УДК 51(07.07)

Методические аспекты преемственности в преподавании математики в средней школе

Ревтович В. Н.
Белорусский национальный технический университет

Преподавание математики в лицейских классах БНТУ ведется на повышенном уровне. Времени же на прохождение материала отводится достаточно мало (до 6 часов в неделю). Поэтому особое внимание необходимо уделять на взаиморасположение тем, на преемственность методов решения применяющихся в различных темах, а также на изучение тех математических понятий, которые проходят через многие разделы тем. Одним из таких понятий является модуль. Практически во всех темах математики можно выполнять упражнения, которые содержат модуль. Особенно продуктивно идёт систематизация материала, если примеры содержат параметр. Рассмотрим несколько таких заданий.

Пример 1. При каких значениях a уравнения $|a^2-1|x=1-a$ имеет единственное решение?

Решение. Это линейное уравнение. Рассмотрим случай, когда $|a^2-1|=0$ и $|a^2-1|\neq 0$.

1. $|a^2-1|=0$, т.е. $a=1$ и $a=-1$.

При $a=1$ получаем $0\cdot x=0$, т.е. $x\in R$, при $a=-1$, $0\cdot x=2$, т.е. $x\notin\varnothing$.

2. Случай, когда:

$|a^2-1|\neq 0$, т.е. $a\neq 1$ и $a\neq -1$ необходимо разбить на два случая: $a^2-1>0$ и $a^2-1<0$ или

На интервале $(-\infty;-1)\cup(1;\infty)$ $x=-\dfrac{1}{a+1}$; если $a\in(-1;1)$, то $x=\dfrac{1}{a+1}$.

Ответ: единственное решение будет при всех a, кроме ± 1.

Пример 2. Решить неравенство $|x| < \frac{a}{x}$ для всех значений параметра a.

Решение. Исходя из условия следует, что $\frac{a}{x} > 0$, поэтому неравенство можно записать в виде $x^2 < \frac{a^2}{x^2}$ или $x^4 < a^2$, $|x| < \sqrt{|a|}$. Отсюда следует, что если $a = 0$, то $x \in \varnothing$: $a > 0$, то $0 < x < \sqrt{a}$ и $a < 0$, то $-\sqrt{-a} < x < 0$.

Ответ: при $a = 0$, $x \in \varnothing$; при $a > 0$, $x \in \left(0; \sqrt{x}\right)$; при $a < 0$, $x \in \left(-\sqrt{-a}; 0\right)$.

Пример 3. При каких значениях параметра a уравнение $\sqrt{|x|+1} - \sqrt{|x|} = a$ имеет решение.

Решение. Анализируя условие можно заметить, что $a \in (0;1]$, поэтому условие перепишем в виде $4a^2|x| = \left(1-a^2\right)^2$. Отсюда следует, что $x = \pm\left(\frac{1-a^2}{2a}\right)^2$. При всех других значениях a $x \in \varnothing$.

Ответ: *a=1*.

Пример 4. Решите неравенство $\sqrt{|x|+m} \geq m^2$, для всех значений параметра m.

Решение. Возведём обе части в квадрат $|x| + m \geq m^4$, $|x| \geq m^4 - m$.

Рассмотрим: $\begin{cases} m^4 - m > 0 \\ \left[\begin{array}{l} x \geq m^4 - m \\ x \leq m - m^4 \end{array}\right. \end{cases}$ и $\begin{cases} m^4 - m \leq 0 \\ x \in R \end{cases}$.

Решим на интервалах, где $m\left(m^3 - 1\right) \geq 0$ и $m\left(m^3 - 1\right) \leq 0$, т.е.

Имеем, если $m \in (-\infty;0) \cup (1;\infty)$, то $x \in (-\infty; m - m^4) \cup$ $\cup (m^4 - m;\infty)$; $a \in (0;1]$, $x \in R$.

Ответ:

при $a \in (-\infty;0) \cup (1;\infty), x \in (-\infty; m - m^4) \cup (m^4 - m;\infty)$,

при $a \in (0;1]$ $x \in R$.

Пример 5. При каких n система имеет ровно два решения
$$\begin{cases} x^2 - 5x + 6 = 12|x| - |x^2 + 7x + 6| \\ 3x^2 - 12x = 6nx - 3n^2 - 12n. \end{cases}$$

Решение. Преобразуем второе уравнение к виду $x^2 - 2(n+2)x + n(n+4) = 0$, отсюда $x_1 = n + 4$, $x_2 = n$.

1. Первое уравнение решим на интервалах:
$x \in (-\infty;-6) \cup (-1;0]$, получим $x^2 + 7x + 6 = 0$, откуда $x_1 = -1$; $x_1 = -6$, не входят в заданный интервал.

2. $x \in [-6;-1]$, уравнение имеет решения для всех x их этого отрезка.

3. $x \in (0;\infty)$, следует, $x^2 - 5x + 6 = 0$, т.е. $x_1 = 2$ и $x_2 = 3$. Следовательно, если $x \in [-6;-1] \cup \{2\} \cup \{3\}$, то $x_1 = n + 4$ и $x_2 = n$ (x_1 и x_2 должны принадлежать указанному множеству.

Проверим: $n = 2$, то $n + 4 = 6$ - не подходит; $n = 3$, то $n + 4 = 7$ - не подходит; $-6 \le n \le -1$, тогда решим систему:
$$\begin{cases} -2 \le n + 4 \le 3 \\ \left[\begin{array}{l} -6 \le n + 4 \le -1 \\ n + 4 \in \{2;3\} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n + 4 = 2 \\ n + 4 = 3 \\ -2 \le n + 4 \le -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = -2 \\ n = -1 \\ n \in [-6;-5] \end{array}\right..$$

Ответ: $n \in [-6;-5] \cup \{2\} \cup \{1\}$.

Предложенный подход позволяет не только повторить и систематизировать пройденный материал, но и развивать творческое мышление учащихся.