных координат, связанной с поверхностью  $k$ -го слоя:

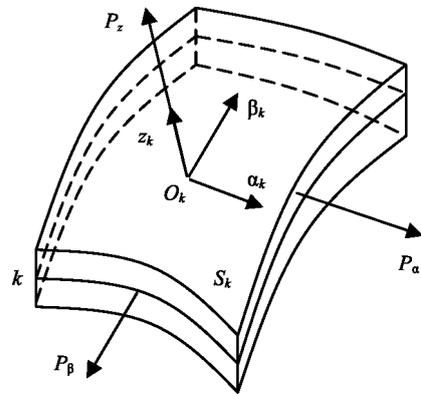


Рис. 1. Слоистая оболочка

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{\alpha z}}{\partial z} = & -\frac{1}{z} \tau_{\alpha z} - A_{1\alpha} \frac{\partial G_z}{\partial \alpha} - \Delta_{1\alpha} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} - \frac{1}{z^2} \Delta_{3\alpha\beta} \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} - \frac{1}{z} (\Delta_{2\alpha} + \Delta_{3\alpha\beta}) \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{1}{z} \Delta_{2\alpha} \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} - A_{2\alpha} \frac{\partial T}{\partial \alpha} - F_\alpha + \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial \tau_{\beta z}}{\partial z} = & -\frac{2}{z} \tau_{\beta z} - \frac{1}{z} A_{1\beta} \frac{\partial \sigma_z}{\partial \beta} - \frac{1}{z} (\Delta_{1\beta} + \Delta_{3\alpha\beta}) \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} - \Delta_{3\alpha\beta} \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2} - \frac{1}{z^2} \Delta_{2\beta} \frac{\partial^2 v}{\partial \beta^2} - \\ & - \frac{1}{z^2} \Delta_{2\beta} \frac{\partial \omega}{\partial \beta} - \frac{1}{z} A_{2\beta} \frac{\partial T}{\partial \beta} - F_\beta + \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}; \end{aligned} \tag{1}$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = -\frac{\partial \tau_{\alpha z}}{\partial \alpha} - \frac{1}{z} \frac{\partial \tau_{\beta z}}{\partial \beta} + \frac{1}{z} (-1 + A_{1\beta}) \sigma_z + \frac{1}{z} \Delta_{1\beta} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{1}{z^2} \Delta_{2\beta} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{1}{z^2} \Delta_{2\beta} \omega + \frac{1}{z} A_{2\beta} T - F_z + \rho \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2};$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial z} &= a_{55} \tau_{\alpha z} - \frac{\partial \omega}{\partial \alpha}; \quad \frac{\partial v}{\partial z} = a_{44} \tau_{\beta z} + \frac{1}{z} v - \frac{1}{z} \frac{\partial \omega}{\partial \beta}; \\ \frac{\partial \omega}{\partial z} &= m_{1z} \sigma_z + n_{1z} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{1}{z} n_{2z} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{1}{z} n_{2z} \omega + m_{2z} T; \\ \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} &= -\frac{1}{H_1 H_2} \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha} (H_2 q_\alpha) + \frac{\partial}{\partial \beta} (H_1 q_\beta) + \frac{\partial}{\partial z} (H_1 H_2 q_z) \right] + \rho q; \\ q_\alpha &= -\frac{1}{H_1} \lambda_\alpha \frac{\partial T}{\partial \alpha} \text{ при } \alpha \leftrightarrow \beta, z; \quad \frac{\partial T}{\partial z} = -\frac{1}{\lambda_z} q_z, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\tau_{\alpha z}, \tau_{\beta z}$  – напряжения, являются нелинейными функциями перемещений  $u, \omega, v$  и напряжения  $\sigma_z$ ;  $\Delta_{ij}, A_{ij}, n_{ij}, m_{ij}$  – коэффициенты, определяются физико-механическими параметрами слоев;  $q_z, T$  – функции теплового потока и температуры, характеризующие тепловое состояние оболочки;  $\alpha$  – продольная координата, отсчитываемая вдоль образующей оболочки;  $\beta$  – угол, измеряемый в окружном направлении;  $z$  – нормальная к срединной поверхности оболочки координата, отсчитываемая от центра цилиндра.

