УДК 51(07.07)

# Эффективное использование векторных методов при решении нестандартных уравнений, неравенств и их систем

Чернявская С. В.
Белорусский национальный технический университет

В системе математической подготовки учащихся старшей ступени средней общеобразовательной школы необходимо уделять серьёзное внимание нестандартным методам решения задач, например, уравнений, неравенств и их систем.

В последние годы отмечается постоянное присутствие такого рода задач в группе Б централизованного тестирования и других типов вступительных и выпускных экзаменов по математике. Подобные задачи позволяют не только выявить уровень подготовки абитуриента, но и определить его способности к логическому мышлению, умению действовать в нестандартных условиях и применять имеющиеся знания к оценке и решению непривычно поставленных задач. Поэтому представляется актуальным знакомить учащихся с теми или иными нестандартными подходами и методами в решении задач усложнённого типа. Одним из таких методов является метод, основанный на применении векторов. Отметим, что в учебных программах по математике ему отводится весьма незначительная часть времени, используется он при решении чисто геометрических задач (например, при нахождении угла или расстояния между скрещивающимися прямыми). Однако, практически ни в одном учебнике по алгебре не предлагается в качестве рабочего инструмента в решении уравнений или доказательстве неравенств. Приведём несколько конкретных примеров, позволяющих увидеть преимущества этого метода в решении сложных иррациональных уравнений и неравенств. Отметим, что используемые теоретические сведения не выходят за рамки любого школьного курса.

Напомним, что для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ справедливы неравенства:

$$|\vec{a}|+|\vec{b}|\ge|\vec{a}+\vec{b}|, \qquad (1)$$

$$|\vec{a}|+|\vec{b}|\ge|\vec{a}-\vec{b}|. \qquad (2)$$

Равенство в формулах (1) – (2) достигается в случае коллинеарности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, причём если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены, то

$$|\vec{a}|+|\vec{b}|=|\vec{a}+\vec{b}|,$$

если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ противоположно направлены, то

$$|\vec{a}|+|\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|.$$

В общем случае, если $\vec{a}=\sum_{i=1}^{n}\vec{a}_i$, то $|\vec{a}|\le\sum_{i=1}^{n}|\vec{a}_i|$. (3)

Из определения скалярного произведения следует, что:

$$\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}\le 1. \quad (4)$$

Равенство в формуле (4) достигается в случае коллинеарнсти векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Задача 1. Найти наименьшее значение выражения $A=\sqrt{x^4+1}+\sqrt{y^4+1}+\sqrt{z^4+1}$, если $x^2+y^2+z^2=1$.

Решение. Рассмотрим векторы $\vec{a}(x^2;1)$; $\vec{b}(y^2;1)$; $\vec{c}(z^2 1)$. Т.к. длины равны соответственно:

$$|\vec{a}|=\sqrt{x^4+1}; \ |\vec{b}|=\sqrt{y^2+1}; \ |\vec{c}|=\sqrt{z^4+1},$$

то выражения $A=|\vec{a}|+|\vec{b}|+|\vec{c}|$.

Рассмотрим вектор $\vec{d}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$, тогда

$\vec{d}(x^2+y^2+t^2;3)$ и длина вектора

$$|\vec{d}|=\sqrt{(x^2+y^2+t^2)+3}=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}.$$

Из формулы (3) следует, что $|\vec{d}|\le|\vec{a}|+|\vec{b}|+|\vec{c}|$.

Следовательно, $A\ge\sqrt{10}$.

Ответ: наименьшее значение выражения $A$ равно $\sqrt{10}$.

Задача 2. Решить неравенство $\sqrt{(6-x)^2+4}+\sqrt{(x-2)^2+1}\le 5$.

Решение. Рассмотрим векторы $\vec{a}(6-x;2)$ и $\vec{b}(x-2;1)$. Тогда $|\vec{a}|=\sqrt{(b-x)^2+4}$ ; $|\vec{b}|=\sqrt{(x-2)^2+1}$.

Неравенство имеет вид $|\vec{a}|+|\vec{b}|\le 5$.