Граничные условия для тепловых величин на границах каждого слоя:

$$\begin{aligned} \text{при } \alpha = \alpha_1^* \quad T = T^*, \quad q_\alpha = q_\alpha^* \text{ при } \frac{\alpha \leftrightarrow \beta}{1 \leftrightarrow 2}; \\ \text{при } z = z^\pm \quad T = T^\pm, \quad q_z = q_z^\pm - \rho H \frac{\partial z}{\partial t} - \sigma \varepsilon T^4, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \text{при } z_l = z_{l+1} \quad T_l = T_{l+1}, \quad q_{z,l} = q_{z,l+1} \\ \text{на границах между слоями } l \text{ и } l + 1. \end{aligned} \quad (4)$$

Начальные условия при  $t = 0$ :

$$T = T_{t=0}, \quad (5)$$

где  $q_\alpha, q_\beta, q_z$  – тепловые потоки;  $\lambda_\alpha, \lambda_\beta, \lambda_z$  – коэффициенты теплопроводности для направлений  $\alpha, \beta, z$ ;  $H_1, H_2$  – параметры Ляме;  $T$  – температура;  $\rho$  – плотность;  $C_p$  – теплоемкость;  $H$  – эффективная энтальпия разрушения;  $\sigma$  – постоянная Стефана-Больцмана;  $\varepsilon$  – степень черноты.

Соотношения закона Гука имеют вид в каждом слое:

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= C_{11} \left\{ e_\alpha + \frac{1}{2} \left[ (2e_{\alpha 0} e_\alpha + e_\alpha^2) + \left[ 2 \left( \frac{1}{2} e_{\alpha\beta,0} + \omega_{z,0} \right) \left( \frac{1}{2} e_{\alpha\beta} + \omega_z \right) + \left( \frac{1}{2} e_{\alpha\beta} + \omega_z \right)^2 \right] \right] \right. \\ &\quad \left. + \left[ 2 \left( \frac{1}{2} e_{\alpha z,0} - \omega_{\beta,0} \right) \left( \frac{1}{2} e_{\alpha z} - \omega_\beta \right) + \left( \frac{1}{2} e_{\alpha z} - \omega_\beta \right)^2 \right] \right\} + C_{12} \left\{ e_\beta + \frac{1}{2} \left[ (2e_{\beta,0} e_\beta + e_\beta^2) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left[ 2 \left( \frac{1}{2} e_{\beta z,0} + \omega_{\alpha,0} \right) \left( \frac{1}{2} e_{\beta z} + \omega_\alpha \right) + \left( \frac{1}{2} e_{\beta z} + \omega_\alpha \right)^2 \right] + \left[ 2 \left( \frac{1}{2} e_{\alpha\beta,0} - \omega_{z,0} \right) \left( \frac{1}{2} e_{\alpha\beta} - \omega_z \right) + \left( \frac{1}{2} e_{\alpha\beta} - \omega_z \right)^2 \right] \right] \right\} + C_{13} e_z + C_\alpha T; \\ \tau_{\alpha\beta} &= C_{66} \left\{ e_{\alpha\beta} + \left[ e_{\alpha,0} \left( \frac{1}{2} e_{\alpha\beta} - \omega_z \right) + e_\alpha \left( \frac{1}{2} e_{\alpha\beta,0} - \omega_{z,0} + \frac{1}{2} e_{\alpha\beta} - \omega_z \right) \right] + \left[ e_{\beta,0} \left( \frac{1}{2} e_{\alpha\beta} + \omega_z \right) + e_\beta \left( \frac{1}{2} e_{\alpha\beta,0} + \omega_{z,0} + \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + \frac{1}{2} e_{\alpha\beta} + \omega_z \right) \right] + \left[ \left( \frac{1}{2} e_{\alpha z,0} - \omega_{\beta,0} \right) \left( \frac{1}{2} e_{\beta z} + \omega_\alpha \right) + \left( \frac{1}{2} e_{\alpha z} - \omega_\beta \right) \left( \frac{1}{2} e_{\beta z,0} + \omega_{\alpha,0} + \frac{1}{2} e_{\beta z} + \omega_\alpha \right) \right] \right\}; \\ \tau_{\alpha z} &= C_{55} \varepsilon_{\alpha z} \text{ при } \frac{\alpha \leftrightarrow \beta}{5 \leftrightarrow 4}. \end{aligned} \quad (6)$$

Выражения для  $\sigma_\beta$  и  $\sigma_z$  получаются из соотношения для  $\sigma_\alpha$  путем замены  $C_{11}$  на  $C_{12}$  и  $C_{13}$ ;  $C_{12}$  на  $C_{22}$  и  $C_{23}$ ;  $C_{13}$  на  $C_{23}$  и  $C_{33}$ .