Пусть $c=\vec{a}+\vec{b}$, тогда $\vec{c}(4;3)$ и $|\vec{c}|=5$. Из формулы (1) следует, что $|\vec{a}|+|\vec{b}|\ge|\vec{a}+\vec{b}|=5$, поэтому исходное неравенство равносильно равенству $|\vec{a}|+|\vec{b}|=5$, что возможно при условии коллинеарности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, то есть $\frac{6-x}{x-2}=\frac{2}{1}$, откуда $x=\frac{10}{3}$.

Ответ: $x=\frac{10}{3}$.

Задача 3. Решить уравнение $x\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}=2\sqrt{x^2+1}$.

Решение. Из условия следует, что $0<x\le 3$. Пусть $\vec{a}(x;1)$; $\vec{b}\left(\sqrt{x+1};\sqrt{3-x}\right)$, тогда $\vec{a}\cdot\vec{b}=x\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}$. Длины векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны соответственно $|\vec{a}|=\sqrt{x^2+1}$, $|\vec{b}|=2$ и уравнение имеет вид $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$ откуда следует, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то есть $\frac{x}{\sqrt{x+1}}=\frac{1}{\sqrt{3-x}}$.

Возведём обе части уравнения в квадрат, получим $\frac{x^2}{x+1}=\frac{1}{3-x}$. Откуда $x^3-3x^2+x+1=0$, $x\ne 3$. Разлагая левую часть уравнения на множители, получим $(x-1)\left(x^2-2x-1\right)=0$, откуда $x_1=1$, $x_{2,3}=1\pm\sqrt{2}$. Учитывая ОДЗ, запишем ответ.

Ответ: $x\in\left\{1;1+\sqrt{2}\right\}$.

Задача 4. Среди всех решений системы $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ z^2+\upsilon^2=9 \\ x\upsilon+yz\geq 6 \end{cases}$ найти такие, при каждом из которых выражение $x+z$ принимает наибольшее значение.

Решение. Пусть $\vec{a}(x;y)$, $\vec{b}(\upsilon;z)$, тогда $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$. Неравенство в системе примет вид: $\vec{a}\cdot\vec{b}\geq 6$.

Из определения скалярного произведения следует, что $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi=2\cdot3\cdot\cos\varphi=6\cdot\cos\varphi\geq 6$, но $|\cos\varphi|\leq 1$. Поэтому $\cos\varphi=1$ откуда получаем, что $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны и сонаправлены, то есть $\vec{b}=k\cdot\vec{a}$, где $k>0$, $k\in R$. Тогда $k=\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}=\frac{3}{2}$ и $\upsilon=\frac{3}{2}x$; $z=\frac{3}{2}y$. Сумма $x+z$ принимает вид $x+\frac{3}{2}y=\vec{a}\cdot\vec{c}$, где $\vec{c}\left(1;\frac{3}{2}\right)$ и $|\vec{c}|=\frac{\sqrt{13}}{2}$.

Так как $\vec{a}\cdot\vec{c}=|\vec{a}|\cdot|\vec{c}|\cdot\cos\alpha$, то наибольшее значение выражения достигается при $\alpha=0$. Следовательно, векторы $\vec{a}$ и $\vec{c}$ коллинеарны и сонаправлены, то есть $\vec{a}=m\cdot\vec{c}$, где $m>0$, $m\in R$. Отсюда следует $m=\frac{|\vec{a}|}{|\vec{c}|}=\frac{4}{\sqrt{13}}$. Тогда $x+y$ принимает наибольшее значение, при следующих значениях переменных: $x=\frac{4}{\sqrt{13}}\cdot 1$, $y=\frac{4}{\sqrt{13}}\cdot\frac{3}{2}=\frac{6}{\sqrt{13}}$.

$$\upsilon=\frac{4}{\sqrt{13}}\cdot\frac{3}{2}=\frac{6}{\sqrt{13}};\ z=\frac{3}{2}\cdot\frac{6}{\sqrt{13}}=\frac{9}{\sqrt{13}}.$$

Ответ: $\left(\frac{4}{\sqrt{13}};\frac{6}{\sqrt{13}};\frac{6}{\sqrt{13}};\frac{9}{\sqrt{13}}\right)$.