Соотношения для деформаций в каждом слое:

$$\begin{aligned} \varepsilon_\alpha = e_\alpha + \frac{1}{2} \left\{ (2e_{\alpha,0}e_\alpha + e_\alpha^2) + \right. \\ \left. + \left[ 2 \left( \frac{1}{2} e_{\alpha\beta,0} + \omega_{z,0} \right) \left( \frac{1}{2} e_{\alpha\beta} + \omega_z \right) + \left( \frac{1}{2} e_{\alpha\beta} + \omega_z \right)^2 \right] + \right. \\ \left. + \left[ 2 \left( \frac{1}{2} e_{\alpha z,0} - \omega_{\beta,0} \right) \left( \frac{1}{2} e_{\alpha z} - \omega_\beta \right) + \left( \frac{1}{2} e_{\alpha z} - \omega_\beta \right)^2 \right] \right\} \\ \text{при } \alpha \leftrightarrow \beta; \quad \omega_{z,0} \leftrightarrow -\omega_{z,0}; \quad -\omega_{\beta,0} \leftrightarrow \omega_{\alpha,0}; \\ -\omega_\beta \leftrightarrow \omega_\alpha; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta} = e_{\alpha\beta} + \left[ e_{\alpha,0} \left( \frac{1}{2} e_{\alpha\beta} - \omega_z \right) + e_\alpha \left( \frac{1}{2} e_{\alpha\beta,0} - \right. \right. \\ \left. \left. - \omega_{z,0} + \frac{1}{2} e_{\alpha\beta} - \omega_z \right) \right] + \left[ e_{\beta,0} \left( \frac{1}{2} e_{\alpha\beta} + \omega_z \right) + \right. \\ \left. + e_\beta \left( \frac{1}{2} e_{\alpha\beta,0} + \omega_{z,0} + \frac{1}{2} e_{\alpha\beta} + \omega_z \right) \right] + \\ + \left[ \left( \frac{1}{2} e_{\alpha z,0} - \omega_{\beta,0} \right) \left( \frac{1}{2} e_{\beta z} + \omega_\alpha \right) + \left( \frac{1}{2} e_{\alpha z} - \omega_\beta \right) \times \right. \\ \left. \times \left( \frac{1}{2} e_{\beta z,0} + \omega_{\alpha,0} + \frac{1}{2} e_{\beta z} + \omega_\alpha \right) \right] \end{aligned}$$

$$\text{при } \varepsilon_z = e_z; \quad \varepsilon_{\alpha z} = e_{\alpha z}; \quad \varepsilon \leftrightarrow \beta,$$

где в уравнения подставлены эффективные коэффициенты упругости, теплопроводности, теплоемкости, плотности, зависящие от функций  $\delta_{11}(t)$  на стадии деградации свойств материала и  $C(t)$  – на стадии накопления микроповреждений. Поэтому необходимо к уравнениям (1)–(7) добавить формулы для вычисления эффективных модулей на стадии деградации и на стадии накопления микроповреждений.

Для замыкания систем уравнений динамики эффективной оболочки при термосиловых воздействиях добавляем кинетические уравнения:

$$\frac{d\varepsilon_{i,j}}{dN} = f_{i,j}(\sigma, N, T), \quad i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, n, \quad (8)$$

или

$$\frac{d\delta_{ij}}{dN} = F_{ij}(\sigma, N, T), \quad \delta_{ij} = \frac{\varepsilon_{ij}}{\varepsilon_{11}}; \quad 0 \leq \delta_{i1} \leq 1, \quad (9)$$

на стадии деградации физико-механических свойств материала. На стадии образования и накопления микропор (повреждений) вместо (8) или (9) добавляется уравнение

$$\frac{dC}{dN} = f(N, \sigma_{ij}, T, C), \quad (10)$$

где  $C = V_p/V$  – объемная концентрация пор.

Система взаимосвязанных уравнений позволяет вычислить теоретические оценки для  $\delta_{11}(t)$  и  $\delta_{11}(N)$  на стадии деградации или  $C(t)$  и  $C(N)$  на стадии накопления микроповреждений и продолжительность этих стадий  $t^*$  из условий:

1) на стадии деградации

$$\delta_{11}(t^*) = \int_0^{t^*} F_{11}(\sigma_{ij}, t, T, \delta_{11}) dt = 1$$

или предельное число циклов  $N^*$  из условия

$$\delta_{11}(N^*) = \int_0^{N^*} F_{11}(\sigma_{ij}, N, T, \delta_{11}) dN = 1;$$

2) на стадии накопления микроповреждений  $t^{**}$

$$C(t^{**}) = \int_{t^*}^{t^{**}} f(\sigma, t, T) dt = 1 \quad (11)$$

или предельное число циклов  $N^{**}$  из условия

$$C(N^{**}) = \int_{N^*}^{N^{**}} f(\sigma, N, T) dN = 1. \quad (12)$$

Отметим, что условие  $C(t^{**}) = 1$  или  $C(N^{**}) = 1$  означает, что исходный сплошной объем тела полностью превратился в пустоту, а это в реальности соответствует равномерному распределению пор (микротрещин) по рассматриваемому объему (типа поролон). Однако в действительности процессы образования микропор идут по пути не равномерного распределения по объему микроповреждений, а локализации их за счет слияния микропор и образования

макротрещины, пронизывающей выделенный рассматриваемый объем. При статистическом характере накопления повреждений происходит рост кластеров пор, которые при некоторой величине объемной концентрации согласно теории перколяции сливаются между собой в макрокластер-трещину, которая проходит через выделенный объем детали. Эксперименты и расчеты показывают, что происходит это при концентрации  $C < 1$ : порядка  $C = 0,25$  – в трехмерном теле и  $C = 0,5$  – в двухмерном. С учетом этого в (11), (12) необходимо положить:  $C(t^{**}) = 0,25$  или  $C(N^{**}) = 0,25$ , что соответствует реальным механическим процессам накопления повреждений и разрушения.

Рассматривая уравнение (10), положим, что каждая из образующих микроповрежденностей имеет некоторый объем  $V_n$ , который будем считать для всех микроповреждений одним и тем же. Тогда можно записать:

$$C(t) = \frac{V_n}{V} = \frac{V_n M(t)}{V} = \gamma M(t)$$

или

$$C(N) = \frac{V_n}{V} = \frac{V_n M(N)}{V} = \gamma M(N), \quad (13)$$

где  $\gamma$  – константа;  $M$  зависит от  $t$  или  $N$  и представляет собой число микроповреждений после  $N$  циклов нагружения или за время  $t - t^*$ . Тогда уравнение (10) с учетом (13) запишем в виде

$$\frac{dM}{dt} = \frac{1}{\gamma} f(t, \sigma_{ij}, T, M)$$

или

$$\frac{dM}{dN} = \frac{1}{\gamma} f(N, \sigma_{ij}, T, M). \quad (14)$$

В разностном виде (14) представим следующим образом:

$$M_{N+1} = M_N + \frac{1}{\gamma} f(N, \sigma_{ij}, T, M_N).$$

В общем случае  $M$  является величиной случайной, которая монотонно возрастает, а ее

распределение может быть аппроксимировано распределением Пуассона.

## ВЫВОДЫ

Рассмотрен один из способов оценки состояния сложной механической системы в динамике с учетом деградации материала и накопления микроповреждений. Полученная математическая модель описывает напряженно-деформированное состояние авиационного двигателя. Она представляет собой систему, состоящую из многих десятков уравнений.

1. Слоистая оболочка описывается:

а) уравнениями динамики и теплопроводности при действии поверхностных и объемных источников температуры и нагрузок;

б) уравнениями закона Гука и соотношений Коши для связи деформаций и перемещений;

в) кинетическими уравнениями накопления повреждений.

2. Структура 3-го уровня (лопатки ротора) описывается:

а) уравнениями для определения величины напряжений и изгибающих моментов лопаток ротора;

б) уравнениями накопления повреждений, обуславливающими изменение физико-механических свойств.

С помощью приведенных систем уравнений можно оценить уровни поврежденности элементов механической системы и ее остаточный ресурс.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Беляев, Н. М. Методы теории теплопроводности / Н. М. Беляев, А. А. Рядно. – М.: Высш. шк., 1982. – Ч. 1.
2. Пелех, Б. Л. Слоистые анизотропные пластины и оболочки с концентраторами напряжения / Б. Л. Пелех, В. А. Лазько. – Киев: Наук. думка, 1982.
3. Куликов, И. С. Прочность элементов конструкций при облучении / И. С. Куликов, В. Б. Нестеренко. – Минск: Наука и техника, 1990.

Поступила 19.10.2009